

7. Neke osnovne osobine materijalnih talasa

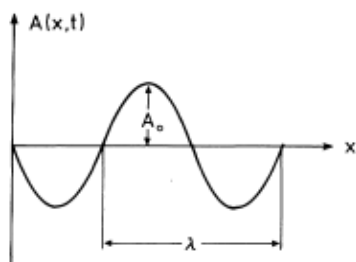
7.1. Talasni paket

U prethodna dva paragrafa pokazano je da svetlost, elektroni i druge elementarne čestice mogu da imaju i talasne i čestične karakteristike. U ovom paragrafu ćemo bliže ispitati kako se talasne osobine materije mogu razumeti i opisati matematički.

I za svetlost i za čestice, postoje osnovne relacije izmedju energije i frekvencije, i izmedju impulsa i talasne dužine, koje su sumirane u sledećim formulama:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Svetlost} & \text{Materija} \\
 E = h\nu & E = h\nu = \hbar\omega \\
 p = \frac{h\nu}{c} & p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k
 \end{array} \quad (7.1)$$

Sada želimo da proširimo ove jednačine u tačniju i bolju teoriju. Studenti su upoznati sa opisom talasnog kretanja iz optike. Ako razmotrimo ravan monohromatski talas (Sl. 7.1) koji putuje u x pravcu, talasna amplituda A u vremenu t u tački x je $A(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$. Talasni broj k je povezan sa talasnom dužinom λ preko $k = 2\pi/\lambda$. Kružna frekvencija ω je povezana sa frekvencijom $\omega = 2\pi\nu$. U mnogim slučajevima korisnije je korišćenje kompleksne notacije, u kojoj se kosinus izražava preko eksponencijalne funkcije prema formuli



Slika 7.1. Talas sa amplitudom A_0 i talasnom dužinom λ .

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \quad (7.2)$$

Razvijemo sada $A(x,t)$:

$$A(x,t) = A_0 \frac{1}{2} [\exp(ikx - i\omega t) + \exp(-ikx + i\omega t)] \quad (7.3)$$

Primenjujući relaciju (7.1) dobija se

$$\exp(ikx - i\omega t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right] \quad (7.4)$$

Talas predstavljen jednačinom (7.4) je beskonačno dug talas. S druge strane, pošto obično pretpostavljamo da su čestice ("tačkaste mase") lokalizovane, moramo da razmotrimo da li možemo superpozicijom dovoljnog broja pogodnih talasa postići neku vrstu koncentrisanog talasa. Nameravamo da formiramo nešto što se zove talasni paket, u kojem je amplituda lokalizovana u izvesnom delu prostora. S ciljem dobijanja ideje kako se takav talasni paket može izgraditi, prvo zamislimo da se superponiraju dva talasa bliskih frekvencija i talasnih brojeva. Imamo dva talasa $A_1(x,t)$ i $A_2(x,t)$ i novi rezultujući talas $A(x,t)$

$$A(x,t) = A_1(x,t) + A_2(x,t) \quad (7.5)$$

ili koristeći kosinusne talase iste amplitude za A_1 i A_2

$$A(x,t) = A_0(\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)) \quad (7.6)$$

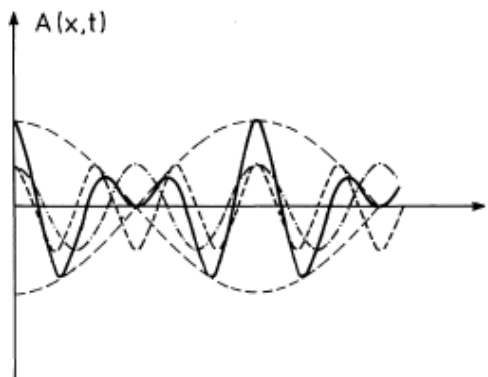
Kao što znamo iz elementarne matematike, desna strana jednačine (7.6) se može izraziti kao

$$2A_0\cos(kx - \omega t) \cdot \cos(\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t) \quad (7.7)$$

gde je $k = (k_1 + k_2)/2$ i $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ i

$$\Delta k = (k_1 - k_2)/2 \text{ i } \Delta \omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$$

Rezultujući talas je shematski prikazan na slici 7.2. Talas je jasno pojačan u nekim oblastima, a oslabljen u drugim.



Slika 7.2. Superpozicija dva talasa iste amplitude. Talas 1: -.-; talas 2 - -. Rezultujući talas _____. Obvojnica talasa $\cos(\Delta kx - \Delta \omega t)$ za konstantno t je prikazana kao isprekidana linija.

Ovo sugerise da bi smo mogli da proizvedemo (stvorimo) potpuno lokalizovan talas superpozicijom više i više kosinusnih talasa. Ovo jeste u stvari i slučaj. Da bi smo videli kako, koristimo kompleksnu prezentaciju. Pretpostavićemo da talasi oblika (7.4) imaju kontinualnu raspodelu talasnih brojeva. Tako, formiramo integral

$$\int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a \exp[i(kx - \omega t)] dk = \psi(x, t) \quad (7.8)$$

gde je uzeto da je a konstantna amplituda.

Pri rešavanju ovog integrala, zapazimo da su ω i k povezani medjusobno, pošto su energija i impuls elektrona povezani relacijom $E = p^2 / (2m_0)$, a to opet znači da su ω i k povezani prema (7.1). Da bi smo procenili ovaj integral uzmimo:

$$k = k_0 + (k - k_0) \quad (7.9)$$

i razvijemo ω oko vrednosti k_0 koristeći Taylorov niz u $(k - k_0)$, koji prekidamo posle drugog člana.

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right) (k - k_0) \quad (7.10)$$

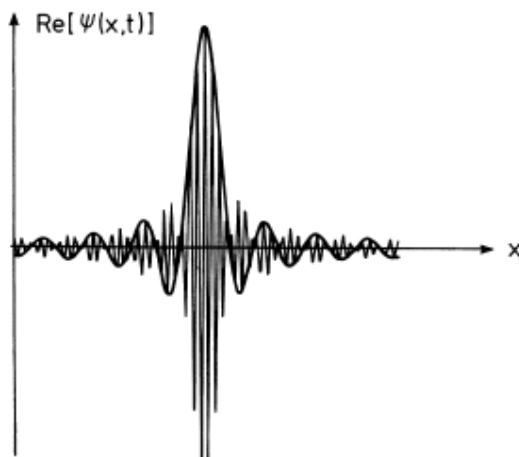
Na dalje uvedimo skraćenicu $d\omega/dk = \omega'$. Umetajući (7.9) i (7.10) u (7.8) dobija se

$$\psi(x, t) = a \exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \exp[-i(\omega' t - x)\xi] d\xi \quad (7.11)$$

gde smo uzeli $(k - k_0) = \xi$. Preostali deo integrala se može rešiti na elementaran način i (7.11) konačno dobija izraz:

$$\psi(x, t) = a \exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)] 2 \cdot \frac{\sin[(\omega' t - x)\Delta k]}{\omega' t - x} \quad (7.12)$$

Realni deo od ψ je prikazan na slici 7.3.

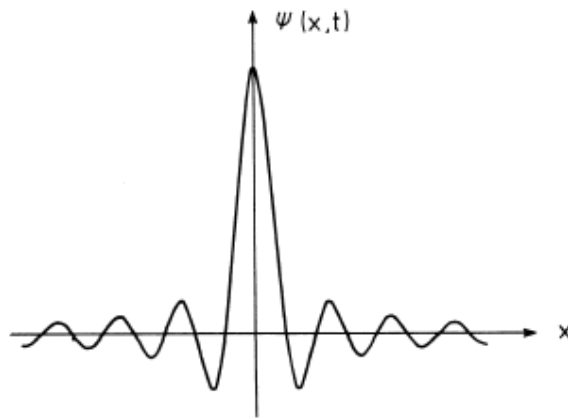


Slika 7.3. Realni deo $\psi(x, t)$ u funkciji položaja. Brze oscilacije su opisane funkcijom $\cos(k_0 x - \omega_0 t)$ za konstantno t . Obvojnica je data sa $[\sin(\omega' t - x)\Delta k] / (\omega' t - x)$ za fiksno t . Zapaziti da je skala po x osi znatno umanjena u odnosu na sliku 7.2.

Odavde se mogu izvući dva važna zaključka

- (1) Talasni paket predstavljen funkcijom ψ je strogo lokalizovan u regionu $x=\omega't$. Maksimalna amplituda se pomera sa brzinom $\omega'=d\omega/dk$. Pomoću jednačine (7.1) možemo da izrazimo ω i k preko E i p , dobijajući za $\omega'=\partial E/\partial p$, ili koristeći standardnu jednačinu $E=p^2/(2m_0)$, konačno $\omega'=p/m_0=v_{\text{čestice}}$. Da bi se razumeo ovaj rezultat potrebno je podsetiti se konceptata fazne i grupne brzine.

Ako dozvolimo da u talasnoj funkciji $\cos(kx-\omega t)$ vreme raste, tada se pozicija x_{max} na kojoj je maksimum, nalazi prema jednačini $kx_{\text{max}}-\omega t=0$, to jest, $x_{\text{max}}=(\omega/k)t$. Onda znači da se položaj maksimuma pokreće brzinom $v_{\text{fazno}}=\omega/k$ koja se naziva fazna brzina.



Slika 7.4. Obvojnica realnog dela talasnog paketa (7.12)
Slika 7.3. Prva nula je na $x_0=\pi/\Delta k$.

Ako zamenimo ω sa E i k sa p , prema (7.1) nalazimo neposredno ova brzina nije jednaka brzini čestice. Na drugoj strani, upravo smo videli da se maksimum talasnog paketa kreće brzinom $v_G=d\omega/dk$. Ova brzina je grupna brzina i to je brzina talasnog paketa. Tako je grupna brzina de Broglie ovih talasa (talasa materije) identična sa brzinom čestice.

Sada možemo da pokušamo da unificiramo talasnu i čestičnu sliku koristeći talasni paket da bi smo opisali kretanje čestice. Ovo na žalost nije moguće jer uopšteno, talasni paket menja svoj oblik u toku vremena. Zbog toga smo prinudjeni da prihvatimo sasvim drugačiji pristup, kao što će se videti kasnije.

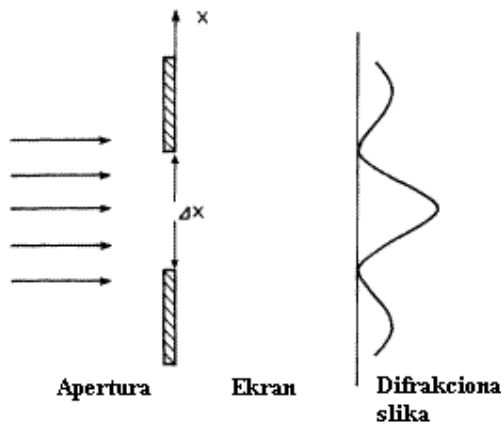
- (2) Druga implikacija rezultata (7.12) je sledeća. Širina talasnog paketa je, grubo, rastojanje izmedju prve dve nulte tačke sa leve i desne strane maksimuma (Sl 7.4). Kako je prva nulta tačka na $x_0=\pi/\Delta k$ širina talasnog paketa bi bila $\Delta x=2\pi/\Delta k$. Što više želimo da suzimo i skoncentrišemo talasni paket, tj. što manjim činimo Δx , tim je veće Δk .

U cilju razjašnjavanja čestičnog i talasnog opisa razmotrićemo eksperiment koji je opisan u sledećoj sekciji kao što smo ranije imali za svetlost.

7.2. Probabilistička (verovatnoćna) interpretacija

Želimo da ilustrujemo, koristeći elektron kao primer, kako se mogu sjediniti talasni i čestični opisi. Da bi se odredila pozicija elektrona u x pravcu (Sl 7.5)

dopustimo da elektronski snop prodje kroz otvor (prorez) širine Δx . Možemo biti sigurni da elektron dolazeći sa leva mora proći kroz ovaj prorez. Sada, međjutim počinju da igraju ulogu talasne osobine, i elektron će difraktovati na prorezu. Difrakciona slika se stvara na ekranu S (Sl. 7.5). Prema talasnoj teoriji, intenzitet difrakcionih traka je proporcionalan kvadratu amplitude. Kada razmatramo elektron kao talas, i uzmemo ψ kao njegovu talasnu funkciju, dobijamo intenzitet $I=|\psi(x,t)|^2$ u vremenu t , i na mestu x na ekranu. Bolje je, i sa matematičke strane, a i zbog fizičkih razloga, da se ne govori o intenzitetu u tački prostora, već pre o intenzitetu u trodimenzionalnoj oblasti dx,dy,dz oko tačke x,y,z .

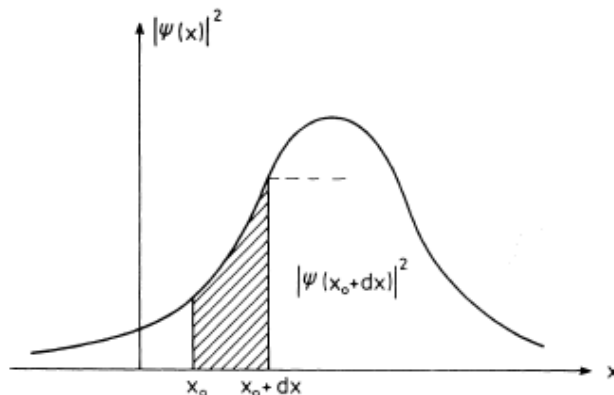


Slika 7.5. Elektronski snop (strelice levo) prolaze kroz otvor i generišu difrakcionu sliku na ekranu. Raspodela intenziteta na ekranu je šematski prikazana na desnom delu slike.

Zato, na dalje ćemo razmatrati intenzitet u zapreminskom elementu $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

$$I dx dy dz = |\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz \quad (7.13)$$

(Uporedi ovo sa jednodimenzionim primerom na Sl. 7.6).



Slika 7.6. $|\psi(x)|^2$ kao funkcija x u trenutku t . Osenčena oblast odgovara verovatnoći da se elektron nađe u intervalu $x_0, x_0 + dx_0$.

Sada dolazi suštinska stvar. Ekran se može smatrati kao aparatura koja detektuje elektrone pojedinačno kao čestice. Fluorescentni ekran svetli u tački udara kad god

bude pogodjen elektronom. Na ovaj način, elektron je dobro lokalizovan i tako nema difrakcione slike. Ako ponovimo eksperiment, opazićemo i druga svetlucanja svetlosti, u drugim tačkama ekrana.

Tek kada se obavi mnogo eksperimenata, ili kad se dozvoli da prodje mnogo elektrona, dobijamo difrakcionu sliku opisanu (7.13). Ovo je ključ objašnjenja “talasno čestičnog dualizma”. Na jednoj strani intenzitet difrakcione slike u zapremini ΔV je proporcionalan kvadratu amplitude

$$|\psi|^2 \Delta V \quad (7.14)$$

a na drugoj, to je proporcionalno verovatnoći nalaženja elektrona u ΔV . $|\psi|^2 \Delta V$ je samo po sebi proporcionalno frekvenciji nalaženja elektrona u ΔV . $|\psi|^2 \Delta V$ se tako mora posmatrati kao verovatnoća nalaženja elektrona u elementu zapremine dV oko x, y, z .

Pošto će statistička interpretacija kvantne mehanike biti često pominjana, i pošto je apsolutno neophodno za razumevanje predmeta, mi ćemo se zadržati nešto duže na konceptu verovatnoće. Uporedimo kvanto mehanički eksperiment sa igrom kocke. Kako kocka ima 6 različitih brojeva na svojim stranama, može se reći, ima 6 različitih eksperimentalnih vrednosti. Mi ne možemo, unapred da kažemo koja će se strana pojaviti, tj. koji će biti eksperimentalni rezultat u svakom pojedinačnom bacanju. Možemo jedino da damo verovatnoću P_n dobijanja vrednosti n . U slučaju kockice, P_n je vrlo lako da se odredi. Prema osnovnim postulatima teorije verovatnoće, suma svih verovatnoća mora biti jedan, (tj, jedna strana se mora pojaviti posle svakog bacanja).

$$\sum_n P_n = 1 \quad (7.15)$$

Kako su svi brojevi $n=1, \dots, 6$ jednako verovatni, šest vrednosti P_n su međusobno jednake, tako da je $P_n=1/6$.

Medjutim, nije tako lako odrediti $|\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz$. Iz prethodnog razmatranja jasno je da mora da postoji neki normalizacioni uslov za $|\psi|^2 dx \cdot dy \cdot dz$. Ako se integrali preko celokupnog prostora, čestica se mora naći negde, tako da ukupna verovatnoća mora biti jednaka 1. Zato pišemo osnovni uslov normiranja

$$\int |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1 \quad (7.16)$$

Ilustrovaćemo korišćenje uslova normiranja u dva primera.

- 1) Pretpostavimo da je elektron zatvoren u kutiji sa zapreminom V . Integracija (7.16) se mora obaviti samo po datoj zapremini. Ako koristimo ψ za talasnu funkciju

$$\psi = A_0 \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x} - i \omega t) \quad (7.17)$$

gde je

$\vec{k} \cdot \vec{x} = k_x x + k_y y + k_z z$, onda A_0 mora biti

$$A_0 = V^{-1/2} \quad (7.18)$$

- 2) Ako se prostor proširi do u beskonačnost, opet ima poteškoća jer je onda $A_0=0$ ako jednostavno dozvolimo da V ide u beskonačnost (prema 7.18). Može se međjutim pokazati da se može izvesti generalisani uslov normiranja talasne funkcije. U jednoj dimenziji normalizovana talasna funkcija je

$$\psi_k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikx - i\omega t) \quad (7.19)$$

a uslov normiranja je

$$\int \psi_k^*(x,t) \psi_{k'}(x,t) dx = \delta(k - k') \quad (7.20)$$

Ovde je δ Dirakova delta funkcija (vidi Appendix A).

Probabilistička interpretacija talasne funkcije je potrebna i iz sledećeg razloga: ako udar elektrona u ekran izaziva svetljenje u više od jedne tačke, to bi značilo da se elektron podelio. Svi eksperimenti su pokazali, da je elektron nedeljiv. Odredjivanje $|\psi|^2 dV$ omogućuje samo predviđanje verovatnoće nalaženja elektrona u toj zapremini. Ako nadjemo elektron u jednoj tački, onda smo sigurni da on nije negde drugde. Ovo je evidentno “da-ne” tvrdjenje i nema dvosmislenosti za pojedinačne elektrone. Ako se razmotri odbijanje elektrona na ovaj način, i opazimo da je 5 % elektrona odbijeno, to znači sledeće: ako obavimo veoma veliki broj eksperimenata, 5 % svih elektrona će se reflektovati. Međjutim, potpuno je pogrešno reći da će, recimo 5 % od jednog elektrona biti reflektovano.

7.3. Heisenberg- ova relacija neodredjenosti

Razmotrimo sada neke implikacije činjenice da elektroni nekad deluju kao čestice, a nekad kao talasi. Kao što smo izračunali ranije jedno dimenzionalna raspodela talasnog paketa je

$$\psi(x) \propto \frac{\sin(x\Delta k)}{x} \quad (7.21)$$

Ako za meru neodredjenosti uzmemo poziciju prve nule onda iz (7.21) dobijamo relaciju

$$\frac{\Delta x}{2} = \frac{\pi}{\Delta k} \quad (7.22)$$

Neodredjenost pozicije je jasno povezana sa neodredjenošću talasnog broja k . Ali talasni broj je povezan sa impulsom preko jednačine

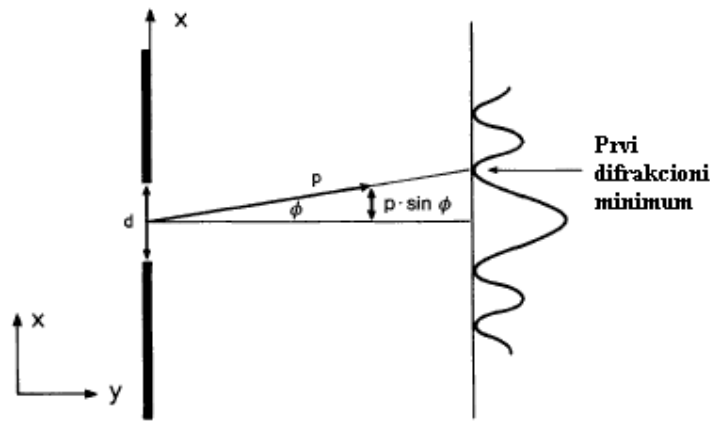
$$p = \hbar k \quad (7.23)$$

Ako ovo zamenimo u (7.22) dobijemo osnovnu *Heisenberg* ovu relaciju neodređenosti

$$\Delta x \Delta p \geq h \quad (7.24)$$

(matematički precizna formulacija i izvodjenje se mogu naći u Dodatku C).

Ova relacija tvrdi da je nemoguće meriti tačno i položaj i impuls elektrona istovremeno. Donja granica istovremene merljivosti je data u (7.24). Zaista, ako dopustimo da Δx teži nuli (tačno određivanje položaja) onda će Δp težiti u beskonačnost, i obratno. Činjenica da ništa ne primećujemo od ovakve relacije neodređenosti u svakodnevnom životu je rezultat malosti Planck-ove konstante, h . Ako pak razmatramo mikrosvet, onda se on može razumeti ako se uzme u obzir konačna vrednost konstante h . Pojasnićemo značenje (7.24) na primeru jednog eksperimenta.



Slika 7.7. Difrakcija talasa na prorezu.

Elektron se kreće u horizontalnom pravcu y . Želimo da odredimo njegove koordinate u normalnom (x) pravcu. Za ovu svrhu, postavimo kolimator normalno na pravac kretanja sa prorezom širine $d = \Delta x$. Ako elektron prodje kroz ovaj otvor, onda znamo njegovu poziciju sa neodređenošću Δx . Sada se mora uzeti u obzir talasna priroda elektrona. Iz teorije difrakcije znamo da talas proizvodi difrakcionu sliku na ekranu nakon prolaska otvora širine d (Sl. 7.7). Ugao Φ na kojem je prvi difrakcioni minimum je dat sa

$$\sin \Phi = \frac{\lambda}{d} \quad (7.25)$$

Ako označimo ukupni impuls elektrona sa p , projekcija impulsa na osu x je $p \sin \Phi$. Ova x komponenta impulsa se stvara difrakcijom elektronskog talasa na otvoru; rezultujuća neodređenost impulsa je onda

$$\Delta p_x = p \sin \Phi \quad (7.26)$$

Ako još jednom iskoristimo relaciju

$$p = \hbar k = \frac{\hbar}{\lambda} \quad (7.27)$$

i postavimo (7.26) i (7.27) u (7.25) opet se dobija *Heisenberg* ova relacija neodređenosti (7.24).

Ovi primeri pokazuju da merenje jedne veličine, ovde položaja, neposredno proizvodi perturbaciju komplementarne veličine, tj. impulsa. Pre postavljanja kolimatora sa otvorom mogli smo da odredimo impuls elektrona. Rezultat je da se elektron kreće tačno u pravcu y ose; tj. komponenta impulsa u x pravcu je tačno jednaka nuli. U gornjem eksperimentu, bili bi smo u mogućnosti da odredimo poziciju sa izvesnom tačnošću, ali moramo da prihvatimo činjenicu da impuls postaje neodređen u x pravcu. Postoji takodje relacija između energije i vremena, koja je analogna sa (7.24).

7.4. Relacija neodređenosti energija-vreme

U talasnoj funkciji $\exp(ikx - i\omega t)$, koja je startna tačka u ovoj glavi, položaj x i vreme t se pojavljuju na simetričan način. Upravo kako smo mogli da načinimo talasni paket, koji pokazuje izvesnu koncentraciju (lokalizaciju) u prostoru, mogli bi smo da napravimo i talasni paket, koji je lokalizovan u vremenu, t, sa nekom neodređenošću Δt . Umesto relacije $\Delta x \Delta k \geq 2\pi$ imamo

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq 2\pi \quad (7.28)$$

Koristeći relaciju $E = \hbar \omega$, nalazimo da je

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \quad (7.29)$$

Ova relacija, koju ćemo diskutovati detaljnije kasnije u knjizi, tvrdi između ostalih stvari, da je potrebno izvesti merenje sa dovoljno dugim trajanjem, ako se želi merenje energije sa dobrom tačnošću u kvantnoj mehanici.

7.5. Neke posledice relacija neodređenosti za vezana stanja

U prethodnim sekcijama ove Glave eksplicitno smo razmatrali slobodne elektrone. U sledećim Glavama bavićemo se eksperimentalnim i teorijskim pitanjima u vezi sa *vezanim* elektronima, na primer u vodonikovom atomu. U ovoj sekciji mi ćemo do izvesne mere anticipirati prezentaciju ostatka knjige. Čitalac će prepoznati čak i u ovoj sekciji da talasna mehanika igra fundamentalnu ulogu u tretmanu vezanih stanja.

Razmatraćemo vodonikov atom kao najprostiji slučaj vezanog stanja. Pretpostavimo da elektron putuje oko jezgra po orbiti, kao što planete putuju oko sunca. Zašto elektronska ljuska ima konačne dimenzije - zašto postoji najmanja elektronska orbita- to su bili nerešivi problemi klasične fizike.

Energija elektrona je jednaka sumi kinetičke i potencijalne energije

$$E_{\text{klas}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \quad (7.30)$$

Ako izrazimo kinetičku energiju čestice $E_{\text{kin}} = (m_0/2)v^2$ preko impulsa, p, i zamenimo Kulonovu potencijalnu energiju $-e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$ za potencijalnu energiju, u izraz za e, dobija se

$$E = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7.31)$$

Ovde je r rastojanje elektrona od jezgra.

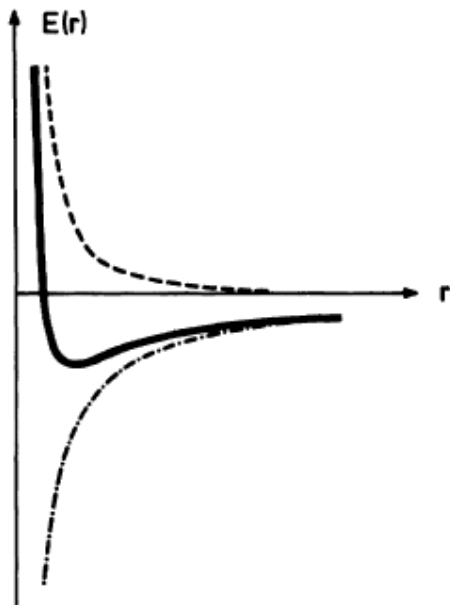
Može se pokazati u klasičnoj mehanici da je $E_{\text{klas}} = -e^2/(2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r)$.

Ako pustimo r da teži nuli, energija prirodno ide u $-\infty$. Drugim rečima energija opada kontinualno i nema minimalne orbite. Razmotrimo sada izraz (7.31) sa "naivnog" stanovišta kvantne mehanike. Orbita bi značila da smo elektron skoncentrisali na rastojanju r od jezgra. Poziciona neodređenost bi zato bila reda r . Neodređenost impulsa p , je onda h/r , koja opet ustanovljava minimalni red veličine kinetičke energije. Ako zato zamenimo

$$p \approx \frac{h}{r} \quad (7.32)$$

u (7.31), dobijamo iz izraza za minimalnu energiju

$$E = \frac{1}{2m_0} \frac{h^2}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{Min} \quad (7.33)$$



Slika 7.8. Ova slika pojašnjava konkurenciju između kinetičke i potencijalne energije u funkciji rastojanja $r \leftrightarrow$ poziciona neodređenost u atomu vodonika, na osnovu Heisenbergove relacije neodređenosti. (-.-) potencijalna energija, (- -) kinetička energija, (—) ukupna energija = suma potencijalne i kinetičke energije. Vidi se energetski minimum kao rezultat.

i vidimo da minimalna energija nije više na $r=0$. Ako pustimo da r teži nuli, kinetička energija bi porasla vrlo brzo. Ostavljamo određivanje minimuma (7.33) čitaocu kao jednostavnu vežbu diferenciranja i rezultat dajemo neposredno. Radijus je

$$r = \frac{h^2 4\pi\epsilon_0}{m_0 e^2} \quad (7.34)$$

Ako zamenimo r u (7.33) odgovarajuća energija je

$$E = -\frac{1}{2} \frac{e^4 m_0}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \quad (7.35)$$

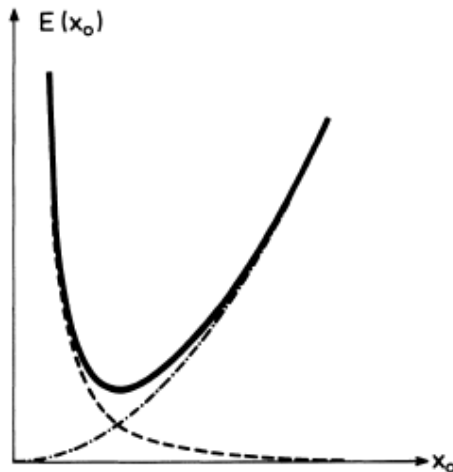
Kada zamenimo poznate numeričke vrednosti Planck ove konstante i mase i naelektrisanja elektrona, dobijamo radijus od 10^{-8} cm, koje je red veličine vodonikovog atoma. Kasnije ćemo videti da egzaktno kvantno mehaničko računanje energije daje

$$E = -\frac{1}{2} \frac{e^4 m_0}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \quad (7.36)$$

Jedina razlika između (7.35) i (7.36) je što je faktor $\hbar = h/2\pi$ zamenio faktor h .

Heisenbergov princip neodređenosti takođe omogućuje proračun takozvane nulte tačke energije harmonijskog oscilatora. Ovde razmotrimo kretanje čestice vezane elastičnom silom sa konstantnom f . Kako elastična energija raste kvadratično sa pomerajem x , i kinetička energija opet ima formu $p^2/2m$, ukupna energija je

$$E = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{fx^2}{2} \quad (7.37)$$



Slika 7.9. Ilustracija kompeticije između kinetičke i potencijalne energije kao funkcija pomeraja ↔ položaja neodređenosti u harmonijskom oscilatoru. (-.-) potencijalna energija, (- -) kinetička energija, (—) ukupna energija = suma potencijalne i kinetičke energije. Klasični energetska minimum na $x_0=0$ je pomeren ka nekoj konačnoj vrednosti.

U klasičnoj fizici ova energija je na minimumu kada su obe veličine, i impuls i pozicija na nuli, tj. kad je čestica u miru. Međutim, pošto prema Heisenberg ovoj relaciji, tačna pozicija znači beskonačni impuls, moramo da dozvolimo neodređenost pozicije do izvesne mere kao na primer do amplitude x_0 i onda imamo neodređenost impulsa prema (7.24), gde x_0 ima ulogu r (Sl. 7.9). Ponovo postavljamo uslov da je ukupna energija minimalna na x_0

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_0 x_0^2} + \frac{f x_0^2}{2} = \text{Min} \quad (7.38)$$

Diferencirajući i rešavajući jednačinu po x_0 dobijamo amplitudu harmonijskog oscilatora,

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{m_0 f}} \quad (7.39)$$

Energija ima oblik

$$E = \hbar\omega \quad (7.40)$$

Kao što ćemo videti kasnije tačan kvantno mehanički račun dovodi do relacije

$$E = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (7.41)$$

i

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_0\omega}} \quad (7.42)$$

Sledi iz ovih razmatranja da su atomske, elastično vezane čestice fundamentalno u nemogućnosti da budu u miru. Takvi elastično vezani parovi se događaju na primer u kristalnoj rešetki. Kvantna teorija predviđa da ovi atomi stalno nose oscilacije nulte tačke.

Problemi

7.1. Normalizovati talasni paket

$$\psi(x,t) = N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k^2}{2(\Delta k)^2}} e^{i[kx - \omega(k)t]} dk$$

za $t = 0$. Onda izračunati $\psi(x,t)$ za slobodnu česticu mase m_0 za $t > 0$. Da li normalizacija važi i za $t > 0$? Na osnovu verovatnoće zauzetosti, reši da li talasni paket može da ode daleko. Kakvo je značenje izraza

$$e^{-\frac{k^2}{2(\Delta k)^2}}$$

Napomena. Koristi relaciju

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2 - b\xi} d\xi = e^{b^2/(4a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a[\xi + b/(2a)]^2} d\xi$$

Drugi integral se može konvertovati u Gausovski integral smenom koordinata.

7.2. Pogodnim izborom Δk u problemu 7.1. omogućiti da je verovatnoća lociranja talasnog paketa izvan $\Delta x = 10^{-8}$ cm jednaka nuli. Koliko je vremena potrebno da Δx dostigne rastojanje između zemlje i sunca (150 miliona km)?

Napomena: Izaberi Δx tako da je $\psi(\Delta x, 0) = 1/e$

7.3. Tretirati probleme 7.1 i 7.2 u tri dimenzije.