

Институт за математика
М. Милошевић

24. 08. 2017.

05 630/4 - -

Наставно-научном већу Природно-математичког факултета и Већу

за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу

На седници Наставно-научног већа Природно-математичког факултета у Крагујевцу одржаној 14.06.2017. године (број одлуке 440/IX-1) и на седници Већа за природно-математичке науке одржаној 12.07.2017. године (број одлуке IV-01-704/13) одређени смо за чланове Комисије за подношење извештаја о оцени научне заснованости и испуњености услова кандидата мр Душана Ђукића за израду докторске дисертације „Унутрашњост скраћених усредњених гаусовских квадратура и оцена грешке Гаус-Кронродових квадратура“. На основу приложене документације Комисија подноси следећи

Извештај о оцени научне заснованости теме и испуњености услова кандидата за израду докторске дисертације

1. Научни приступ проблему предложеног нацрта докторске дисертације и процена научног доприноса крајњег исхода рада

Нумеричка анализа, још општије нумеричка математика, се на почетку развијала у оквирима класичне математике, на пример у радовима Њутна, Лагранжеа, Ојлера и других, кад год би се неки проблем решавао приближно. У наше време она се издвојила у посебну грану математике. Приближна израчунавања воде ка тачним када се грешка смањује, чему све више доприноси интезиван развој рачунарске технике која доприноси решавању задатака нумеричке математике. Посебан део нумеричке анализе је нумеричка интеграција којој припада тема ове докторске дисертације кандидата мр Душана Ђукића. Формуле за приближна израчунавања одређених интеграла су квадратурне формуле, а међу њима оне најефикасније, са максимално могућим степеном прецизности су Гаусове квадратурне формуле или квадратуре. У последња два века оне се интезивно истражују. 1969. године је објављен метод за њихову ефикасну и нумерички стабилну конструкцију у раду Голуба и Велча (Mathematics of Computation). За практичну оцену грешке Гаусових квадратурних формула показало се да су од посебног значаја формуле које је увео шездесетих година прошлог века руски инжењер и математичар Кронрод, касније назване Гаус-Кронродовим квадратурним формулама. Овим формулама посвећена су многа истраживања у последњих 50-60 година. За те формуле које имају позитивне тежинске коефицијенте и реалне чворове конструисане су стабилне нумеричке процедуре конструкције, тако да је од посебног значаја питање егзистенције позитивних Гаус-Кронродових квадратура. Још раније је показано да у случају неограничених интервала и класичних тежинских функција такве формуле не постоје. У последње време је неегзистенција доказана и у случајевима интервала коначне дужине од стране аустријског математичара Персторфера и његових сарадника. Тако се јавља потреба за конструкцију алтернатива Гаус-Кронродових квадратурних формула. Једна таква алтернатива је предложена у виду усредњених квадратурних формула Гаусовог типа, које су уведене у радовима Лорија и Спалевића, објављеним у часопису Mathematics of Computation. Посебно су од интереса са становишта једноставне нумеричке конструкције усредњене квадратуре које је увео Спалевић (Mathematics of Computation, 2007), јер захтевају готово исти нумерички напор за конструкцију као и стандардне Гаусове квадратурне формуле. Кандидат мр Душан Ђукић планира у својој дисертацији испитивање скраћених усредњених

квадратурних формула, њихово коришћење за практичну оцену грешке стандардних Гаусових квадратура. Како је примена ових (као и других) квадратурних формула немогућа у случају не мале класе подинтегралних функција које нису дефинисане ван интервала интеграције, ако квадратурна формула има чворова који не припадају интервалу интеграције, значајно питање којим ће се у дисертацији бавити кандидат мр Душан Ђукић је питање унутрашњости (интерналности) скраћених усредњених гаусовских квадратура. Истраживање је базирано како на класичним знањима математике, тако на савременим методама теорије апроксимација, нумеричке анализе, нумеричке интеграције, посебно теорије усредњених квадратура која се развија у последњем периоду. У једном сегменту свог истраживања и рада кандидат мр Душан Ђукић ће истраживати оцене грешака у Гаус-Кронродовим квадратурама са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама када је интегранд функција аналитичка унутар области која је ограничена конфокалним елипсама, док је одговарајућа проблематика када је интегранд функција аналитичка на круговима решен раније у раду грачког математичара Нотариса који је објављен у часопису *Numerische Mathematik*, 2006. године. Процена крајњег исхода истраживања и рада на овој дисертацији је да ће се добити ефикасне оцене грешке Гаусових квадратурних формула за широку класу мера коришћењем скраћених гаусовских квадратурних формула, и ефикасне оцене грешке Гаус-Кронродових квадратура.

2. Образложење предмета, метода и циља који уверљиво упућују да је предложена тема од значаја за развој науке

Предмет истраживања је унутрашњост свих чворова у скраћеним усредњеним Гаусовским квадратурама и оцена грешке у Гаус-Кронродовим квадратурама са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама, за подинтегралне функције аналитичке у унутрашњости конфокалних елипси која садржи интервал интеграције. Немачки математичар Карл Фридрих Гаус је 1814. године увео интерполациону квадратурну формулу, са максимално могућим степеном прецизности, за приближну интеграцију, користећи резултате свог рада из 1812. године о хипергеометријским развојима. Та је квадратурна формула касније по њему добила назив Гаусова квадратурна формула и заузела је централно место у нумеричкој интеграцији, развијана је у разним правцима и истраживана са разних аспеката математике (теорије апроксимација, теорије мере, функционалне анализе, итд.) и нумеричке конструкције применом разних софтвера. Проблематика истраживања Гаусових квадратура је веома актуелна и данас. 1969. године је предложен стабилан нумерички метод конструкције Гаусових квадратура од стране математичара Голуба и Велча. Њихов рад је публикован у познатом часопису АМС-а (Америчко Математичко Друштво) *Mathematics of Computation*. С друге стране веома интересантан проблем је оцена остатка у Гаусовим квадратурним формулама. Једну врло занимљиву методу предложио је 1964. године руски математичар и инжењер Кронрод, уводећи, касније назване по њему, Гаус-Кронродове квадратуре. Тако је настала теорија Гаус-Кронродових квадратура, које су често називане квадратурама 20. века. У последње време се испоставило да Гаус-Кронродове квадратуре, са реалним чворовима и позитивним тежинским коефицијентима, које се могу ефикасно конструисати не постоје у многим случајевима, па су тражене њихове алтернативе. Једна од њих је предложена од проф. Спалевића 2007. године у виду усредњених оптималних гаусовских квадратурних формула. Испоставило се да ове формуле постоје у многим случајевима када не постоје Гаус-Кронродове формуле и да је њихова нумеричка конструкција веома једноставна и ефикасна. Када број чворова расте у овим формулама оне на коначним интервалима попримају особине Гаус-Кронродових квадратурних формула. Предности усредњених оптималних гаусовских квадратура доказиване су последњих година,

у сарадњи и истраживању проф. Спалевиха са познатим светским нумеричаром из САД Лотаром Реикелом, као и млађим сарадницима са обе стране. Циљ овог рада, истраживања, је да се испита када сви чворови скраћених усредњених Гаусовских квадратурних формула припадају интервалу интеграције. То је један од услова примене датих квадратура, посебно у случајевима када је подинтегрална функција дефинисана само на интервалу интеграције. Проблематика је посебно третирана за класичне тежинске функције Јакобијевог типа на коначним интервалима, те Лагеровог типа на неограниченим интервалима. Ове формуле се користе за практичну оцену грешке одговарајуће Гаусове квадратурне формуле. Циљ истраживања је и да се добију ригорозне оцене грешке у Гаус-Кронродовим квадратурним формулама са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама, за аналитичке интегранде на конфокалним елипсама. Добијене оцене биће упоређене са стварном грешком, али и са оценама које је за интегранде аналитичке на круговима који садрже интервал интеграције добио грчки математичар Нотарис.

Основне хипотезе од којих се полази у истраживању базиране су на томе да би скраћена квадратура усредњене квадратуре гаусовог типа на основу методе како се конструише морала имати све чворове, изузев евентуално првог и последњег, унутар интервала интеграције. Она се конструише познатим поступком Голуб-Велча за Гаусове квадратуре примењеним на скраћену Јакобијеву матрицу добијену од Јакобијеве матрице усредњене гаусовске квадратуре. Када је у питању добијање ефективних оцена грешке Гаус-Кронродових квадратура са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама, за аналитичке интегранде на конфокалним елипсама, полазимо од хипотеза да ће се максимум модула језгра достићи у тачкама пресека координатних оса са конфокалним елипсама, што ће нам дати могућност једноставног одређивања максимума модула и формула за оцену грешке.

У истраживању ће се користити разне математичке методе истраживања, специјално методе математичке анализе, нумеричке анализе, те још специјалније методе нумеричке интеграције, теорије апроксимација, које ће делом бити имплементирани и подржане, чија ће ефикасност бити проверена експериментима, у програмском систему МАТЛАБ. Позната процедура Голуб-Велча за нумерички стабилну конструкцију гаусових квадратурних формула биће коришћена и у конструкцији усредњених гаусовских квадратура и њихових скраћивања. Следећи истраживања аустријског математичара Персторфера о позитивним и Спалевиха о усредњеним гаусовским квадратурама, долазимо до метода за конструкцију скраћених усредњених Гаусовских квадратурних формула, те до аналитичких формула за полиноме на којима су ове базиране. То нам омогућава испитивање унутрашњости (интерналности) ових формула. Користе се познате формуле за коефицијенте у трочланим рекурентним релацијама за одговарајуће ортогоналне полиноме. У Гаус-Кронродовим квадратурама за аналитичке интегранде грешка се може изразити у облику контурних интеграла језгра по конфокалним елипсама, и њена горња оцена се своди на ограничавање овог језгра. Методологија је базирана на оној која је за Гаусове квадратуре са класичним Чебишевљевим тежинским функцијама представљена у раду Гаучија и Варге публикованом у водећем часопису за ову област *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1983. године. Значајну улогу има експлицитно одређивање језгра за Бернштајн-Сегеове тежинске функције, као и испитивање тачака на елипси у којима је оно максимално. Овим се под нешто другачијим претпоставкама и на контурама у облику кружница бавио грчки математичар С. Нотарис.

3. Образложење теме за израду докторске дисертације које омогућава закључак да је у питању оригинална идеја или оригиналан начин анализирања проблема

Скраћене усредњене гаусовске квадратурне формуле су нове квадратуре које ће се по први пут увести у математичку литературу. Уопштено, усредњене гаусовске квадратуре су нова класа квадратура која се истражује у последњих десетак година, оне су од практичног значаја јер се користе за оцену грешке у Гаусовим квадратурним формулама. Скраћене усредњене квадратуре су нове формуле, посебно се третирање њихове унутрашњости јавља први пут у овом истраживању. За Гаус-Кронродове квадратурне формуле са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама а за аналитичке интегранде на конфокалним елипсама по први пут се истражују оцене грешке у овој дисертацији. Комисија закључује да је предложена тема „**Унутрашњост скраћених усредњених гаусовских квадратура и оцена грешке Гаус-Кронродових квадратура**“ кандидата мр Душана Ђукића оригинална.

4. Усклађеност дефиниције предмета истраживања, основних појмова, предложене хипотезе, извора података, метода анализе са критеријумима науке уз поштовање научних принципа у изради коначне верзије докторске дисертације

Кандидат мр Душан Ђукић ће у изради коначне верзије докторске дисертације обухватити све елементе савременог научно-истраживачког рада поштујући основне критеријуме математичке науке и научних принципа. Усклађеност свих сегмената истраживања, па и овог истраживања, у оквиру математике као егзактне науке се подразумева, јер само на тај начин истраживање ће водити ка валидним научним резултатима. Добијени резултати ће бити верификовани у познатим светским научним часописима за нумеричку и примењене математике, као и изложени на неколико научних скупова.

5. Предложени ментор израде докторске дисертације

Институт за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Карагујевцу је за ментора ове дисертације предложио проф. др Миодрага Спалевића, редовног професора Машинског факултета Универзитета у Београду. Проф. др Миодраг Спалевић се бави истраживањима у научној области нумеричка анализа, посебно у њеном делу нумеричка интеграција, има публиковане радове у реномираним научним часописима и већи број саопштења на међународним и националним конференцијама.

6. Научна област дисертације

Предложена докторска дисертација припада научној области Математика, ужој научној области Нумеричка анализа.

7. Научна област чланова комисије

Чланови Комисије се баве истраживањима у области Нумеричке анализе и имају публиковане радове у реномираним научним часописима. Др Миодраг Спалевић је редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду, ужа научна област: Математика и рачунарство. Др Марија Станић је ванредни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Математичка анализа са применама. Др Александар Пејчев је доцент Машинског факултета Универзитета у Београду, ужа научна

област: Математика и рачунарство.

8. Кратка биографија кандидата

Душан Љ. Ђукић је рођен 31. маја 1981. у Београду. Од 1995. до 1999. је похађао Математичку гимназију у Београду и на Међународним математичким олимпијадама освојио једну златну и две сребрне медаље. Дипломирао је 2003. на Математичком факултету у Београду на смеру теоријске математике са просечном оценом 9,86. Године 2016. је одбранио магистарски рад на Универзитету И. Сарајево на тему "Брзо растуће функције". Активно учествује у припремању ученика и састављању задатака за математичка такмичења у земљи и свету. Ради као асистент на Катедри за математику Машинског факултета Универзитета у Београду.

9. Преглед научно-истраживачког рада кандидата

Кандидат мр Душан Ђукић је у досадашњем раду показао интересовање, самосталност и способност за научно-истраживачки рад у области нумеричке анализе, а посебно нумеричке интеграције, теорије апроксимација и математичке анализе. До сада има објављена или прихваћена за штампу 4 рада са SCI листа, три категорије M21 и један категорије M22, те један рад у националном часопису категорије M51, два саопштења на скуповима међународног значаја штампана у изводу M34, што укупно чини 7 библиографских јединица.

Библиографија кандидата:

Научни радови објављени у научним часописима међународног значаја (M20):

- [1] **D.Lj. Djukić**, L. Reichel, M.M. Spalević, Truncated generalized averaged Gauss quadrature rules, J. Comput. App. Math. 308 (2016) 408-418. ISSN: 0377-0427; IF(2016)=1.357; M21
- [2] **D.Lj. Djukić**, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, The error bounds of Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type, Numer. Algor., прихваћено за штампу. DOI: 10.1007/s11075-017-0351-8. ISSN: 1017-1398; IF(2015)=1.366; M21
- [3] **D.Lj. Djukić**, L. Reichel, M.M. Spalević, J. Tomanović, Internality of generalized averaged Gauss rules and their truncations for Bernstein-Szego weights, Electron. Trans. Numer. Anal. (ETNA) 45 (2016) 405-419. ISSN: 1068-9613; IF(2016)=0.925; M22
- [4] **D.Lj. Djukić**, Z. Kadelburg, S. Radenović, Fixed points of Geraghty-Type mappings in various generalized metric spaces, Abstract Appl. Anal. Vol. 2011 (2011), Article ID 561245, 13 pgs. ISSN: 1085-3375; IF(2011)=1.318; M21a

Научни радови објављени у научним часописима националног значаја (M50):

- [1] **D.Lj. Djukić**, Lj. Paunović, S. Radenović, Convergence of iterates with errors of uniformly quasi-Lipshizian mappings in cone metric spaces, Krag. J. Math. ISSN: 1450-9628; M51

Саопштења на међународним скуповима штампана у изводу (M34):

- [1] **D.Lj. Djukić**, L. Reichel, M.M. Spalević, Generalized averaged Gaussian quadratures with modified matrices, Mathematical Conference of Republic of Srpska, Pale, Bosnia and Herzegovina, May 21-22, 2016
- [2] **D.Lj. Djukić**, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, The error bounds of Gauss-Kronrod quadrature

ЗАКЉУЧАК

Кандидат мр Душан Ђукић је студент докторских академских студија математике на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу. У досадашњем раду је показао изузетно интересовање за научно-истраживачки рад и изузетно висок степен одговорности и способности решавања постављених му научних задатака, висок степен самосталности у решавању истих.

Досадашњи резултати научно-истраживачког рада кандидата рада везани за предложену тему докторске дисертације објављени су у два рада категорије М21 (радови [1], [2] у часописима међународног значаја, из библиографије кандидата), што мр Душана Ђукића препоручује као кандидата способног да одговори на њоме планиране задатке.

На основу анализе предложеног плана и програма истраживања, избора методологије и очекиваних резултата истраживања, Комисија сматра да предложена тема за докторску дисертацију мр Душана Ђукића јесте актуелна и веома важна. Планирано је истраживање скраћених усредњених гаусовских квадратурних формула и њихове интерналности, како би се омогућила њихова примена за класе интеграла који су дефинисани на интервалу интеграције. Тако ће бити омогућена оцена остатка у одговарајућим стандардним Гаусовим квадратурним формулама. За Гаус-Кронродове квадратурне формуле са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама које се примењују на интегранде аналитичке у области конфокалних елипси које садрже интервал интеграције биће предложене ефикасне оцене грешака. Сви теоријски резултати биће подржани нумеричким резултатима, добијеним у великом броју експеримената. Добијени резултати ће бити од користи у многим гранама науке и технике где се користе Гаусове квадратуре, за чију оцену грешке се могу користити методе које се изучавају у овој дисертацији.

Комисија је мишљења да кандидат Душан Ђукић испуњава све услове који су неопходни за пријаву теме за израду докторске дисертације и да ће успешно реализовати сва планирана истраживања. **За ментора докторске дисертације предлагемо проф. др Миодрага Спалевића.**

Коначно, Комисија са задовољством предлаже Научно-наставном већу Природно-математичког факултета у Крагујевцу и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу да позитивно оцене подобност кандидата мр Душана Ђукића и научну заснованост теме његове докторске дисертације и одобре му израду докторске дисертације под називом „**Унутрашњост скраћених усредњених гаусовских квадратура и оцена грешке Гаус-Кронродових квадратура**“.

У Београду и Крагујевцу

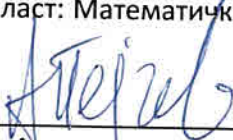
Комисија:



Др Миодраг Спалевић, редовни професор, **ментор рада**
Машински факултет, Универзитет у Београду
Ужа научна област: Математика и рачунарство



Др Марија Станић, ванредни професор, **председник комисије**
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Ужа научна област: Математичка анализа са применама



Др Александар Пејчев, доцент
Машински факултет, Универзитет у Београду
Ужа научна област: Математика и рачунарство