

## 23. Progres u kvantnoj fizici. Dublje razumevanje i nove aplikacije

### 23.1. Uvod

Iako se kvantna teorija pokazala kao pogodno sredstvo za objašnjavanje čini se, nebrojeno mnogo fizičkih fenomena, njeni osnovni su mnogo puta dovođeni pod sumnju, čak i od naučnika koji su nesumljivi geniji kao što je Ajnštajn. Kao rezultat, takve diskusije su dovele do dubljeg razumevanja, uvođenja novih koncepata, i neočekivanih novih aplikacija. U ovoj glavi, želimo da objasnimo neke od ovih razvoja. Počecemo sa objašnjenima i interpretacijama datim u Glavama 7 i 9, koja su ovde u nešto abstraktnijoj formi.

### 23.2. Princip superpozicije, interferencija, verovatnoća i verovatnoća amplitude.

Razmotrimo sada primer čestice sa prostornim koordinatama  $\mathbf{r}$ , i talasnom funkcijom  $\psi(\mathbf{r}, t)$  koja zadovoljava vremenski zavisnu Šredingerovu jednačinu. Ova talasna funkcija se može predstaviti kao superpozicija (ili linearna kombinacija) kompletnog skupa ortonormiranog bazisa talasnih funkcija  $\phi_j(\mathbf{r})$ ,  $j=1, 2, \dots$ ;

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_j c_j(t) \phi_j(\vec{r}), \quad (23.1)$$

gde se (vremenski zavisni) koeficijenti  $c(t)$  nazivaju amplitude verovatnoće. Prema verovatnoćnoj interpretaciji kvantne mehanike  $|c_j(t)|^2$  predstavlja verovatnoću da se čestica nađe u trenutku  $t$  u kvantnom stanju  $j$ , ako obavimo merenje odgovarajućeg kvantnog stanja. Specijalni slučaj (23.1) se nalazi kada je svaki pojedinačni sabirak u (23.1) sam za sebe rešenje vremenski zavisne Šredingerove jednačine.

Da bi smo razumeli razliku između pravila računanja (i odgovarajuće interpretacije) kvantne mehanika u odnosu na klasičnu fiziku, razmotrimo specijalni slučaj samo dve talasne funkcije  $\phi_1$  i  $\phi_2$  tako da se (23.1) svodi na

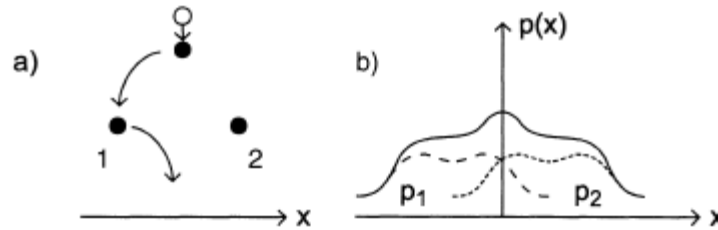
$$\psi(\vec{r}, t) = c_1 \Phi_1(\vec{r}) + c_2 \Phi_2(\vec{r}) \quad (23.2)$$

Da bi smo izračunali verovatnoću nalaženja čestice u tački  $\mathbf{r}$ , primenjujemo (23.2) i računamo

$$|\psi(\vec{r})|^2 = |c_1|^2 |\Phi_1(\vec{r})|^2 + |c_2|^2 |\Phi_2(\vec{r})|^2 + c_1^* c_2 \Phi_1^*(\vec{r}) \Phi_2(\vec{r}) + c_2^* c_1 \Phi_2^*(\vec{r}) \Phi_1(\vec{r}) \quad (23.3)$$

Ilustrovaćemo ovu situaciju na primeru eksperimenta sa dvostrukim prorezom u kome snop elektrona prolazi kroz dva otvora. Neka je  $\phi_1(\mathbf{r})$  talasna funkcija koja odgovara prolazu elektrona kroz otvor 1, a  $\phi_2(\mathbf{r})$  odgovara prolazu 2. Analogno talasnoj optici, izraz u drugom delu (23.3) predstavlja interferenciju elektronskih talasa. Na primer, ako zatvorimo otvor 1, tj. ako blokiramo taj put, onda interferenciona slika nestaje. Medjutim, da bi se uništila interferenciona slika u kvantno mehaničkom slučaju, uopšte nije potrebno da se blokira jedan od proreza. Kao što je bilo demonstrirano u vrlo

suptilnom eksperimentu dovoljno je znati koji elektron prolazi kroz koji otvor. U ovim eksperimentima, prolaz elektrona se registruje korišćenjem *cavity rezonatora*. Da bi se detektovala interferenciona slika, prirodno, potrebno je takav eksperiment ponoviti mnogo puta što omogućuje statističko usrednjavanje.



Slika 23.1 (a). Galtonova tabla sa tri čiode. (b) sumiranje verovatnoća

Ako sada uporedimo kvantu mehaniku sa klasičnom fizikom, možemo da obavimo klasičnu analogiju eksperimenta sa dva otvora. Razmotrimo Galton board (rani prethodnik pinball mašine) sa tri pinsa (pins=čioda, klin). Pretpostavimo sada da loptice padaju na gornji klinčić, izazivajući tako cepanje “snopa čestica” u levi i desni snop; teorija haosa nam tvrdi da je nemoguće predvideti trajektorije potpuno tačno. Kada loptice pogode klin 1 one će se rasejati dovodeći lopticu na x osu sa verovatnoćom  $p_1(x)$ . Isto tako imamo i  $p_2(x)$  za pin 2. Ako oba klinčića rasejavaju loptice verovatnoća rasejanja je

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) \quad (23.4)$$

Ako uporedimo ovaj rezultat (23.3) možemo da vidimo osnovnu razliku između klasične i kvantne fizike; u kvantnoj fizici događa se interferencija ali ne i u klasičnoj. Ovo takođe indicira kako se može preći sa kvantnog na klasični opis uklanjajući interferencioni član. Važan primer su fazne fluktuacije na koje ćemo se vratiti kasnije u sekciji o dekoherenciji.

Koristeći bra i ket notaciju (23.2) se može zapisati u apstraktnijoj formi:

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle \quad (23.5)$$

U ovom izrazu,  $|1\rangle$  i  $|2\rangle$  indiciraju talasne funkcije zavisne od položaja kao u (23.2) ili mogu biti spinske talasne funkcije  $|\uparrow\rangle$  i  $|\downarrow\rangle$  sa spinovima “gore” ili “dole”, ili mogu da indiciraju stanje fotona sa horizontalnom  $|\leftrightarrow\rangle$  ili  $|\updownarrow\rangle$  vertikalnom polarizacijom. Odavde možemo da vidimo kako je široka primenljivost kvantno mehaničkog

formalizma. Da bi se proširila interpretacija eksperimenta sa dva proreza na ovaj opštiji slučaj, potreban je formalni trik, jer se karakteristična veličina koja odgovara poziciji  $\mathbf{r}$ , ne pojavljuje u (23.5). Umesto razmatranja merenja pozicije  $\mathbf{r}$  čestice, govorimo apstraktnije o merenju kvantnog stanja  $\psi_k$  koje u bra-ket notaciji označavamo sa  $|\psi_k\rangle$ . Verovatnoća (kada se razmatra talasna funkcija  $|\psi\rangle$  i sledeće merenje kvantnog stanja  $|\psi_k\rangle$  se razmatra) nalaženja posebnog stanja  $|\psi_{k0}\rangle$  je dato prema osnovni pravilima kvantne mehanike sa  $|\langle\psi_k|\psi\rangle|^2$  (Glava 9). Koristeći (23.5) računamo

$$\langle\psi_k|\psi\rangle = c_1\langle\psi_k|1\rangle + c_2\langle\psi_k|2\rangle \quad (23.6)$$

i dobija se

$$|\langle\psi_k|\psi\rangle|^2 = |c_1|^2|\langle\psi_k|1\rangle|^2 + |c_2|^2|\langle\psi_k|2\rangle|^2 + c_1^*c_2\langle 1|\psi_k\rangle\langle\psi_k|2\rangle + c_1^*c_2\langle 2|\psi_k\rangle\langle\psi_k|1\rangle \quad (23.7)$$

Zadnja dva člana predstavljaju interferencioni deo. Za specifične primere vidi vežbanje 23.1.

### 23.3 Šredingerova mačka

Šredinger, kome dugujemo vrlo fundamentalnu Šredingerovu jednačinu, imao je problema sa interpretacijom kvantne teorije, naročito po pitanju procesa merenje. Da bi ilustrovao problem, Šredinger je izmislio misaoni eksperiment: stavimo mačku u kutiju tako da ne možemo da je vidimo, i ne možemo da odredimo kvantno stanje mačke. Dodatno, u kutiji se nalazi radioaktivni atom, koji se raspada i kreira otrovni gas koji ubija mačku. Prema kvantnoj mehanici, momenat radioaktivnog raspada nije predvidljiv (poznata je samo verovatnoća). Tako ne možemo da odredimo u specifičnom momentu da li je mačka živa ili ne, i moramo da opišemo kvantno mehaničko stanje na sledeći način:

$$|\psi\rangle = c_1|ziva\rangle + c_2|mrtva\rangle \quad (23.8)$$

Ovaj talasni paket je koherentna superpozicija dva stanja “živa” i “mrtva”. Tek kada otvorimo kutiju i pogledamo unutra, u jeziku kvantne mehanike to je “merenje stanja mačke” talasni paket (23.8) će se svesti na jedno od stanja “živa” ili “mrtva”. Ovde možemo da zapazimo da kvantno stanje mačke ne može da zavisi od toga da li mi otvaramo kutiju ili ne, tako da se ovde pojavljuje ozbiljna kontradikcija u interpretaciji kvantne mehanike. Kako se ova kontradikcija razrešava biće predmet sledeće sekcije.

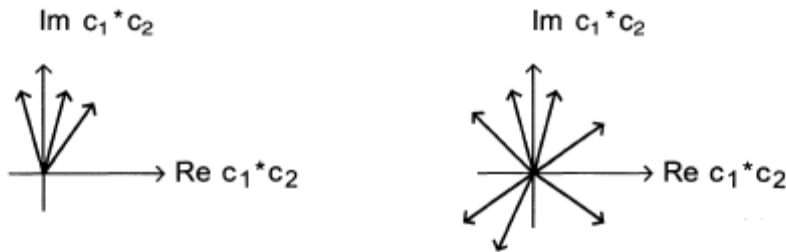
### 23.4. Dekohherencija

Iako je rešenje Šredingerove zagonetke dugo vremena bilo poznato insajderima kvantne mehanike, koji su proučavali relaksaciju spina ili kvantnu teoriju lasera, ono je postepeno postajalo poznato široj zajednici fizičara.

Kao primer razmotrimo magnetski momenat spina 1/2 koji precesuje u konstantnom magnetskom polju  $\mathbf{B}_z$  (Sekcija 14.2). Možemo da pratimo vremenski razvoj, očekivane vrednosti operatora spina u x pravcu. Koristimo talasni paket (23.5), tj.

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle \quad (23.9)$$

da bi se izračunala očekivana vrednost



Slika 23.2. Širenje faznih uglova. Na kraju vektori se poništavaju

$$\langle\psi|s_x|\psi\rangle = |c_1|^2\langle\uparrow|s_x|\uparrow\rangle + |c_2|^2\langle\downarrow|s_x|\downarrow\rangle + c_1^*c_2\langle\uparrow|s_x|\downarrow\rangle + c_2^*c_1\langle\downarrow|s_x|\uparrow\rangle \quad (23.10)$$

Ovaj rezultat smo već sreli u sekciji 14.2.4. Ovde nas interesuje drugačiji aspekt, naime ponašanje interferentnih termova  $c_1^*c_2$ , i  $c_2^*c_1$ . U suštini spin je pod konstantnim uticajem okruženja, nazvanog “*heath baths*”, jezikom termodinamike. Kao što je pokazano u teoriji korespondencije, sprezanje spinova u heath baths u dovodi do fluktuacija faza  $\chi_1, \chi_2$  koeficijenata  $c_1$  i  $c_2$  koji se pišu u formi

$$c_1 = a_1 e^{i\chi_1}; \quad c_2 = a_1 e^{i\chi_2}$$

U toku vremena ove fluktuacije nastavljaju da rastu. Kada računamo  $|c_j|^2$  fluktuacije se poništavaju. Medjutim, kada računamo  $c_1^*c_2$  i usrednjimo preko faza, fazno usrednjenje  $c_1^*c_2$  teži nuli sa povećanjem vremena (slika 23.2).

Drugim rečima interferentni term nestaje i kvantno mehanički opis se konvertuje u klasični. Ako sada razmotrimo makroskopski objekat kao što je mačka, to nije samo celina, tj. subjekat na koji okolina dejstvuje, već takodje, njeni delovi, opet makroskopski deluju jedan na drugi kao heat baths i uništavaju kvantno mehaničku faznu

relaciju. Čak i bez intervencije posmatrača, tj. bez merenja koherentne talasne funkcije mačke brzo opadaju. Ako se neživi objekti hlade (uključujući i njihovu okolinu) do vrlo niskih temperatura onda heat baths može biti nedovoljno jak da uništi kvantnu koherenciju, i mogu se opaziti makroskopski kvantni fenomeni, kao što je superprovodnost, superfluidnost, ili Boze -Ajnštajnova kondenzacija (Sekcija 23.11).

### 23.5. Entanglement

Ovaj izraz je uveden od strane Šredingera 1935. Razmotrimo dva kvantna sistema, tj. dve čestice ili dva spina ili dva fotona, i ako ova dva sistema nisu kuplovana, onda je njihova ukupna talasna funkcija proizvod talasnih funkcija pojedinih sistema. Tako, u slučaju spina imamo

$$|\uparrow 1\rangle \cdot |\downarrow 2\rangle \equiv |\uparrow 1 \downarrow 2\rangle \quad (23.11)$$

ili

$$|\downarrow 1\rangle \cdot |\uparrow 2\rangle \equiv |\downarrow 1 \uparrow 2\rangle \quad (23.12)$$

Indeksi služe da se numerišu spinovi a desne strane (23,11,12) se mogu smatrati skraćenicom levih strana. Nadalje izostavljamo ove indekse. Kao što je više puta pokazano u ovoj knjizi, sprezanje između sistema dovodi do linearne kombinacije (23.11,12) tako da je talasna funkcija oblika

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (23.13)$$

Takve kombinacije proizvoda talasnih funkcija (čak i kada funkcije činoci imaju neke koeficijente) se naziva entanglements (upletenost) ili entangled stanja. Kako su spinovi locirani na fiksnim mestima,  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  zavisnost njihovih položaja se može eksplicitno izraziti uključujući funkcije položaja  $\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle) \chi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (23.14)$$

Priprema takvih entangled stanja u sistemu koji se sastoji od više podsistema, tj. spinova je težak eksperimentalni problem i zahteva veliku spretnost i veštinu.

Zašto su ove entangled talasne funkcije tako interesantne. Odgovor će biti diskutovan u sledećim sekcijama.

### 23.6. Anjštajn – Podolsky - Rosen (EPR) paradoks

Razmotrimo sada detaljnije talasnu funkciju (23.14) i zamislimo da merimo z-komponentu prvog spina. Ako nadjemo da je spin usmeren “na više”, onda je talasna funkcija  $|\uparrow\downarrow\rangle$ . Ovo znači, ne samo da je prvi spin “naviše” već i da je drugi spin “na dole”- i to znamo bez merenja. Ili, ako i obavimo njegovo merenje, spin mora biti  $\downarrow$ .

Rezultat može biti i opštiji, jer se spin može meriti u bilo kom pravcu. Kratko računanje pokazuje (vidi vežbanje 23.2) da ako se jedan spin usmeri u jednom pravcu drugi se mora usmeriti u suprotnom pravcu- nezavisno od njihovog razdvajanja (tj. ako dve čestice koje nose te spinove rastavimo proizvoljno daleko). Ovo liči na prenos informacije brzinom većom od brzine svetlosti, kako se to učinilo Ajnštajnu, osnivaču teorije relativnosti i bio je veoma sumnjičav. To mu je dalo dodatnu razlog (pored njegovog mišljenja da “Bog ne igra mice sa elektronima”) da ne prihvati kvantnu teoriju. On je predložio ideju da je kvantna teorija nekompletna, i da mora biti skrivenih varijabli iza nje. Celokupna situacija je mnogo suptilnija i EPR paradoks je centralno mesto u kvantnoj mehanici i možda u kvantnim računarima. Intenzivni teorijski i eksperimentalni naponi su učinjeni da se prouči EPR detaljnije, i mi ćemo sve to diskutovati u narednim poglavljima. Posebno će biti uključeni i fotoni u ovim istraživanjima.

### 23.7. Bellova nejednačina i hipoteza skrivenih varijabli

U razmatranju pretpostavke EPR da je kvantna mehanika nekompletna, John Bell je 1964 pokušao da je proširi u okviru lokalne, kauzalne teorije, uključujući još uvek nepoznatu skrivenu varijablu  $\lambda$ . On je izveo nejednačinu koja omogućuje eksperimentalno razdvajanje između kvantne teorije i lokalne kauzalne teorije. U sledećem tekstu izvodimo jednu od verzija Bell ove nejednačine koje potiče od Clauser, Horne, Shimon i Holta.

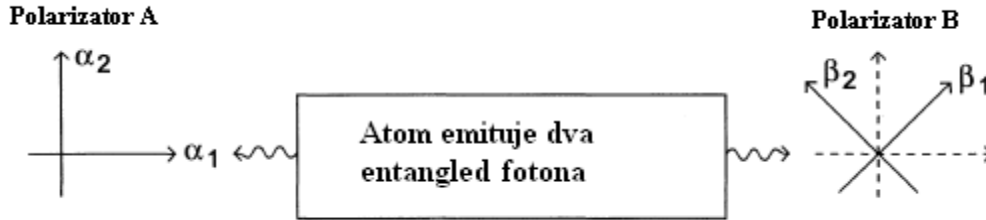
Osnovni eksperimentalni uređaj je prikazan na slici 23.3.

Atom emituje korelisani par fotona u dvo fotonskoj emisiji, ili u nekom ne linearnom optičkom procesu (videti dole). Prostorno odvojeni posmatrača A i B meri polarizacija svakog fotona. Ovi posmatrača podešavaju njihove polarizatore randomly i napred nazad između dva međusobno ortogonalna pravca  $\alpha_1\alpha_2$  ili  $\beta_1\beta_2$ . Za svaku orijentaciju polarizatora, moguća su samo dva rezultata: polarizacija horizontalna u odnosu na izabrani jedinični vektor (označena sa +1) ili vertikalna, označena sa -1. Proučimo sada posledice takozvane lokalne realistične teorije (LRT) skrivenih varijabli za poseban rezultat merenja. Prema teoriji ovog tipa fizičko stanje dva fotona emitovanih izvorom (ili generalnije - dve čestice) mora biti potpuno opisano ‘skrivenim’ varijablama. Ako se događaju fluktuacije u izvoru to će proizvoditi čestice različitog  $\lambda$ . Ovo se uzima u obzir u teoriji uvođenjem verovatnoće raspodele  $P(\lambda)$ . Ona se obično normira, tako da je

$$\int P(\lambda)d\lambda = 1 \quad (23.15)$$

U ovoj teoriji, vrednosti koje mere dva posmatrača mogu da zavise samo od njihovih sopstvenih aparatura (tj. izabranog pravca polarizacije)- ova osobina je *lokalnost*. Merenje obavljeno od strane posmatrača je *a priori* određeno odgovarajućom fiksnom vrednošću  $\lambda$  (realnost). Rezultat merenja koje obave A ili B tako zavisi samo od skrivenih varijabli  $\lambda$  i od njihove sopstvene merne aparature. Rezultat jednog posmatrača mora biti nezavisan od izbora pravca polarizacije drugog posmatrača što je u suprotnosti sa predviđanjem kvantno mehaničkih entangled stanja. Krucijalni eksperiment je tako korelacija između posmatrača A i B. Za seriju emitovanih parova fotona A i B

istovremeno određuju polarizacione pravca pojedinih fotona. Definišemo mernu veličinu  $a_1$  za posmatrača A kada je njegov polarizator u pravcu  $\alpha_1$ . U okviru lokalne teorije skrivenih



Slika 23.3. Šematski uređaj za eksperiment fotonske korelacije.

varijabli  $\lambda$ ,  $a_1$  je određeno vrednošću  $\lambda$  i ima vrednosti, zavisno od toga da li je polarizacija horizontalna ili vertikalna,  $+1$  ili  $-1$ , tako da je  $a_1(\lambda) = \pm 1$ . Analogno polarizacioni pravac  $\alpha_2$  ima moguće izmerene vrednosti  $a_2(\lambda) = \pm 1$ . Za posmatrača B uvodimo odgovarajuće izmerenje vrednosti  $b_1(\lambda) = \pm 1$  za polarizacioni pravac  $\beta_1$  i  $b_2(\lambda) = \pm 1$  za  $\beta_2$ . Iz kompletnog skupa niza merenja svih emisijih događaja, izaberimo one za koje su izabrani pravci  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ . Sada izmnožimo dve izmerene vrednosti  $a_1(\lambda)$  i  $b_1(\lambda)$  za istu vrednost  $\lambda$  tj. ako izračunamo  $a_1(\lambda) \cdot b_1(\lambda)$  i izračunajmo srednu vrednost preko celog skupa merenja. Ako je broj merenja veoma veliki, lokalna realistična teorija skrivenih varijabli daje, uključujući i verovatnoće  $P(\lambda)$  za skrivenu varijablu  $\lambda$ , sledeći izraz:

$$\langle a_1 b_1 \rangle = \int P(\lambda) a_1(\lambda) b_1(\lambda) d\lambda \quad (23.16)$$

Izrazi ovog tipa se nazivaju korelacione funkcije. Normalno, možemo takodje izračunati korelacione funkcije za druge kombinacije polarizacionih pravaca

$$\langle a_1 b_2 \rangle, \langle a_2 b_1 \rangle, \langle a_2 b_2 \rangle$$

Trik koji leži iza Belove nejednačine je izbor takve linearne kombinacije ovih korelacionih funkcija koje se mogu proceniti na takav način da omogućuju eksperimentalno razdvajanje između lokalne teorije skrivenih varijabli i kvantne teorije. Izračunamo sledeću veličinu:

$$\kappa = \left| \langle a_1 b_1 \rangle + \langle a_2 b_2 \rangle + \langle a_2 b_1 \rangle - \langle a_1 b_2 \rangle \right| \quad (23.17)$$

Kako su korelacine funkcije u obliku (23.16) gornji izraz se može zapisati kao

$$\kappa = \left| \int P(\lambda) [a_1(\lambda) b_1(\lambda) + a_2(\lambda) b_2(\lambda) + a_2(\lambda) b_1(\lambda) - a_1(\lambda) b_2(\lambda)] d\lambda \right| \quad (23.18)$$

Veličina u kvadratnim zagradama može biti bilo pozitivna bilo negativna, tako da je

$$\kappa \leq \int P(\lambda) [a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_2] d\lambda \quad (23.19)$$

Ako se izraz u zagradama u (23.19) zapiše u nešto drugačijoj formi, možemo lako videti da je

$$|(a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2| = 2 \quad (23.20)$$

Iz (23.15)-(23.20) možemo direktno da izvedemo Belovu nejednačinu u formulaciji Clausera, Horne, Shimony i Holt, koju dajemo eksplicitno.

$$|\langle a_1 b_1 \rangle + \langle a_2 b_2 \rangle + \langle a_2 b_1 \rangle - \langle a_1 b_2 \rangle| \leq 2 \quad (23.21)$$

Važno je zapaziti da se svi termini u (23.21) mogu odrediti eksperimentalno; njihova zavisnost od  $\lambda$  je samo fiktivna i usrednjavanje se obavlja preko stvarnih vrednosti  $a_j, b_j$  u (23.21).

Vratimo se sada kvantno mehaničkoj proceni izraza u (23.21). Kao što znamo (Glava 9), klasičnim veličinama su pridruženi operatori u kvantnoj teoriji. Kako svaki foton može imati samo jedno od dve merene vrednosti  $\pm 1$  zavisno od njegovog pravca polarizacije, i pošto to predstavlja kvantno mehanički sistem, možemo da koristimo spinske matrice u formalizmu operatora. Merenje stanja polarizacije sa merenim vrednostima  $\pm 1$  odgovara merenju spinskog stanja sa projekcijama u odgovarajućem polarizacionom pravcu. Koristimo Paulijeve spinske matrice

$$\sigma^A = (\sigma_x^A, \sigma_y^A, \sigma_z^A), \quad \sigma^B = (\sigma_x^B, \sigma_y^B, \sigma_z^B)$$

i pomoću polarizacionih vektora  $\alpha_1, \alpha_2$  i  $\beta_1, \beta_2$  izračunamo operatore

$$\hat{a}_j = \alpha_j \sigma^A, \quad \hat{b}_j = \beta_j \sigma^B \quad j = 1, 2 \quad (23.22)$$

Sada je lako da se izračunaju *kvantno-mehaničke* srednje vrednosti koje odgovaraju  $\langle a_j, b_j \rangle$ . Da bi se ovo obavilo potrebno je zameniti klasične merne veličine  $a_j, b_j$  njihovim operatorima (23.22) i izračunati očekivane kvantno mehaničke vrednosti

$$\langle \psi | \hat{a}_j \hat{b}_j | \psi \rangle \quad (23.23)$$

Ono se mora računati za entanglovano kvantno mehaničko stanje u obliku

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\leftrightarrow\rangle_B - |\leftrightarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B) \quad (23.24)$$



Identificiramo vertikalni pravac fotona  $|\uparrow\rangle$  sa spinskim stanje  $|\uparrow\rangle$  i odgovarajuće  $|\leftrightarrow\rangle$  sa spinskim stanjem  $|\downarrow\rangle$ . Računanje (23.23) i (23.24) ostavljamo čitaocu kao vežbu (Problem 23.3) i ovde dajemo rezultat

$$\langle \psi | \hat{a}_j \hat{b}_j | \psi \rangle = -\vec{\alpha}_j \vec{\beta}_j \quad (23.25)$$

Ako izaberemo polarizacione pravce na takav način da svaka od

$$(\vec{\alpha}_1, \vec{\beta}_1), (\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_1), (\vec{\alpha}_2, \vec{\beta}_2) \quad (23.26)$$

zatvara ugao  $\pi/4$ , onda se dobija da je

$$\left| \langle \hat{a}_1 \hat{b}_1 \rangle_{qm} + \langle \hat{a}_2 \hat{b}_1 \rangle_{qm} + \langle \hat{a}_2 \hat{b}_2 \rangle_{qm} - \langle \hat{a}_1 \hat{b}_2 \rangle_{qm} \right| = 2\sqrt{2} > 2 \quad (23.27)$$

Zamenjivanje kvantne teorije lokalnom teorijom bi bilo dozvoljeno samo ako je nejednačina (23.21) zadovoljena. Ovo se sada može testirati eksperimentalno.

### 23.8. Eksperimentalni testovi Bell ove nejednačine

Eksperimenti ovog tipa su obavljani od strane većeg broja autora. Potrebni delovi koji su potrebni za takav eksperiment su

- 1) izvor koji emituje parove korelisanih čestica, koje se kreću u raznim pravcima.
- 2) Svaka čestica ulazi u aparaturu koja analizira korelacione osobine i attribute koji rezultuju u binarnoj vrednosti ( $\pm 1$ ).
- 3) Operacija svake aparature se kontroliše nekim prekidačem koji određuje parametar  $\delta_1$  (ili  $\delta_2$ ), tj., faznim pomerajem interferometra (za energetske zavisne korelacije) ili orijentacijom polarizatora (za polarizacione korelacije).
- 4) Klasične informacije o detekciji čestice, tj. vreme i mesto detekcije, se dalje šalju u koincidentno kolo koje meri broj korelisanih događaja,  $R_{ij}(\delta_1, \delta_2)$ ,  $i, j = \pm$ .  $R_{-+}$  na primer označava koincidentni odbroj između + na aparaturi 1 i – na aparaturi 2. Ovo omogućuje određivanje koeficijenta korelacije

$$E(\delta_1, \delta_2) = \frac{R_{++} + R_{--} - R_{+-} - R_{-+}}{R_{++} + R_{--} + R_{+-} + R_{-+}} \quad (23.28)$$

gd je  $R_{ij} = R_{ij}(\delta_1, \delta_2)$ . Ako se primenjuju 4 analizatora, dva na svakoj strani izvora, onda je Bell ova nejednačina u formulaciji Clauser-Horne-Shimony and Holt (CHSH)

$$S = E(d_1, d_2) + E(d_1, d_2') + |E(d_1', d_2) - E(d_1', d_2')| \leq 2 \quad (23.29)$$

koja je generalizacija jednačine (23.21) i važiće ako je “teorija skrivenih varijabli ispravna”. Ovde su  $d_i, d_i'$  parametri (tj faze).

Eksperiment ovog tipa je obavljen u laboratoriji W.Tittel et al. (vidi bibliografiju) i i protivureći nejednačini (23.29), tjest pretpostavci skrivenih varijabli. Ovi autori su takodje izveli spektakularni eksperiment sa tri veoma odvojena analizatora, i takodje su dobili suprotnost teoriji lokalnih skrivenih varijabli. U ovom slučaju, izvor energy time entangled fotona (vidi dole) je bio instalisan u telefonskoj stanici u Ženevi. Jedan od fotona putuje oko 8.1 km kroz instalisan optički kabl do analizatora u Bellevue, 4.5 km severno od Ženeve. Koristeći drugi instalisani kabl, dužine 9.3 km drugi foton je poslat u Bernex, 7,3 km severno zapadno od Ženeve i 10.9 km od Boulevue. Apsorpcija u optičkim vlaknima je 5.6 dB i 4.9 dB respektivno, što je dovelo do ukupnog gubitka brzine koincidentnog brojanja za faktor oko 10. Analizatori su interferometri sa optičkim vlaknima sa identičnom razlikom u optičkim putevima. Kao izlaz interferometra detektovani su fotoni i sada je klasični signal vraćan u izvor, gde je bila smeštena koincidentna elektronika. Rezultati merenja su upoređeni sa raznim analizatorima i konačno upoređeni sa ciljem potvrde nelinearnih korelacija.

Na kraju nešto o izvoru korišćenom u ovom eksperimentu: sastoji se od lasera (komercijalno raspoloživa laserska dioda) i nelinearni optički kristal ( $\text{KNbO}_3$ ), u kome se “signal” foton i “idler” foton kreiraju u paru.

Svi eksperimenti koji su do sada izvedeni su verifikovali (23.27) i zato predviđanje da korelacija entangled stanja nisu opisiva lokalnom teorijom sa skrivenim varijablama. Trenutni eksperimentalni naponi su u dva pravca.

- 1) Prema pretpostavci o lokalnosti, rezultati merenja posmatrača A i B mogu da zavise samo od skrivenih varijabli fotonskog para i od izbora pravca njihove polarizacije. Izmena informacija između A i B se isključuje. U eksperimentu obavljenom 1998 godine od Zeilingera i saradnika, A i B su bili na rastojanju od 400 m i pravac polarizacije je biran generatorom slučajnih brojeva. Svako pojedinačno merenje je trajalo manje od 1.3  $\mu\text{s}$ . Prolaz signala od A do B, čak i sa brzinom svetlosti se tako moglo isključiti. Zato je CHSH nejednačina neispunjena na ubedljiv način. Medjutim detekciona efikasnost je bila samo 5 %.
- 2) Druga slaba tačka u dosadašnjim eksperimentima je: moguće je izgraditi model lokale teorije sa skrivnim varijablama (zasigurno na veštački način), u kome je CHSH nejednačina maksimalno neispunjena. Da bi se eksperimentalno odbacio ovaj argument, potrebna je detekciona efikasnost od 82.8 %. Različite grupe pripremaju eksperimente koristeći entagled atomska stanja da bi načinili takav test.

Konačno, zapazimo eksperiment u pripremi sa tri entangled čestična stanja u pokušaju da se testira pretpostavka lokalne teorije skrivenih varijabli. Koriste takozvano Greenberg-Horne-Zeilinger stanje,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B |\uparrow\rangle_C - |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B |\downarrow\rangle_C \right)$$

koje se može realizovati koristeći nuklearne spinove u molekulima ili koristeći fotone. Petlja se tako postepeno zatvara. Trend se međutim invertuje: pretpostavka o nelinearnosti je načinila osnovu za nov tip kompjutera, kvantni računar.

Završimo sada ovu kratku ekskurziju u ovu vrstu osnovnih istraživanja kratkom filozofskom diskusijom, zašto kvantni sistemi koji su originalno korelisani u istoj prostornoj poziciji, mogu da zadrže njihovu korelaciju čak i kada su veoma daleko jedan od drugog. Ako se otkrije stanje jednog, onda se trenutno zna stanje drugog bez obzira koliko je daleko. Čini se da je korelacija osnova zakona održanja, tj., celokupan spin je jednak nuli. Priroda igra "mice" ali na takav način da se poštuju zakoni održanja.

### 23.9. Kvantni računari.

#### 23.9.1. Istorijska zapažanja

Brak između kvantne fizike i nauke o računarima nije previše star. Ričard Feynman je 1982. godine formulisao prvi kvantni kompjuter. U isto vreme on je shvatio da bi simulacija kvantnog računara korišćenjem klasičnog računara zahtevala neograničeno dugo vreme. Ovo ga je dovelo do pretpostavke da kvantni računari mogu znatno ubrzati procese računanja, i da se problemi označeni kao teški za obične računare, njima mogu rešiti. David Deutsch je dalje razvio njegovu ideju i našao da kvantni računar može da radi paralelno na velikom broju klasičnih stanja. Tako, običan račun, koji se sastoji od 300 kubita (vidi dole) može da ima isti efekat kao  $2^{300}$  računanja zasnovanih na klasičnim bitovima (vidi dole), tj. više od broja atoma u poznatom univerzumu.

Konačno, Peter Shor je otkrio kako se kvantni računari mogu koristiti za rešavanje matematički teškog problema, računanja faktorizacije vrlo velikih brojeva. Da bi se faktorisao broj sa 400 cifara mreža stotine moćnih stanica bi zahtevala 10 milijardi godina (red starosti univerzuma) dok bi kvantnom računaru bio potreban samo minut. Sugestije date ovde su samo teorijski koncepti. Dalji razvoj ili novi razvoj takvog koncepta mora da ide ruku pod ruku sa materijalnom implementacijom- vratićemo se na ovu tačku kasnije.

#### 23.9.2. Digitalni kompjuteri

Da bi se bolje razumeo koncept kvantnog računara, dajemo pregled osnovnih koncepata trenutno korišćenih računara, sa kojima bi čitaoci trebalo da budu upoznati. Dva sastojka su neophodna za računar: skup podataka i program.

- a) Podaci se predstavljaju u digitalnoj formi kao niz nula i jedinica (binarni sistem), na primer 10010. Svako mesto u takvom nizu može biti nula ili jedinica. Jedno takvo mesto predstavlja bit. Niz  $n$  mesta odgovara  $n$  bita. Ako ispišemo broj mogućih realizacija niza sa  $n$  mesta nalazimo

$$2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$$

mogućnosti.

- b) Program i implementacija. Program treba da procesuje stornirane podatke na propisan način, da ih sabira, množi i td.; zatim treba da rezultate sačuva u memoriji ili da obavlja dalja računanje. Postoji korespondencija između računskih koraka kao sabiranje i množenje na jednoj strani i logičkih relacija kao što su “ili, i i” na drugoj. Relacije slede pravila Bulove algebre. Program se izvršava na materijalno supstratu, to jest pojedini računski koraci se realizuju na izvesnim elementima koji su danas potpuno elektronski. Na primer, nula može da odgovara stanju relaksiranosti, a jedinica aktivnom stanju nekog elementa, takodje poznatog kao gate. Množenje dva bita onda prati šemu kao u Tabeli 23.1.

Table 23.1 Šema množenja za dva bita, (leva kolona i gornji red) i rezultat (box desno dole).

	0	1
0	0	0
1	0	1

Digitalni kompjuter se može konstruisati od primitivnih elemenata sa jednim ili dva ulaza, koji su spojeni medjusobno. Posebno važan element je “ekskluzija” tj disjunkcija –ili- (XOR) čija je tabela data u sledećoj šemi

Table 23.2. XOR operator

	0	1
0	0	1
1	1	0

Drugi operator je negacija, koji nule pretvara u jedinice a jedinice u nule.

0→1

1→0

Sve u svemu, rad digitalnih računara se može sumirati u sledećem: set ulaznih podataka se konvertuje u set izlaznih podataka.

### 23.9.3 Osnovni koncepti kvantnih računara

Ponovo je korisno napraviti razliku između skupa podataka i programa, jer će se materijalna implementacija razmatrati sa posebnim osvrtom prema kvantnoj mehanici.

- a) Skup podataka: umesto bita, tj izbora između 0 i 1, imamo kubit (kvantni bit). Smisao ovog koncepta se najbolje može videti razmatranjem spina  $1/2$ . Talasna funkcija  $\psi$  se može predstaviti kao

$$|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle \quad (23.31)$$

gde je  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Mogući izbori u (23.31) čine kubit. Govoreći apstraktno kubit odgovara 2-dimenzionalnom Hilbertovom prostoru. (Podsetimo se, Hilbertov prostor je skup ortonormiranih vektora  $e_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , i grade ga sve moguće linearne kombinacije ovih vektora sa kompleksnim koeficijentima, gde su linearne kombinacije normalizovane na 1, vidi vežbanje 23.4). Ovo je moguće realizovati na mnoge načine, koristeći atom sa dva nivoa, sa fotonima, sa nuklearnim spinovima i dr. Niz bitova sada odgovara nizu-ili bolje rečeno skupu - kubit, koji se mogu realizovati na primer u formi spina. U razmatranjima koje slede potrebno je da se upoznamo do izvesne mere sa matematičkom reprezentacijom takvih skupova koji odgovaraju fizičkom stanju sa talasnim funkcijama. Ovo ćemo ilustrovati koristeći spinove – ali bilo koji drugi kvantno mehanički sistem sa dva nivoa bi takodje odgovarao. Za jedan kubit, stanja mogu biti opisana u obliku talasnih funkcija u obliku  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  ili takodje kao  $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$  sa  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Interesantniji je slučaj sa dva kubita. U najprostijem slučaju, množimo talasne funkcije dva spina 1 i 2, na primer  $\Phi(1) \cdot \Phi(2)$ . U *bra* i *ket* notaciji ovo je predstavljeno sa  $|\uparrow\rangle \cdot |\uparrow\rangle$ , Što se može uprostiti kao  $|\uparrow\uparrow\rangle$ . Generalnije, imamo na primer

$$(\alpha_1|\uparrow\rangle + \beta_1|\downarrow\rangle) \cdot |\uparrow\rangle, \quad (23.32)$$

što kada se izmnoži daje

$$(\alpha_1|\uparrow\uparrow\rangle + \beta_1|\downarrow\uparrow\rangle). \quad (23.33)$$

Jasno je da četiri stanja

$$|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle \quad (23.34)$$

grade bazis, odakle se sva moguća inicijalna stanja sa 2 kubita mogu konstruisati uzimajući linearne kombinacije oblika

$$c_1|\uparrow\uparrow\rangle + c_2|\uparrow\downarrow\rangle + c_3|\downarrow\uparrow\rangle + c_4|\downarrow\downarrow\rangle \quad (23.35)$$

Entanglovana stanja pripadaju ovom skupu (cf. Sekcija 323.5). Ova shema se prirodno može proširiti do proizvoljnog broja kubita. Za tri kubita, linearne kombinacije  $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$  mogu ući u igru. Ovde dolazi do prvog velikog izazove kvantne fizike; priprema pogodnih inicijalnih stanja kao ulaznih podataka.

- b) Program i implementacija: kao i u slučaju digitalnih kompjutera, možemo ponovo da dokažemo da se program može izdeliti u elementarnije korake. Dovoljno je za svaki korak zahtevati jedan ulaz, tj. jedan kubit ili dva ulaza, tj. dva kubita.

Odlučujuća tačka za ceo koncept kvantnih računara je da se svi koraci obave na kvantno mehanički koherentni način. Šta ovo znači? Kvantno mehaničko inicijalno stanje, predstavljeno sa talasnom funkcijom  $\psi(0)$  koja je rešenje talasne jednačine treba da se konvertuje u novu talasnu funkciju  $\psi(t_1)$  posle izvesnog vremena  $t_1$ . Konkretni primer bi mogao da bude spin koji flipuje (može da se preokreće), gde inicijalno spin usmeren na gore (odgovara 1) promeni smer na dole ( i odgovara mu 0). Odgovarajući switching element bi odgovarao logičkoj negaciji. Ako koristimo dva inputa, tj dva kubita, onda možemo da zamislamo dva spina u posebnim stanjima (kao ulaz) koji interaguju jedan sa drugim, stvarajući posle izvesnog vremena novo stanje (izlaz). Kako se međjutim, sva moguća stanja (ne samo 0 i 1 kao u slučaju digitalnih računara) mogu dogoditi ponudjen je veći broj mogućnosti. Govoreći abstraktno, sve switching operacije odgovaraju unitarnim transformacijama. (Podsetnik: unitarne transformacije odgovaraju rotaciji i/ili refleksiji vektora u Hilbertovom prostoru). Matrica transformacije  $U=(u_{jk})$  i asocirana matrica  $U^+=(u_{jk}^*)$  zadovoljavaju osobinu

$$\sum_j u_{jk}^* u_{jk'} = \delta_{kk'}$$

U zaključku možemo da načिनimo sledeće tvrdjenje: kvantni računari se mogu konstruisati od unitarne transformacije sa učestvovanjem 1 ili 2 kubita sa linijom podataka (žicama) spajajući switching elemente (gates). Kvantno mehanička koherencija ne mora da bude izgubljena u ovim vodovima.

Razmotrimo sada neke primere: logička negacija odgovara unitarnoj transformaciji

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (23.36)$$

pošto je

$$U|\uparrow\rangle \equiv U \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\downarrow\rangle$$

i

$$U|\downarrow\rangle \equiv U \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\uparrow\rangle \quad (23.37)$$

Važan 2 kubični gate je takozvani kvantno – kontrolisani NOT gate, koji izaziva kvantno “OR”. Šta ovo znači?

Oaj gate, ili switching element, flipuje druga od dva kubita, ako prvom odgovara 1, a u drugom slučaju drugi kubit se ne menja. Odgovarajuće unitarne transformacije tako imaju sledeće osobine:

$$\begin{aligned}
 U|01\rangle &= |01\rangle \\
 U|00\rangle &= |00\rangle \\
 U|10\rangle &= |11\rangle \\
 U|11\rangle &= |10\rangle
 \end{aligned}
 \tag{23.38}$$

Kao kratko vežbanje, čitaoci mogu ove relacije izraziti u obliku spinskih funkcija  $|\uparrow\uparrow\rangle$  idr. Očigledan zadatak kvantne fizike je, pre svega, da nađe kvantne sisteme koji nose funkcije takvih *gate*. Bilo je mnogo sugestija i realizacija i ovde možemo samo da damo nekoliko primera. U kvantnoj optici jedan atom se može zahvatiti u trapu i hladiti. Pogodnim laserskim impulsom, može se manipulirati stanjima ovh atoma na kontrolisani način. Koristeći metod *resonant-cavity electrodynamics* interakcija jednog fotona sa atomima se može koherentno kontrolisati. Takvim metodom, mogu se konstruisati 1 i 2 kubični gate-ovi. Dalje, 2 kubični gate su mogući kroz korišćenje dodatnih stepeni slobode, tj. skupom vibracionih moda atoma ili jona u rezonantnoj šupljini. U nuclear spin resonance, gate se realizuje dejstvom radiofrekventnog impulsa (Glava 14 i 20 ove knjige). Na ovaj način, jednostavni kvantni algoritmi su demonstrirani u laboratoriji. Dalji potencijalni sistemi se očekuju iz solid state physics, tj. Cooper parovi i Josephsonovi kontakti, ili spinska stanja elektrona u kvantnim tačkama kao nosioci kubita. Ovo je, sve u svemu, fascinantna nova era kvantne fizike.

#### 23.9.4. Dekoherencija i korekcija greške

Kako smo videli u Sekciji 23.4 svaki fizički sistem je subjekt uticaja okoline, što u kvantnim sistemima dovodi do gubitka koherence, pomenute ranije. Ovo je takodje tačno za kvantne računare. Kada nestane kvantno mehanička koherencija, superiornost kvantnih računara u odnosu na digitalne računare, nestaje. Na prvi pogled situacija se čini beznadežnom. Medjutim, 1995. Peter Shor i Andrew Steane su otkrili da se greška kvantnog bita (quantum bit error) se može korigovati. Ovde dajemo samo primer u kome se greška sastoji u preokretanju jednog bita. Želimo da zaštitimo koherentnu superpoziciju

$$\alpha|\downarrow\rangle + \beta|\uparrow\rangle
 \tag{23.39}$$

Kada se greška dogodi (23.39) se menja u

$$\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle
 \tag{23.40}$$

Naš zadatak je da prepoznamo da se spin preokrenuo i da ga vratimo natrag bez remećenja *delicate superposed state*, tj bez menjanja  $\alpha$  i  $\beta$ . Analogno klasičnoj korekciji

greške, uvodimo *redundance* u sistem, kodiranjem  $|\downarrow\rangle$  koristeći tri kubita kao  $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$  i  $|\uparrow\rangle$  kao  $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ . Onda (23.39) postaje

$$\alpha|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + \beta|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \quad (23.41)$$

Ako se sada dogodi greška jednog bita, (23.41) se menja u

$$\alpha|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \beta|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \quad (23.42)$$

Kao posmatrač, mi ne možemo direktno da merimo dva stanja u (23.42), jer bi to uništilo njihovu koherentnu superpoziciju. Umesto toga, potrebno je da obavimo kolektivno merenje (videti dole) na dva kubita u isto vreme: moramo da odgovorimo na pitanje, “da li prva dva spina imaju isti smer?” bez individualnog merenja svakog od njih. Zatim određujemo da li su drugi i treći kubit su u istom ili suprotnom pravcima. Iz ova dva merenja možemo da zaključimo da li je prvi kubit preokrenut u odnosu na prva dva i da li se mora natrag preokrenuti u cilju korigovana greške.

Da bi se potpuno objasnio ovaj primer, potrebno je da diskutujemo kolektivno merenje sa više detalja: želimo da nadjemo da li su dva spina u istom ili suprotnim pravcima bez detekcije spina individualno. Ovde koristimo sukcesivno dva *controlled NOT gates* (vidi 23.28 iznad). Prvo pripremimo jedan *ancillary* kubit (iz Latinskog “ancilla=maid) u stanju  $|\downarrow\rangle$ . Onda dva *gates* deluju, dok “maid” je meta i dva kubita su kontrolisana jedan nakon drugog. Ako kubiti imaju isti pravac, “maid” kubit će ili biti ne preokrenut ili će se preokrenuti dva puta, tako da će se njegov pravac održati; ako su pak, pravci dva kubita suprotni, dogodiće se samo jedno preokretanje “maid” kubita. Detektujući “maid” možemo da odredimo kolektivne osobine (paralelnost ili antiparalelnost) dva kubita. “Maid” je bitan deo korekcije kvantne greške, jer se koristi kao *sink* za entropiju koja je uvedena u blok koda greškom; “maid” se zagreva dok se zaštićeni kvantni sistem hladi. Da bi se zaštitila kvantna informacija u dužem vremenskom intervalu potrebno je kontinualno snabdevanje svežim *ancillima*. Da bi se dobio osećaj fizičke realizacije procedura korekcije greške, preporučujemo čitaocu vežbanje 23.6.

### 23.9.5. Poredjenje izmedju kvantnih i digitalnih računara.

Na početku sekcije 23.9 pomenuli smo neuporedivo veću brzinu računanja kvantnih računara. Ovo u velikoj meri zavisi od problema koji se rešava. Neki zadaci se mogu izvršavati eksponencijalno brže, zadaci opšte pretrage samo kvadratično brže, i takozvani blackbox funkcijske iteracije samo linearno brže.

U zaključku, zapazimo da porast u brzini računanja kvantnih računara potiče od činjenice da koriste entangled stanja za vreme procesa računanja.

### 23.10. Teorija kvantne informatike



U prethodnoj sekciji razmatrali smo kvantni kompjuter kao jedan od važnih pravaca razvoja u oblasti kvantne informacije i tehnologiji. Druge važne teme su kvantna kriptografija, transmisija kodiranih informacija i teleportacija, gde se kvantna stanja čestica prenosi dalekom česticom preko Einstein Podolsky Rosen paradoksa. Paradoks u ovom slučaju se ne koristi kao argument protiv validnosti kvantne teorije, već je njegov efekat bitna osnova za nove tehnologije transfera informacija.

### 23.11. Bose Einstein kondenzacija

#### 23.11.1. Statistička mehanika

Kada je sistem ne interagujućih ili slabo interagujućih čestica u termalnoj ravnoteži na temperaturi  $T$ , čestice se rasporede u raznim energetskim stanjima. Ovo se opisuje funkcijom  $f(E)$ . Ako je moguće razlikovati čestice onda važi Bolcmanova raspodela (2.8). Verovatnoća nalaženja čestice u posebnom stanju sa energijom  $E$  je data sa

$$f(E) = Z(E)^{-1} e^{-E/kT} \quad (23.43)$$

gde je  $Z$  funkcija particije i  $k$  je Bolcmanova konstanta. U kvantnoj mehanici, čestice kao što su elektroni ili fotoni (svetlosni kvanti) su identične (ne mogu se razlikovati). Onda se primenjuju drugačije funkcije raspodele

- (a) Ako čestice imaju polucelobrojni spin, kao u slučaju elektrona, onda se podvrgavaju Fermi Dirakovoj statistici sa funkcijom raspodele

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\zeta)} + 1} \quad (23.44)$$

gde je  $\beta = 1/kT$  i  $\zeta$  je hemijski potencijal. Za  $T \rightarrow 0$ , tj za  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $f(E)$  se ponaša na sledeći način: kada je  $E < \zeta$  eksponencijalna funkcija u (23.44) teži nuli i

$$f(E) = 1 \quad (23.45)$$

Kada je  $E > \zeta$ , eksponencijalna funkcija teži beskonačnosti i

$$f(E) = 0. \quad (23.46)$$

Na proizvoljnoj temperaturi  $T$ ,  $\zeta$  je određeno datim brojem  $N$  čestica preko relacije

$$\int_{E_0}^{\infty} g(E) f(E) dE = N \quad (23.47)$$

gde je  $g(E)$  gustina stanja (2.8) i  $E_0$  je najniža energija čestica.

- (b) Ako čestice imaju celobrojni spin (fotoni, neki atomi i neka jezgra) onda zadovoljavaju Bose-Einstein ovu statistiku sa funkcijom raspodele

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\zeta)} - 1} \quad (23.48)$$

Razmotrajući ponovo granični slučaj niskih temperatura na kojima  $\beta \rightarrow \infty$  nalazimo za  $E < \zeta$  da eksponencijalna funkcija teži nuli i

$$f(E) \rightarrow -1 \quad (23.49)$$

što je u kontradikciji sa definicijom funkcije raspodele, koja ne može biti negativna. Ova kontradikcija se može razrešiti kada se  $\zeta$  ograniči da ide u nulu sa  $T$ . Da bi, u slučaju  $\beta \rightarrow \infty$ , funkcija  $f(E)$  ostala konačna, mora se zahtevati da je  $E < \zeta$ . Nalazimo, prema Einsteinu, da su na vrlo niskim temperaturama sve čestice u istom stanju, koje ima najnižu moguću energiju; ovo stanje se naziva Bose-Einsteinova kondenzacija. Ovo razmatranje nema nikakvih veza sa temperaturom kondenzacije, efektima interakcije između čestica ili sa Heizenbergovim principom neodređenosti. Međutim, postojalo je takmičenje ka otkriću ovog kondenzovanog stanja.

### 23.11. 2. Eksperimentalno otkriće

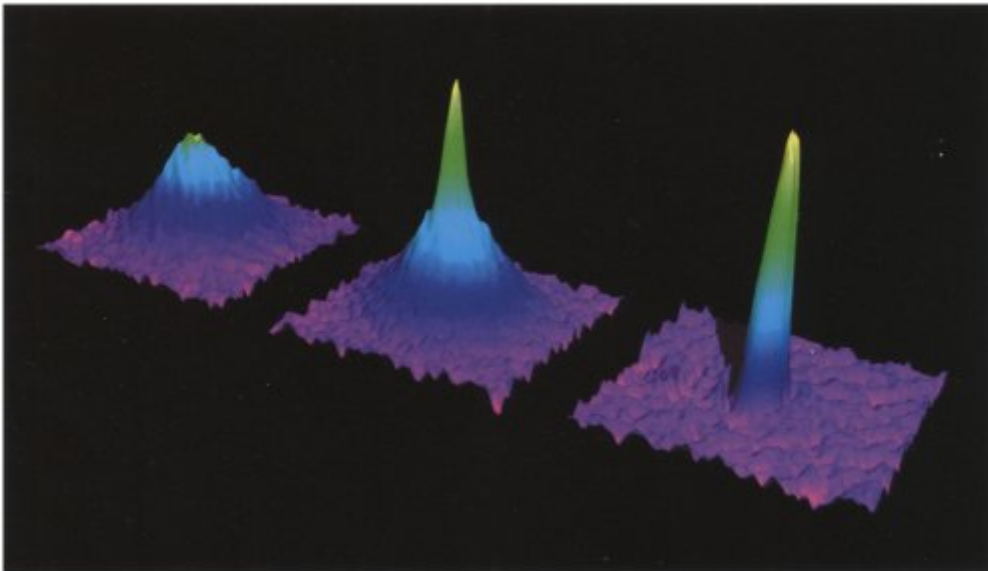
Godine 1995, grupa E.A. Cornell i C.E. Wiemann, je hladila oko 2000 atoma rubidijuma do ispod 100 nK; oni su formirali Bose-Einsteinovu kondenzaciju za oko 10 s. Razmotrimo njihov eksperimentalni set up.

Mali iznos rubidijumove pare je uveden u staklenu ćeliju pod ultraniskim vakuumom. Šest snopova lasera iz laserskih dioda susreću se u centru ćelije; frekvencija lasera je izabrana tako se stvara trap pritiskom zračenja i u istom vremenu događa se efekat laserskog hladjenja atoma (sekcija 22.6). Pored toga, rezonanca atoma je podešavana korišćenjem magnetnog polja tako da apsorbuju uglavnom one fotone koji dolaze izvana prema centru. Na ovaj način, u toku minuta deset miliona atoma se može sakupiti u laserskom trapu i u istom vremenu ohladiti do 40 mikrokelvina. Čak i ovako niska temperatura, kako je kasnije otkriveno, za faktor stotinu veća od one potrebne za formiranje kondenzacije, a dejstvo sa fotonima lasera sprečava dalje hladjenje. Zbog toga su sada laseri ugašeni; atomi su dalje držani u trapu pogodno izabranim, relativno jakim magnetskim poljem- kreću se unutar magnetne potencijalne jame. U njoj oni su predmet hladjenja usled isparavanja jer energetskiji atomi mogu izaći iz nje odnoseći svoju (veću od srednje) energiju. Važan korak je bio konstrukcija uske i duboke jame.

Da bi se odredilo da li je ili nije došlo do Bose Einsteinove kondenzacije napravljeni su snimci senki (shadow snapshot). Mali oblak atoma je teško vidljiv golim okom zbog svojih malih dimenzija; da bi se on proširio, sklonjeno je primenjeno magnetsko polje: nakon jedne desetine sekunde, ćelija je je ugašena (switched off). Atomi koji se kreću u svim pravcima od centra trapa, rasejavaju izvesnu svetlost i i zato imaju senku, koja se

može snimiti video kamerom. Sa slike se može odrediti brzinska raspodela atoma i na taj način se može izmeriti i brzina atoma. Raspodele brzina su reprodukovane na Slici 23.4, gde najviša tačka odgovara najnižoj brzini.

Kondenzovani atomi imaju najniže moguće energetske stanje i zato ostaju kao gusti klaster u centru trapa čak iako je preostali deo atomskog oblaka počeo da se širi. Snimak pokazuje širenje koje potiče od Heisenbergove relacije neodređenosti (Sekcije 7.3 i 7.5). Ova relacija se pojavljuje kao makroskopski fenomen u slučaju Bose-Einsteinove kondenzacije. Nasuprot originalnom Einsteinovom konceptu po kome se kondenzat sastoji od čestica, talasni karakter ima esencijalnu ulogu u opaženoj strukturi. Ketterle i saradnici su u suštini pokazali da kada se dva kondenzovana atomska oblaka preklapaju, onda se opažaju interferencione slike.



*Slika 23.4. Bose-Einsteinova kondenzacija: izmerena raspodela gustine hladnih atoma blizu faznog prelaza u Bose-Einsteinovom kondenzatu. Slika levo je dobijana na temperaturi nešto iznad kritične temperature  $T_C$ , srednja je baš na  $T_C$  a desna slika mnogo ispod  $T_C$ . Svaka slika predstavlja oblast  $600 \times 600 \mu\text{m}$ . Ove slike raspodele gustine su dobijene posle 17 ms balističke ekspanzije atomskog oblaka nakon gašenja magnetskog trapa. (Iz Th. Hansch 1999).*

### **23.11.2. Kvantna teorija Bose-Einsteinove kondenzacije**

Detaljan tretman kvantne teorije Bose-Einsteinove kondenzacije je izvan okvira ove knjige; štaviše nekoliko aspekata je još uvek u fazi razvoja. Nekoliko zapažanja je međutim u redu izneti ovde. Bose-Einsteinove čestice nije moguće razlikovati. Kako su one sve u istom kvantnom stanju, one potpuno gube svoju individualnost i upadaju u zajedničko koherentno stanje. Analogija sa laserskom svetlošću se ovde nameće sama po sebi. Graham i Haken su uporedili proizvodnju laserske svetlosti sa Bose-Einsteinovom kondenzacijom još 1969, a Scully je dalje radio na detaljnijoj analogiji između Bose-Einsteinove kondenzacije i neravnotežnog faznog prelaza laserske svetlosti u 1999.

Kako čestice gube svoju individualnost u kondenzatu, nije veoma iznenađujuće da se ceo kondenzat može opisati jednom talasnom funkcijom koja zavisi samo od jedne

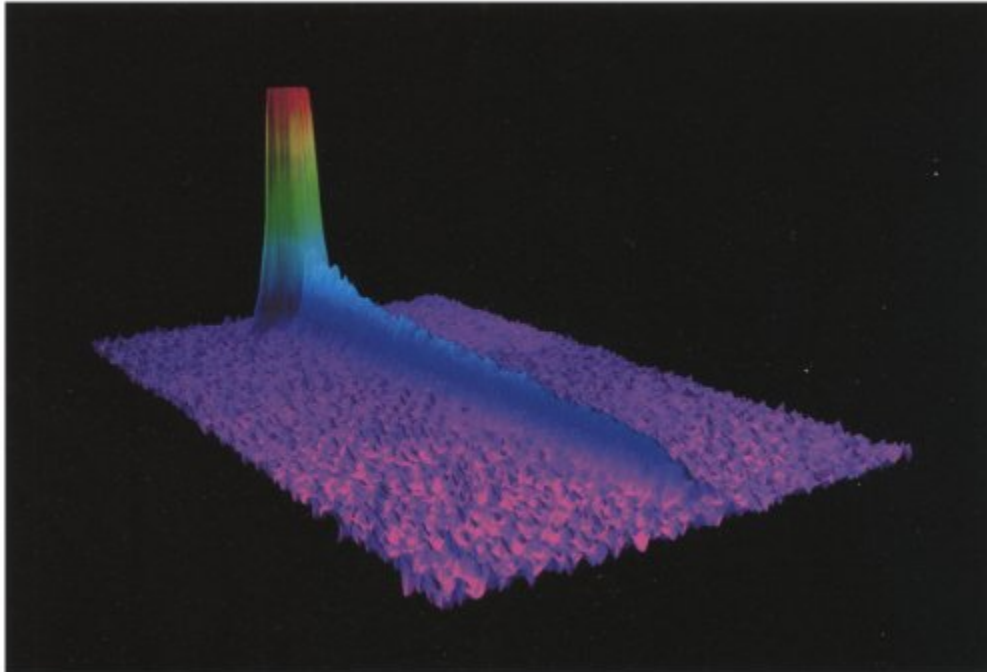
promenjive. Ona zadovoljava Gross-Pitaewskii jednačinu, koja u vremenski nezavisnom slučaju ima oblik

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) + gn(\vec{r}) - \mu \right) \psi(\vec{r}) = 0. \quad (23.50)$$

Ovde je,  $m$  masa čestice,  $V(\mathbf{r})$  je spoljašnji potencijal u kome se kondenzat kreće, i  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ , gde je  $a$   $s$ - dužina između sudara koja opisuje sudaranje između čestica. (Detaljnije objašnjenje: u kvantno mehaničkoj teoriji rasejanja, dolazeća čestica je opisana ravanskim talasom  $a$ , odlazeći talas je superpozicija  $s, p, d$  i dr talasnih funkcija. Na niskim energijama, dovoljno je uzeti u obzir samo  $s$ - parcijalne talase sa odgovarajućom radijalnom zavisnošću talasne dužine). U (23.50)  $n(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2$  je gustina čestica i  $\mu$  je hemijski potencijal. Jednačina (23.50) ima oblik Šredingerove jednačine, koja je međutim nelinearna zbog  $n(\mathbf{r})$  člana. Tako nas (23.50) podseća na Hartree jevu jednačinu (19.59) i korisno je pratiti analogiju koja baca izvesnu svetlost na fizičko značenje (23.50). Spoljašnji potencijal  $V(\mathbf{r})$  u (23.50) odgovara Kulonovom potencijalu jezgra u (19.59) dok je izraz  $gn(\mathbf{r})$  u (23.50) paralelan sa (19.55). Kulonov potencijal između elektrona

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

je potrebno zameniti efektivnim potencijalom interakcije između atoma, tj. rubidijumovim atomima u eksperimentu opisanom gore, gde pretpostavljamo da su svi atomi u njihovim osnovnim stanjima. Tako, rasejavajuća dužina (scattering length)  $a$ , ulazi u problem. Kao dalju aproksimaciju možemo uzeti da gustine  $|\psi_{Q_j}(R_j)|^2$  koje su sve jednake, tj. nezavisne od  $Q_j$  (Bose-Einsteinova kondenzacija), izvan integrala u (19.55) što će dovesti do faktora  $n(\mathbf{r})$  u (23.50). Normalno, naše izvodjenje (23.5) je niti egzaktno, niti detaljno, ali to čini fizički sadržaj jednačine prihvatljivim u smislu Hartree jeve procedure.



*Slika 23.5. Atomski laser: opažena raspodela gustine materijalnog talasa proizvedena atomskim laserom. Koherentni snop atoma, koji se može videti na slici se isteže ka donjem desnom delu, gradjen je od rubidijumovih atoma i potiče od Bose-Einsteinovog kondenzata. Slabo radiofrekventno polje služi kao neprekidni i koherentni mehanizam za izdvajanje atoma iz kondenzata; ono prenosi atome iz magnetski konfinovanog kondenzata u ne konfinovano stanje. Ovi atomi izlaze iz trapa i ubrzavaju se pod dejstvom gravitacije, što rezultuje u stvaranju kolimisanog snopa kakvi do sada nisu bili dostižni. Region pokazan na slici ima dimenzije 1.2 x 2 mm. Usled velike optičke gustine, slika raspodele kondenzata je saturirana (visok pik). (Iz Hansch i saradnici 1999).*

### **23.12. Atomski laser**

U sekciji 23.11 opazili smo analogiju izmedju Bose Einsteinove kondenzacije i laserske svetlosti. Ponašanje kondenzata kao koherentnog talasa postaje jasno u pogledu interferencionog eksperimenta Katerlle-a i dr, pomenutih ranije. Godine 1999, Hansch, Bloch i Esslinger su uspeli u konstrukciji prvog atomskog lasera koji je mogao da radi kontinualno za oko 100 ms, dok je kondenzat bio u korišenju (Slika 23.5).

Glavni problem ovde je popunjavanje kondenzata da bi se omogućilo duže vreme rada. Autori su koristili novi tip magnetskog trapa koji je omogućio korišćenje krajnje stabilnog trap potencijala sa fluktuacijama ispod 100 nT. Ovaj magnetski trap koji se naziva "kvadripolna Ioffe konfiguracija" zahteva samo tri magnetska kalema. Istraživači su koristili magnetno optički trapirane  $^{87}\text{Rb}$  atome, ubacujući ih u magnetske kvadripole i menjajući polje kontinualno u paraboličkoj geometriji Ioffe ovog trapa. Za vreme ovog procesa, trapovani oblak atoma se pokreće prema jednom kalemu, što rezultuje u jakom magnetskom zatvoru (*confimentu*). Trap je ekstremno zaštićen, tako da su magnetsko

polje i njegove fluktuacije iz okoline ispod 10 nT. Kontinualni izlaz se može dobiti samo kada su fluktuacije polja na minimumu; posebno, one moraju biti mnogo manje od varijacije magnetskog trapirajućeg polja preko dijametra oblaka kondenzata. Da bi se proizveo kondenzat, trapirani atomi se dalje hlade evaporacijom izazvanom radiofrekventnim (rf) poljem.

Laserska svetlost je enormno intenzivnija od normalne nekoherentne svetlosti, laserski snop atoma je mnogo intenzivniji nego snopovi konvencionalnih atomskih izvora i u isto vreme mnogo oštrije fokusirani. Prema Hanschu "sjajnost" atomskog lasera je  $2 \cdot 10^{24}$  atoma  $s^{-2}m^{-5}$ . Ovako veliki intenzitet i jaka prostorno vremenska koherencija snopa atomskog lasera dovela nas je do očekivanja novih aplikacija. Među njima su difrakcijom ograničeni atomski snopovi sa dijametrom manjim od 1 nm. Novi atomski interferometri se takodje očekuju i oni će omogućiti merenja sa najvećom preciznošću.

Problemi

23.1. Identificiraj  $|1\rangle, |2\rangle$  sa spinskim funkcijama  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  i  $\psi_k$  sa  $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ . Koja se formula dobija kada se  $|1\rangle, |2\rangle$  odnosi na linearno polarizovanu svetlost  $|\downarrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle$  a  $\psi_k$  na kružno polarisanu svetlost.

23.2. Pokazati da se talasna funkcija

$$\psi(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle) \quad (*)$$

može zapisati kao entangledovoan stanje talasnih funkcija

$$\phi_1(1) = d_1|\downarrow\rangle_1 + d_2|\uparrow\rangle_1, \quad |d_1|^2 + |d_2|^2 = 1, \quad \phi_2(2) = d_2^*|\downarrow\rangle_2 - d_1^*|\uparrow\rangle_2$$

Odgovarajući rezultati takodje važe i za talasne funkcije (23.14) tretirane u tekstu.

*Napomena*

izračunati  $\phi_1(1)\phi_1(2) + \phi_2(1)\phi_2(2)$  koristeći gornje izraze i izvesti jednačinu (\*) odatle.

23..3 Dokazati relaciju (23.25)

23.4. Pokazati da talasne funkcije spina obuhvataju Hilbertov prostor.

23.5. Ubedi se da experiment opisan u sekciji 22.7 se može kosistiti kao *gate*. Kakve uloge imaju fotoni i atom?

23.6. Diskutuj primene experimentata opisanih u sekciji 22.7 u korekciji greške.

*Napomena:*

identifikuj atom sa  $|\uparrow\rangle$  prisutnim fotonom, i  $|\downarrow\rangle$  u slučaju kada nema fotona.