УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Марјан Матејић

РАЗВОЈ РАЦИОНАЛНИХ АЛГОРИТАМА ЗА КОНСТРУКЦИЈУ ОРТОГОНАЛНИХ ПОЛИНОМА ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Докторска дисертација

Крагујевац, 2016.

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I. Аутор
Име и презиме: Марјан Матејић
Датум и место рођења: 03.08.1977. године, Ниш
Садашње запослење: асистент на Електронском факултету у Нишу
II. Докторска дисертација
Наслов: Развој рационалних алгоритама за конструкцију ортогоналних полинома једне променљиве
Број страница: 92
Број слика: 14
Број библиографских података: 71
Установа и место где је рад израђен: Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу, Крагујевац
Научна област (УДК): Математика (Нумеричка анализа, УДК 51)
Ментор: др Градимир В. Миловановић, редовни члан САНУ
III. Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 18.01.2016. године
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:
Комисија за оцену подобности теме и кандидата: 1. др Градимир В. Миловановић, редовни члан САНУ 2. др Александар С. Цветковић, редовни професор Машинског факултета у Београду 3. др Марија П. Станић, ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу 4. др Татјана В. Томовић, доцент Природно-математичког факултета у Крагујевцу
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: 1. др Александар С. Цветковић, редовни професор Машинског факултета у Београду 2. др Марија П. Станић, ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу 3. др Татјана В. Томовић, доцент Природно-математичког факултета у Крагујевцу
Датум одбране дисертације:

Садржај

Листа слика

Листа табела

Предговор

"Although this may seem a paradox, all exact science is dominated by the idea of approximation."

"Може се чинити парадоксално што свом егзактном науком доминира идеја апроксимације."

Бертранд Расел[1]

Предмет ове дисертације су ортогонални полиноми на реалној правој. Полиноми једне промењливе у великој мери прожимају класичну нумеричку анализу. Полиномска апроксимација један је од најприроднијих приступа реконструкцији функција на основу коначног скупа информација. У широкој палети нумеричких метода полиноми имају улогу помоћних функција. Карактеристични полиноми успостављају мостове математике са инжењерским дисциплинама. Још неке традиционалне области интензивне примене јесу ортогонални развоји (генерализовани Фуријеови редови), нумеричка интеграција (квадратурне формуле) и различите гране физике и механике. Нешто мање позната је веза ортогоналних полинома са Падеовом апроксимацијом. Новија, савремена истраживања из теорије вероватноће и стохастичких процеса, теорије графова, кодирања, итд., такође се ослањају на знања из области ортогоналних полинома.

Класични ортогонални полиноми, као што су Лежандрови, Лагерови, Ермитови и други, имају широку примену у свим областима науке и инжењерства. Док је теорија класичних ортогоналних полинома развијена у доброј мери, шира класа полинома и даље остаје непознаница у вези рачунских аспеката као и примене. Полиноми ортогонални у односу на нестандардне тежине и мере имају много мање примећену примену. Разлог овоме је у бројним тешкоћама које прате њихово нумеричко генерисање.

[1]Bertrand Russell (1872–1970), британски математичар и филозоф.

Конструкција ортогоналних полинома је прилично једноставна када је експлицитно позната трочлана рекурентна релација. Утврђивање непознатих чланова рекурентне релације је само по себи веома тежак проблем. Интересантно је да је њему у литератури придавано мало пажње, нарочито у раздобљу пре компјутера. Највероватније да је томе допринело постојање теоријског решења, датог формулом преко Хенкелових детерминаната. Овакав приступ носи претерану рачунску цену и велику нумеричку нестабилност приликом конструкције рекурзивних коефицијената. Последњих четврт века значајан напредак постигнут је на овом плану, како у методама везаним за израчунавања некласичних ортогоналних полинома тако и у њиховој новој примени.

Нумеричко израчунавање је веома важан алат приликом тестирања идеја и хипотеза у многим истраживањима. Примарни циљ експерименталне математике је унапређење теоријског знања. Експериментални резултати могу дати смернице, да подстакну или охрабре даље изучавање. У области истраживања некласичних ортогоналних полинома, експериментална истраживања су у великој мери олакшана постојањем специјализованих програмских пакета развијаних у Matlab и Wolfram Mathematica софтверима. Даљи развој конструктивне теорије ортогоналних полинома је у чврстој спрези са ажурирањем и унапређењем оваквих специјализованих пакета.

Из свих наведених разлога изучавање особина ортогоналних полинома чини се прикладно, у најмању руку. Пракса показује да решавање проблема конструкције некласичних ортогоналних полинома доводи врло брзо до њихове примене, чак и на нестандардне начине. Даљи развој конструктивне теорије и истраживање рачунских и софтверских аспеката некласичних система ортогоналних полинома, несумњиво ће унапредити њихову примену. Такође, није превише очекивати ни зачетке неких потпуно нових научних дисциплина произашлих из сличних истраживања.

Ова дисертација резултат је вишегодишњег изучавања конструктивне теорије некласичних ортогоналних полинома вођена ментором академиком Градимиром Миловановићем и уз блиску сарадњу са професором Александром Цветковићем. Дисертација је организована у четири главе.

Прва глава је прегледног карактера и састоји се од четири поглавља. У њој је разматран општи концепт полинома ортогоналних у односу на линеарну функционелу дефинисану на простору алгебарских полинома. Дат је кратак преглед основних резултата теорије ортогоналних полинома на реалној правој. Како се значајан део дисертације бави изучавањем полинома ортогоналних у односу на модификоване Чебишевљеве мере, то је посебно поглавље прве главе посвећено Чебишевљевим полиномима.

На крају ове главе дати су основни методи за конструкцију ортогоналних полинома.

Друга глава посвећена је модификационим алгоритмима. Простор је дат резултатима рада на проблему утицаја појединих модификација тежинске функције на коефицијенте трочлане рекурентне релације. Развијен је оригинални рационални алгоритам за квадратну Кристофелову модификацију тежине и примењен је на генерисање полинома ортогоналних у односу на неке модификоване мере.

Трећа глава бави се искључиво изучавањем полинома ортогоналних у односу на модификоване Чебишевљеве мере прве и друге врсте. За ове некласичне тежине као оригинални резултат добијени су коефицијенти трочлане рекурентне релације у аналитички затвореном облику.

У четвртој глави дат је преглед основних резултата из квадратурних процеса, будући да је то област директне примене теорије ортогоналних полинома. У другом поглављу четврте главе испитивани су потребни и довољни услови позитивне дефинитности неких линеарних функционела дефинисаних на скупу алгебарских полинома. Посматрана је и стандардна L^2-апроксимација. Примене модификационог алгоритма представљеног у другој глави на полиномску L^2-апроксимацију са ограничењима, налазе се на крају.

Нумерисање свих дефиниција, теорема, лема, примера, слика и табела извршено је према редном броју поглавља у којем се јављају и редоследу јављања у оквиру самог поглавља.

Списак коришћене или цитиране литературе, који се састоји од 71 референце, дат је на крају дисертације.

Овом приликом посебно желим да се захвалим свом ментору, академику Градимиру Миловановићу, на помоћи, личном ангажовању и сталном стручном надзору. Такође, велику захвалност дугујем др Александру Цветковићу, јер је сарадња са њим била од пресудне важности за настанак ове дисертације. На крају захваљујем се колегама са Катедре за математику Електронског факултета у Нишу на несебичној помоћи, разумевању и стрпљењу.

Ниш, јун 2016. Марјан Матејић

Глава 1

Основна теорија ортогоналних полинома на реалној правој

1.1 Увод

Изучавање ортогоналних полинома, њихова конструкција, анализа и примена, представља једну од класичних грана примењене математике. Назнаке теорије можемо пратити све до Лежандра[1], у његовом проучавању кретања небеских тела. Формална теорија почиње анализом Стилтјесових[2] верижних разломака. Свој допринос области дали су многи велики математичари, од Бернулија[3] до Ердеша[4].

Као и све специјалне функције, ортогонални полиноми су и својим пореклом и развојем тесно везани за практичну примену. Због тога их представљамо као моћан алат високе технологије. Значај истраживања ове класичне теме огледа се у импресивном броју импликација и примена тих истраживања како у примењеној математици тако и у многим другим областима науке. Споменућемо тек неке значајније: теорија оператора, нумеричка анализа, верижни разломци и теорија бројева, комбинаторика, теорија графова, стохастички процеси, статистика, теорија интегралних и диференцијалних једначина, динамички системи, теорија података, компјутерска томографија, електростатика, електротехника, обрада дигиталних сигнала, теорија филтара, квантна механика, нуклеарна физика, физика чврстог стања, теоријска хемија и др.

[1] Adrien Marie Legendre (1752–1833), француски математичар и физичар.
[2] Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894), дански математичар.
[3] Jacob Bernoulli (1655–1705), швајцарски математичар.
[4] Pál Erdős (1913–1996), математичар мађарског порекла.

Управо широка примена ортогоналних полинома разлог је сталног интересовања истраживача за ову област. Развој постојећих и нових научних области веома често је у тесној спрези са ширењем теоријског знања из области ортогоналних полинома. У новије време посебан подстицај истраживањима примењене математике, уопште, дао је развој моћних компјутерских система способних за извођење симболичких израчунавања (*Mapple*, *Mathematica* и сл.). То у изузетној мери смањује неопходност рада папир-оловка, те су модерни компјутерски системи постали незамењљиви у савременим научним истраживањима.

Теорија ортогоналних полинома развија се у два правца: алгебарски и аналитички. Сваки од два аспекта теорије тиче се одговарајућих карактеристика ортогоналних полинома развијаних у оквиру одређене дисциплине, алгебре или анализе. Највећи број генералних резултата теорије ортогоналних полинома припада двема областима: ортогонални полиноми на реалној правој и на јединичном кругу $K[0,1] = \{z \,\big|\, |z| = 1\}$. Широка палета резултата последица је интензивне примене, нарочито класичних ортогоналних полинома, као и специјалних погодних особина самих скупова $\mathbb{R}$ и $K[0,1]$.

У дисертацији бавићемо се простором полинома реалне промењљиве x над пољем комплексних бројева, у ознаци $(\mathcal{P}, \mathbb{C})$. Са $\mathcal{P}_n$ означавамо скуп свих алгебарских полинома степена не већег од n над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$, а одговарајући линеаран простор са $(\mathcal{P}_n, \mathbb{C})$. Аналогно $(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ и $(\mathcal{P}_n, \mathbb{R})$ означаваће одговарајуће линеарне просторе алгебарских полинома над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$. Ознака $\widehat{\mathcal{P}}_n$ резервисана је за скуп моничних полинома.

Дефиниција 1.1.1 Нека је m_n, $n \in \mathbb{N}_0$, низ комплексних бројева и нека је $\mathcal{L}$ функција са комплексним вредностима дефинисана на скупу свих алгебарских полинома са

$$\mathcal{L}\left(x^n\right) = m_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\mathcal{L}\left(\alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x)\right) = \alpha_1 \mathcal{L}(P_1(x)) + \alpha_2 \mathcal{L}(P_2(x))$$

за све комплексне бројеве α_1, α_2 и све полиноме $P_1(x), P_2(x)$. Тада се $\mathcal{L}$ зове момент-функционела дефинисана низом момената m_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Број m_n је момент реда n.

Линеарна функционела $\mathcal{L}$ јединствено је одређена низом момената m_k, $k \in \mathbb{N}_0$. За произвољни полином $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ имамо

$$\mathcal{L}(P(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k m_k.$$

Дефиниција 1.1.2 Нека је дата линеарна функционела $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$. Низ полинома P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, је низ полинома ортогоналних у односу на $\mathcal{L}$ ако и само ако важи:

(1) полином P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, је степена k,

(2) $\mathcal{L}(P_k P_l) = M_l \delta_{kl}, \quad M_l \neq 0, \quad k, l \in \mathbb{N}_0,$

где је δ_{kl} Кронекерова делта.

Низ полинома P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, је ортонормиран ако је полином P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, степена k и важи

$$\mathcal{L}(P_k P_l) = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{N}_0.$$

У наставку дајемо преглед познатих, битнијих тврђења за карактеризацију низа ортогоналних полинома (видети [11] нпр.). Наведена тврђења користићемо и у теоријским извођењима датим у наредним поглављима дисертације.

Теорема 1.1.1 *Нека је $\mathcal{L}$ момент-функционела и P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, низ полинома. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

1° *низ P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, је низ полинома ортогоналних у односу на $\mathcal{L}$;*

2° *$\mathcal{L}(\pi P_k) = 0$ за сваки полином π степена $l < k$ и $\mathcal{L}(\pi P_k) \neq 0$ за $l = k$;*

3° *$\mathcal{L}(x^l P_k) = M_k \delta_{lk}$, где је $M_k \neq 0$, $l = 0, 1, \ldots, k$.*

Теорема 1.1.2 *Нека је P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, низ полинома ортогоналних у односу на функционелу $\mathcal{L}$. Тада се сваки полином $\pi(x)$ степена n може представити у облику*

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

где су коефицијенти c_k дати са

$$c_k = \frac{\mathcal{L}(\pi P_k)}{\mathcal{L}(P_k^2)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Теорема 1.1.3 *Ако су P_k и Q_k, $k \in \mathbb{N}_0$, два низа полинома ортогоналних у односу на исту функционелу $\mathcal{L}$, тада постоје бројеви $c_n \neq 0$ тако да је*

$$Q_n(x) = c_n P_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема 1.1.4 *За дати низ полинома P_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ортогоналних у односу на функционелу $\mathcal{L}$, одговарајући ортонормирани низ гласи*

$$p_n(x) = \left(\mathcal{L}(P_n^2(x))\right)^{-1/2} P_n(x).$$

У општем случају квадратни корени који се јављају у претходном изразу не морају бити реални бројеви. Међутим, у највећем броју примера из праксе ортогоналних полинома важи управо $\mathcal{L}(P_n^2(x)) > 0$ и у том случају $p_n(x)$ је јединствено одређен условом да је водећи коефицијент позитиван.

Низ полинома ортогоналних у односу на дату линеарну функционелу у општем случају не мора да постоји. Линеарне функционеле $\mathcal{L}$ које генеришу низове ортогоналних полинома се називају регуларне или квази-дефинитне (видети [11, стр. 11], [46, стр. 96], [16]). Регуларност функционеле $\mathcal{L}$ је веома битно питање. Наредна тврђења дају одговор.

Теорема 1.1.5 *Нека је $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ линеарна функционела. Означимо са Δ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, следеће детерминанте*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_k \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{k+1} \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots & m_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_k & m_{k+1} & m_{k+2} & \cdots & m_{2k} \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.1}$$

где су m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, моменти функционеле $\mathcal{L}$. Низ полинома P_k ортогоналних у односу на $\mathcal{L}$ постоји ако и само ако је

$$\Delta_k \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Детерминанте Δ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, називамо Хенкеловим[5] детерминантама. Ова теорема, иако у потпуности решава егзистенцију низа ортогоналних полинома, у пракси је скоро неупотребљива за њихово израчунавање. Само у неким специјалним случајевима детерминанте Δ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, можемо одредити аналитички. Као илустрацију наведимо да у [41], која се бави аналитичким израчунавањем вредности детерминаната, за детерминанте Хенкеловог типа аутор саветује да се прегледа литература о ортогоналним полиномима како би се евентуално тражена детерминанта препознала међу већ израчунатим Хенкеловим детерминантама. Углавном, могућност израчунавања детерминанте Δ_k у затвореном облику је неопходна за постојање аналитичких резултата за одговарајућу класу ортогоналних полинома. Овде под појмом аналитичко решење подразумевамо решење које јесте аналитичко али такође има и разумну комплексност.

Пример 1.1.1 Као илустрацију наводимо пример линеарне функционеле

$$\mathcal{L}(P) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x, \quad P \in \mathcal{P}.$$

[5]Hermann Hankel (1839–1873), немачки математичар.

Моменти дате функционеле су дати са $m_k = \Gamma((k+1)/2)/(k\Gamma(k/2))$, $k \in \mathbb{N}_0$. Вредности првих неколико Хенкелових детерминаната су

$$\Delta_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Delta_1 = \frac{\pi^2 - 8}{8\pi}, \quad \Delta_2 = \frac{9\pi^2 - 88}{1152\sqrt{\pi}},$$
$$\Delta_3 = \frac{131072 - 33264\pi^2 + 2025\pi^4}{16588800\pi^2}.$$

Како ред детерминанте расте, изрази постају све компликованији. Лако се може закључити да о аналитичком изразу за вредности Хенкелових детерминаната тешко да и има смисла говорити јер би такви аналитички изрази били превише сложени.

Дефиниција 1.1.3 Линеарна функционела $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ је позитивно-дефинитна ако и само ако је $\mathcal{L}(P) > 0$ за сваки полином P који је ненегативан за свако реално x и није идентички једнак нули.

Следећа теорема даје карактеризацију позитивно-дефинитних линеарних функционела.

Теорема 1.1.6 *Линеарна функционела $\mathcal{L}$ је позитивно-дефинитна ако и само ако су вредности Хенкелових детерминаната Δ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, позитивне и моменти функционеле $\mathcal{L}$ реални.*

Теорема 1.1.7 *Ако је линеарна функционела $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ позитивно-дефинитна, онда низ ортогоналних реалних полинома, у смислу дефиниције 1.1.2, постоји.*

Најважнији случај линеарне функционеле $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ је линеарна функционела која је дефинисана преко интеграла. Нека је $\mathrm{d}\mu$ мера, таква да је сваки полином $\mathrm{d}\mu$-интеграбилан, тада је са

$$\mathcal{L}(P) = \int P \,\mathrm{d}\mu, \quad P \in \mathcal{P}, \tag{1.2}$$

задата линеарна функционела која слика полиноме на скуп комплексних бројева. Важи и обрат.

Теорема 1.1.8 *Нека је m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, произвољан низ комплексних бројева. Онда постоји функција ϕ ограничене варијације на $\mathbb{R}$, таква да важи*

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \mathrm{d}\phi = m_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ако је линеарна функционела задата са (1.2), онда је она позитивно-дефинитна под условом да је мера $\mathrm{d}\mu$ позитивна.

Код многих мера које се јављају у применама, дистрибуција μ је апсолутно непрекидна функција. Тада се функција $w(x) = \mu'(x)$ зове тежинска функција. У том случају меру $\mathrm{d}\mu$ можемо представити у облику $\mathrm{d}\mu = w(x)\mathrm{d}x$, где је $w(x)$ ненегативна функција, мерљива у Лебеговом[6] смислу на $\mathbb{R}$, за коју сви моменти m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, постоје и $m_0 > 0$. У том случају уместо $p_n(\,\cdot\,;\mathrm{d}\mu)$, $\pi_n(\,\cdot\,;\mathrm{d}\mu)$, $\alpha_n(\,\cdot\,;\mathrm{d}\mu)$, итд. пишемо редом $p_n(\,\cdot\,;w)$, $\pi_n(\,\cdot\,;w)$, $\alpha_n(\,\cdot\,;w)$.

Тачка x_0 је тачка раста функције ϕ ако и само ако је за свако $\varepsilon > 0$

$$\phi(x_0+\varepsilon) - \phi(x_0-\varepsilon) > 0.$$

Иначе, скуп тачака раста се још назива и носачем функције ϕ (видети [11, стр. 51], [12]). Носач функције ϕ, мере μ, означавамо са $\mathrm{supp}(\phi)$, $\mathrm{supp}(\mu)$, редом. Носач мере $\mathrm{supp}(w)$ је интервал који може бити коначан, полу-бесконачан или бесконачан. Ако је $\mathrm{supp}(w) = [a,b]$, где је $-\infty < a < b < +\infty$, тада кажемо да је w тежинска функција на $[a,b]$.

За сваку задату линеарну функционелу $\mathcal{L}$ можемо дефинисати скаларни производ на $\mathcal{P}$.

Дефиниција 1.1.4 *Под $\mathcal{L}$-скаларним производом $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}} : \mathcal{P}^2 \to \mathbb{C}$ подразумевамо следећи израз*

$$\langle P,Q\rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(PQ), \quad P,Q \in \mathcal{P}.$$

У случају када је $\mathcal{L}$ позитивно-дефинитна, онда је $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}}$ прави скаларни производ на $(\mathcal{P},\mathbb{R})$ јер он верификује све аксиоме скаларног производа (видети [43, стр. 52], [66, стр. 71], [53, стр. 86]).

Дефиницијом скаларног производа на унитарним просторима $\langle P,Q\rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(P\overline{Q})$, добијамо природну екстензију позитивне-дефинитности са $(\mathcal{P},\mathbb{R})$ на $(\mathcal{P},\mathbb{C})$.

У дисертацији користићемо ознаке $p_n(\,\cdot\,;w)$ и $\pi_n(\,\cdot\,;w)$ редом за ортонормиране полиноме, односно моничне ортогоналне полиноме на (a,b) у односу на тежинску функцију w. Интервал (a,b) зове се интервал ортогоналности.

[6] Henri Lebesgue (1875–1941), француски математичар.

1.1.1 Трочлана рекурентна релација

Трочлана рекурентна релација представља једноставну и ефикасну процедуру за рекурзивно генерисање низа ортогоналних полинома. Она је од суштинске важности у конструктивној теорији ортогоналних полинома. Полазна је основа за извођење особина низа ортогоналних полинома. Помоћу коефицијената трочлане рекурентне релације једноставно одређујемо ортогоналне полиноме, њихове изводе, линеарне комбинације, захтевајући познавање само линеарног низа параметара. Ова релација је карактеристика полинома на реалној правој, док се у општем случају ситуација компликује.

Теорема 1.1.9 *Нека је $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ регуларна линеарна функционела и нека је π_k, $k \in \mathbb{N}_0$ низ моничних полинома ортогоналних у односу на $\mathcal{L}$. Тада постоје низови α_k, $\beta_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, такви да важи*

$$\pi_{k+1} = (x - \alpha_k)\pi_k - \beta_k \pi_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.3}$$

и $\pi_{-1} = 0$. Ако је функционела $\mathcal{L}$ позитивно-дефинитна, онда је $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\beta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, а β_0 може бити произвољно.

Обрнуто тврђење ове теореме је чувена Фавардова[7] теорема (видети [22], [11, стр. 21].)

Теорема 1.1.10 *Нека су α_k и β_k, $k \in \mathbb{N}_0$, два произвољна комплексна низа и нека су полиноми π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, дефинисани са*

$$\pi_{k+1} = (x - \alpha_k)\pi_k - \beta_k \pi_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

где је $\pi_{-1} = 0$ и $\pi_0 = 1$. Тада постоји јединствена линеарна функционела $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ таква да важи

$$\mathcal{L}(1) = \beta_0, \quad \mathcal{L}(\pi_k \pi_\nu) = 0, \quad k \neq \nu, \ k, \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Функционела $\mathcal{L}$ је регуларна и π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, је одговарајући низ моничних ортогоналних полинома ако и само ако је $\beta_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Штавише, $\mathcal{L}$ је позитивно-дефинитна и π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, је одговарајући низ моничних ортогоналних полинома ако и само ако је $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, и $\beta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

[7] Jean Favard (1902–1965), француски математичар.

Верзија Фавардове теореме у случају када је линеарна функционела $\mathcal{L}$ задата интегралом гласи:

Теорема 1.1.11 *Нека је за произвољна два низа комплексних бројева α_k и β_k, $k \in \mathbb{N}_0$, дефинисан низ моничних полинома π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, помоћу*

$$\pi_{k+1} = (x - \alpha_k)\pi_k - \beta_k \pi_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

где је $\pi_0 = 1$ и $\pi_{-1} = 0$. Тада постоји функција ϕ ограничене варијације на $\mathbb{R}$, таква да важи

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_n \pi_k \mathrm{d}\phi = \delta_{nk} \prod_{\nu=1}^{n} \beta_\nu, \quad k, n \in \mathbb{N}_0.$$

Функција ϕ може бити реална ако и само ако су $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Функција ϕ може бити неопадајућа са неограниченим бројем тачака раста ако и само ако је $\alpha_k \in \mathbb{R}$ и $\beta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

На скупу регуларних функционела ова тврђења су еквивалентна. Надаље ћемо се у дисертацији бавити искључиво регуларним функционелама.

Везу између низа момената m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, и коефицијената α_k и β_k, $k \in \mathbb{N}_0$ трочлане релације (1.3), за регуларну функционелу $\mathcal{L}$, даје следећа теорема (видети [11, стр. 19]).

Теорема 1.1.12 *Означимо са Δ'_n, $n \in \mathbb{N}_0$, детерминанте*

$$\Delta'_n = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1} & m_{n+1} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n & m_{n+2} \\ m_2 & m_3 & \cdots & m_{n+1} & m_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n-1} & m_{2n+1} \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

Уколико је $\Delta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, онда важи

$$\alpha_n = \frac{\Delta'_n}{\Delta_n} - \frac{\Delta'_{n-1}}{\Delta_{n-1}}, \quad \beta_n = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.5}$$

где је $\Delta'_{-1} = 0$, $\Delta_{-1} = \Delta_{-2} = 1$, а Δ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, су Хенкелове детерминанте дате изразом (1.1).

Детерминанте Δ'_n, $n \in \mathbb{N}_0$, називамо модификованим Хенкеловим детерминантама. оне представљају минор елемента на позицији $(n+1, n)$ Хенкелове детерминанте Δ_{n+1}.

У наставку наводимо и неке једноставне особине коефицијената трочлане рекурентне релације ([15, стр. 10–11]).

Теорема 1.1.13 1° *Ако низ моничних ортогоналних полинома задовољава услов* $\pi_n(z) = (-1)^n \overline{\pi_n(-\overline{z})}$, $n \in \mathbb{N}_0$, *онда је* $\mathrm{Re}(\alpha_k) = \mathrm{Im}(\beta_k) = 0$.

2° *Ако је регуларна линеарна функционела* $\mathcal{L}$, *са низом моничних ортогоналних полинома* π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, *задата на следећи начин*

$$\mathcal{L}(P) = \int_{-a}^{a} P(x)\omega(x)\mathrm{d}x, \quad P \in \mathcal{P}, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

при чему важи $\omega(x) = \overline{\omega(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$, *онда је* $\pi_n(z) = (-1)^n \overline{\pi_n(-\overline{z})}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

3° *Ако је регуларна линеарна функционела* $\mathcal{L}$, *са низом моничних ортогоналних полинома* π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, *задата на следећи начин*

$$\mathcal{L}(P) = \int_{-a}^{a} P(x)\omega(x)\mathrm{d}x, \quad P \in \mathcal{P}, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

при чему важи $\omega(x) = -\overline{\omega(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$, *онда је* $\pi_n(z) = (-1)^{n+1} \overline{\pi_n(-\overline{z})}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Коефицијенти релације (1.3), α_k и β_k, јављају се у Јакобијевом[8] верижном разломку повезаном са мером $\mathrm{d}\mu$

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{z-x} \sim \frac{\beta_0}{z-\alpha_0-}\frac{\beta_1}{z-\alpha_1-}\cdots,$$

који је познат као Стилтјесова трансформација мере $\mathrm{d}\mu$. За n-ти конвергент овог верижног разломка важи

$$\frac{\beta_0}{z-\alpha_0-}\frac{\beta_1}{z-\alpha_1-}\cdots\frac{\beta_{n-1}}{z-\alpha_{n-1}} = \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)}, \tag{1.6}$$

где су σ_n такозвани придружени полиноми дефинисани са

$$\sigma_k(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_k(z) - \pi_k(x)}{z-x}\,\mathrm{d}\mu(x), \quad k \geq 0.$$

Придружени полиноми задовољавају исту трочлану рекурентну релацију као и полиноми $\pi_k(x)$. Наиме, важи

$$\sigma_{k+1}(z) = (z-\alpha_k)\sigma_k(z) - \beta_k\sigma_{k-1}(z), \quad k \geq 0,$$

уз почетне вредности $\sigma_0(z) = 0$, $\sigma_{-1}(z) = -1$.

[8]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), немачки математичар.

Функција друге врсте

$$\varrho_k(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_k(x)}{z-x}\,\mathrm{d}\mu(x)\,, \quad k \geq 0,$$

при чему z не припада носачу мере $\mathrm{d}\mu$, такође задовољава исту трочлану рекурентну релацију (1.3) и представља њено минимално решење, нормализовано са $\varrho_{-1}(z) = 1$.

Рационална функција (1.6) има просте полове у нулама $z = t_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, n$, полинома $\pi_n(x)$. Ако са $\lambda_{n,k}$ означимо одговарајуће резидууме функције $\sigma_n(z)/\pi_n(z)$ у овим половима, тј.

$$\lambda_{n,k} = \lim_{z \to t_k^{(n)}} (z - t_k^{(n)}) \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = \frac{1}{\pi_n'(t_k^{(n)})} \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n(x)}{x - t_k^{(n)}}\,\mathrm{d}\mu(x), \tag{1.7}$$

тада за верижни разломак (1.6) важи развој

$$\frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n,k}}{z - t_k^{(n)}}\,.$$

Ортонормирани полиноми p_k, $k \in \mathbb{N}_0$, задовољавају нешто другачију рекурентну релацију у односу на (1.3) (видети [46, стр. 101]), пре свега јер им је у општем случају водећи коефицијент различит од 1. За њих важи

$$xp_k(x) = \sqrt{\beta_{k+1}}\, p_{k+1}(x) + \alpha_k p_k(x) + \sqrt{\beta_k}\, p_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.8}$$

где је $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = 1/\sqrt{\beta_0}$. Коефицијенти трочлане рекурентне релације (1.8) основа су теорије Јакобијевих оператора (видети одељак 1.1.2). О овој формули и њеној примени биће више речи у наредном одељку.

Једна од важних последица трочлане рекурентне релације (1.8) је Кристофел[9]-Дарбуова[10] формула дата у следећем тврђењу.

Теорема 1.1.14 *Нека је p_k, $k \in \mathbb{N}_0$, низ ортонормираних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Тада је*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(t) = \sqrt{\beta_{n+1}}\, \frac{p_{n+1}(t)p_n(x) - p_n(t)p_{n+1}(x)}{t-x}. \tag{1.9}$$

[9] Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), немачки математичар.

[10] Jean Gaston Darboux (1842–1917), француски математичар.

Узимајући граничну вредност када $t \to x$ у (1.9) добијамо

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)^2 = \sqrt{\beta_{n+1}}\,\left(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)\right). \tag{1.10}$$

Функција

$$\lambda_n(x) = \lambda_n(x; \mathrm{d}\mu) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)^2\right)^{-1} \tag{1.11}$$

зове се Кристофелова функција.

1.1.2 Нуле ортогоналних полинома

Понашање нула ортогоналних полинома заокупља пажњу још од 1886. године, са првим радовима из области Маркова[11] и Стилтјеса. Разлози интересовања леже у великом значају нула ортогоналних полинома за практичну примену. Позната је интерпретација нула Јакобијевих, Лагерових[12] и Ермитових[13] полинома у електростатици. Изузетну улогу имају као чворови Гаусових[14] квадратурних формула. Кључну улогу играју у доказима неких класичних неједнакости. Захваљујући њима развијене су многе моћне аналитичке и дискретне технике. Споменућемо само Штурмову[15] теорему поређења за нуле решења диференцијалних једначина другог реда, Маркову теорему о монотоности нула ортогоналних полинома у зависности од природе тежинске функције. Из свих тих разлога битно је познавати геометрију нула ортогоналних полинома и њихове експлицитне изразе, када је то могуће.

Нуле ортогоналних полинома позитивно-дефинитних функционела показују нека веома правилна својства, исказана у наредним тврђењима (видети [11], [46]).

Претпоставимо да је $\mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu)$ ограничен и обележимо са $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu))$ најмањи затворен интервал који садржи $\mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu)$.

Теорема 1.1.15 *Све нуле полинома $P_n(x) = P_n(x; \mathrm{d}\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, су реалне и различите и леже у унутрашњости интервала* $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu))$.

[11] Андрей Андреевич Марков (1856–1922), руски математичар.
[12] Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886), француски математичар.
[13] Charles Hermite (1822–1901), француски математичар.
[14] Carl Friedrich Gauss (1777–1855), немачки математичар.
[15] Jacques Charles Francois Sturm (1803–1855), швајцарски математичар.

Теорема 1.1.16 *Нека су $t_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$, нуле полинома $P_n(x; \mathrm{d}\mu)$ у растућем поретку, тј. $t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)}$. Нуле полинома P_n и P_{n+1} се међусобно раздвајају, тј. важи:*

$$t_k^{(n+1)} < t_k^{(n)} < t_{k+1}^{(n+1)}, \quad k = 1, \dots, n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Следећа теорема може се наћи у [71].

Теорема 1.1.17 *Нека је дато $2n+1$ произвољних реалних бројева $t_k^{(n)}$ и $t_k^{(n+1)}$ тако да је $a < t_k^{(n+1)} < t_k^{(n)} < t_{k+1}^{(n+1)} < b$, $k = 1, \dots, n$. Тада постоји низ моничних полинома $\pi_k(x)$, $\mathrm{st}(\pi_k) = k$, $k \in \mathbb{N}_0$, ортогоналних на $[a, b]$ таквих да је $\pi_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - t_k^{(n)})$ и $\pi_{n+1}(x) = \prod_{k=1}^{n+1}(x - t_k^{(n+1)})$.*

Као што је већ напоменуто у претходном одељку, ортонормирани полиноми p_k, $k \in \mathbb{N}_0$, задовољавају рекурентну релацију

$$x p_k(x) = \sqrt{\beta_{k+1}}\, p_{k+1}(x) + \alpha_k p_k(x) + \sqrt{\beta_k}\, p_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

где је $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = 1/\sqrt{\beta_0}$. Узимајући $k = 0, 1, \dots, n-1$, преко следећег система једначина успоставља се веза спектралне теорије и нула ортогоналних полинома:

$$x\mathbf{p}_n(x) = J_n(\mathrm{d}\mu)\mathbf{p}_n(x) + \sqrt{\beta_n}\, p_n(x)\mathbf{e}_n, \tag{1.12}$$

где су

$$J_n(\mathrm{d}\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{p}_n(x) = \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тродијагонална матрица $J_n = J_n(\mathrm{d}\mu)$ назива се Јакобијева матрица.

Монични полиноми $\pi_n(x)$ имају представљање преко Јакобијеве матрице у облику

$$\pi_n(x) = \det(xI_n - J_n),$$

где је I_n јединична матрица реда n.

Теорема 1.1.18 *Нуле $t_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$, полинома $p_n(x; \mathrm{d}\mu)$ су сопствене вредности тродијагоналне Јакобијеве матрице $J_n(\mathrm{d}\mu)$ реда n. Одговарајући сопствени вектори гласе $\mathbf{p}_n(t_k^{(n)})$, $k = 1, \dots, n$.*

Овом теоремом је испитивање спектралних својстава Јакобијевих оператора сведено на утврђивање особина мере $\mathrm{d}\mu$ на основу трочлане рекурентне релације.

Вредности Кристофелове функције (1.11) у нулама $t_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$, ортогоналног полинома $P_n(x; \mathrm{d}\mu)$, тј. бројеви

$$\lambda_k^{(n)} = \lambda(t_k^{(n)}; \mathrm{d}\mu), \quad k = 1, \dots, n, \tag{1.13}$$

зову се Кристофелови бројеви или Коутс[16]-Кристофелови коефицијенти и имају велики значај у нумеричкој интеграцији.

1.2 Чебишевљеви полиноми

Будући да се велики део ове дисертације бави изучавањем полинома ортогоналних у односу на модификоване Чебишевљеве[17] мере, у посебном поглављу наводимо најважније особине Чебишевљевих полинома.

Чебишевљеви полиноми прве и друге врсте се за $|x| \leq 1$ редом дефинишу на следећи начин

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \text{и} \quad U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1.14}$$

при чему је $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ и $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$. Одговарајуће тежине гласе

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad w(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad |x| \leq 1.$$

Користећи идентитет

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

за $x = \cos\theta$, закључујемо да полиноми T_n и U_n задовољавају исту трочлану рекурентну релацију

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.15}$$

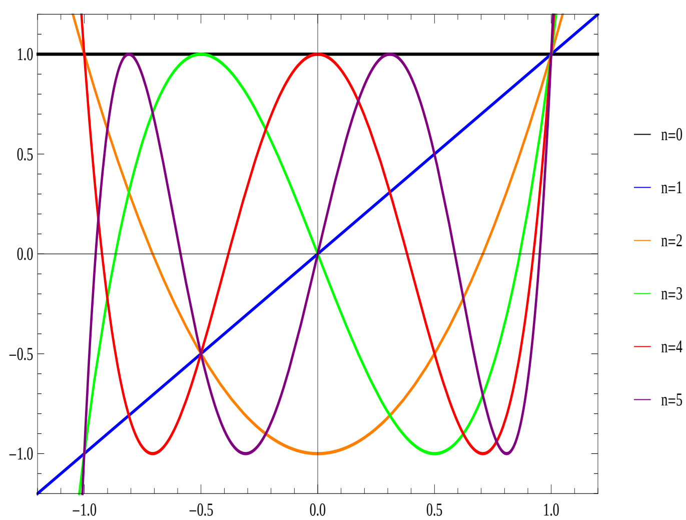
[16]Roger Cotes (1682–1716), британски математичар.
[17]Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894), руски математичар.

за различите почетне услове. Коришћењем (1.15), уз почетне услове

$$T_0(x) = 1 \;\text{ и }\; T_1(x) = x \quad \text{или} \quad U_0(x) = 1 \;\text{ и }\; U_1(x) = 2x,$$

добијамо низове полинома $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ и $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Даћемо примера ради експлицитне изразе Чебишевљевих полинома прве и друге врсте за $n = 0, 1, \ldots, 6$:

$$\begin{array}{ll}
T_0(x) = 1, & U_0(x) = 1,\\
T_1(x) = x, & U_1(x) = 2x,\\
T_2(x) = 2x^2 - 1, & U_1(x) = 4x^2 - 1,\\
T_3(x) = 4x^3 - 3x, & U_3(x) = 8x^3 - 4x,\\
T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, & U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,\\
T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, & U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x,\\
T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, & U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1.
\end{array}$$



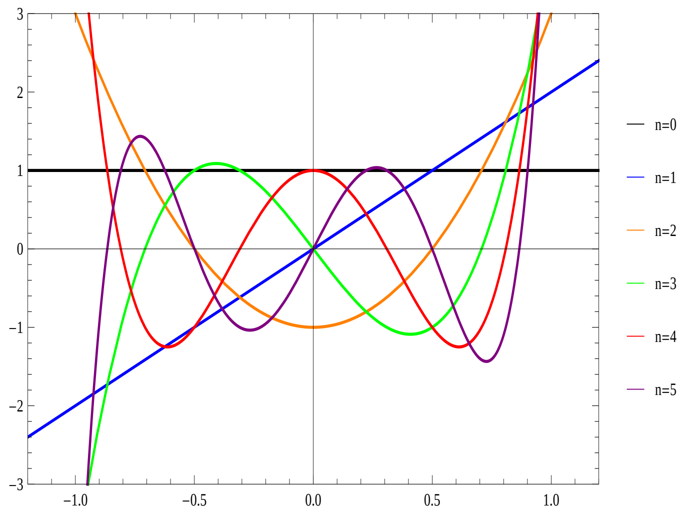
Слика 1.1: Графици функција $y = T_n(x)$ за $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и $-1 \le x \le 1$

Познати су и општи експлицитни изрази Чебишевљевих полинома прве и друге врсте. Они редом гласе

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \quad (n \ge 1)$$

и

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$



Слика 1.2: Графици функција $y = U_n(x)$ за $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и $-1 \le x \le 1$

Одговарајући ортонормирани системи редом су

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_2, \dots \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_1, \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_2, \dots \right\}.$$

Чебишевљеви полиноми прве врсте $T_n(x)$ су дати на слици 1.1, док су на слици 1.2 приказани Чебишевљеви полиноми друге врсте за $n = 0, 1, \dots, 5$.

Особине основних тригонометријских функција којима су дефинисани Чебишевљевих полиноми (1.14) условљавају даље њихове особине. Тако имамо:

- $|T_n(x)| \le 1$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и $-1 \le x \le 1$.
- $|U_n(x)| \le n + 1$ и $|\sqrt{1 - x^2}\, U_n(x)| \le 1$ за свако $-1 \le x \le 1$.
- $\|T_0\| = \sqrt{\pi}, \quad ||T_n|| = \sqrt{\pi/2},\ n \in \mathbb{N}$.
- $||U_n|| = \sqrt{\pi/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$.
- Парност функција $T_n(x)$ и $U_n(x)$ одговара парности степена n.
- Експлицитни израз за нуле полинома $T_n(x)$ гласи

$$t_k = t_k^{(n)} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, \dots, n).$$

- Чебишевљеви полиноми прве врсте $T_n(x)$ задовољавају диференцијалну једначину
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$
Друго партикуларно решење ове једначине $S_n(x) = \sin(n \arccos x)$ $(-1 \le x \le 1)$ може да се изрази преко Чебишевљевих полинома друге врсте. Наиме, важи $S_n(x) = U_{n-1}(x)\sqrt{1-x^2}$.

- Одговарајућа диференцијална једначина за Чебишевљеве полиноме друге врсте $U_n(x)$ гласи
$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0.$$

У литератури може се наћи мноштво других релација које ови полиноми задовољавају, као на пример:

$$\begin{aligned}
U_n(x) &= \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) = \frac{1}{1-x^2}(xT_{n+1}(x) - T_{n+2}(x)),\\
T_n(x) &= U_n(x) - xU_{n-1}(x) = xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),\\
U_n(x) &= \frac{1}{2(n+1)}(U'_{n+1}(x) - U'_{n-1}(x)),\\
U'_n(x) &= \frac{1}{1-x^2}((n+1)U_{n-1}(x) - nxU_n(x)).
\end{aligned}$$

Такође, за $2 \le k \le n$ важи

$$T_n(x) = T_k(x)U_{n-k}(x) - T_{k-1}(x)U_{n-k-1}(x).$$

Неке интересантне вредности су:

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \qquad T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0,$$

$$T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^n n^2, \quad T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!!}.$$

Чебишевљеви полиноми прве и друге врсте припадају општијој класи Гегенбауерових[18] полинома.

Чебишевљеви полиноми треће и четврте врсте су дефинисани са

$$V_n(\cos\theta) = \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} \quad \text{и} \quad W_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

а Чебишевљеве мере треће и четврте врсте гласе

$$\mathrm{d}\mu(x) = (1-x)^{-1/2}(1+x)^{1/2}\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad \mathrm{d}\mu(x) = (1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}\mathrm{d}x$$

[18] Karl Gegenbauer (1826–1903), немачки математичар.

на $(-1,1)$ редом.

Сви Чебишевљеви као и Гегенбауерови полиноми јесу поткласа генералније класе – Јакобијевих полинома.

1.3 Екстремална својства ортогоналних полинома

Ортогонални полиноми се могу дефинисати и преко екстремалних проблема. Наиме, монични ортогонални полином $\pi_n(\,\cdot\,;\mathrm{d}\mu)$ има следеће екстремално својство.

Теорема 1.3.1 *За сваки монични полином $p \in \widehat{\mathcal{P}}_n$ важи*

$$\int_{\mathbb{R}} p(x)^2 \mathrm{d}\mu(x) \geq \int_{\mathbb{R}} \pi_n(x;\mathrm{d}\mu)^2 \mathrm{d}\mu(x),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $p = \pi_n$.

Из ове теореме следи да је полином $\pi_n(\,\cdot\,;\mathrm{d}\mu)$ јединствени монични полином који минимизира $L^2(\mathrm{d}\mu)$ норму, тј.

$$\min_{p \in \widehat{\mathcal{P}}_n} \int_{\mathbb{R}} p(x)^2 \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \pi_n(x;\mathrm{d}\mu)^2 \mathrm{d}\mu(x). \tag{1.16}$$

Екстремално својство (1.16) може се проширити на $L^r(\mathrm{d}\mu)$ норму за свако $r > 1$.

Теорема 1.3.2 *Нека је $1 < r < +\infty$. Тада постоји јединствени монични полином $\pi_n^* \in \widehat{\mathcal{P}}_n$ тако да важи*

$$\min_{p \in \widehat{\mathcal{P}}_n} \int_{\mathbb{R}} |p(x)|^r \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} |\pi_n^*(x)|^r \mathrm{d}\mu(x). \tag{1.17}$$

Важан специјалан случај претходне теореме је $r = 2s+2$, $s \in \mathbb{N}_0$. Екстремални монични полином $\pi_n^*(x)$ у (1.17) означимо са $\pi_{n,s}(x)$. Ако посматрамо интеграл са леве стране једнакости (1.17) као функцију коефицијената $F(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ полинома $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, тада парцијални изводи функције F по a_k, $k = 0, 1, \dots, n-1$, морају бити једнаки нули. Одавде добијамо

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_{n,s}(x)^{2s+1} x^{\nu} \mathrm{d}\mu(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Дакле, $(2s+1)$-ви степен полинома $\pi_{n,s}(x)$ мора бити ортогоналан са свим полиномима нижег степена у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Полином $\pi_{n,s}(x)$ зове се s-ортогоналан полином у односу на меру $\mathrm{d}\mu$.

Када је $s = 0$, s-ортогонални полиноми се своде на стандардне ортогоналне полиноме, $p_{n,0} = p_n$.

За дате n и s, стављајући $\mathrm{d}\mu^{n,s}(x) = (p_{n,s}(x))^{2s}\mathrm{d}\mu(x)$, Миловановић (видети [48]) је реинтерпретирао ове услове ортогоналности за стандардне ортогоналне полиноме као

$$\int_{\mathbb{R}} p_k^{n,s}(x) x^k \mathrm{d}\mu^{n,s}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где је $p_k^{n,s}$, $k \in \mathbb{N}_0$, низ моничних ортогоналних полинома у односу на нову меру $\mathrm{d}\mu^{n,s}(x) = (p_{n,s}(x))^{2s}\mathrm{d}\mu(x)$. Приметимо да је $p_{n,s}(x) \equiv p_n^{n,s}(x)$. Као што можемо да видимо, полиноми $p_k^{n,s}$, $k = 0, 1, \dots$, су имплицитно дефинисани, јер нова мера $\mathrm{d}\mu^{n,s}(x)$ зависи од $p_{n,s}(x)$.

На основу претходног, да бисмо нашли s-ортогоналне полиноме $p_{n,s}$, $n = 0, 1, \dots, N$, потребно је конструисати стандардне полиноме $p_k^{n,s}(x)$, $k \le n$ (ортогоналне у односу на меру $\mathrm{d}\mu^{n,s}(x) = (p_{n,s}(x))^{2s}\mathrm{d}\mu(x)$) за свако $n \le N$ и да узмемо $p_{n,s} = p_n^{n,s}$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Напоменимо још и то да је Бернштајн[19] 1930. године показао да монични Чебишевљев полином $\widehat{T}_n(x)$ минимизира све интеграле облика

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\pi_n(x)|^{k+1}}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \quad (k \ge 0),$$

где је π_n произвољан монични полином степена n. То значи да су монични Чебишевљеви полиноми $\widehat{T}_n$ s-ортогонални на $[-1, 1]$ за свако $s \ge 0$.

1.4 Методи конструкције ортогоналних полинома

Коефицијенти трочлане рекурентне релације познати су експлицитно само за уску класу ортогоналних полинома, као што су Јакобијеви, гене-

[19]Felix Bernstein (1878–1956), немачки математичар јеврејског порекла.

ралисани Лагерови и Ермитови полиноми. То су такозвани класични ортогонални полиноми. Ортогонални полиноми чије коефицијенте трочлане рекурентне релације не познајемо зову се строго некласични полиноми. Познавање рекурентних коефицијената је неопходно за рачунску примену ортогоналних полинома. Конструктивна теорија ортогоналних полинома бави се следећим проблемом: За дату меру $\mathrm{d}\mu(x)$ и дати природан број n одредити првих n коефицијената $\alpha_k(\mathrm{d}\mu(x))$ и $\beta_k(\mathrm{d}\mu(x))$ у трочланој рекурентној релацији.

У овом одељку бавићемо се рачунским методама за генерисање ортогоналних полинома. Фокус је пре свега на некласичним тежинским функцијама. У зависности од информација које су доступне о мери $\mathrm{d}\mu(x)$ развијени су различити алгоритми конструкције непознатих коефицијената трочлане рекурентне релације. Уколико је мера позната једино преко момената, процедура избора је Чебишевљев алгоритам. У случају апсолутно непрекидне мере и познате тежинске функције, препоручује се Стилтјесова процедура.

Важан допринос истраживањима из ове области дао је Гаучи[20] ([24], [25]).

1.4.1 Чебишевљев алгоритам

Чебишевљев алгоритам успоставља везу између момената m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, и коефицијената трочлане рекурентне релације. Овај алгоритам се може исказати на следећи начин. Нека је дата троугаона матрица чији су елементи

$$\sigma_{k,i} = \int_{\mathbb{R}} P_k(x) x^i \mathrm{d}\mu(x), \quad k, i \in \mathbb{N}_0, \quad k \leq i,$$

где је $P_n(x)$ n-ти члан низа ортогоналних полинома. Тада је

$$m_k = \sigma_{0,k}.$$

На основу трочлане рекурентне релације важи

$$\sigma_{k+1,i} = \sigma_{k,i+1} - \alpha_k \sigma_{k,i} - \beta_k \sigma_{k-1,i}, \tag{1.18}$$

[20]Walter Gautschi (1927–), амерички математичар рођен у Швајцарској.

при чему је $\sigma_{-1,i} = 0$. За одређивање коефицијената трочлане рекурентне релације користимо једнакости

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,0}}, \quad \beta_0 = \sigma_{0,0},\\
\alpha_k &= \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{k,k}} - \frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}},\\
\beta_k &= \frac{\sigma_{k,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Једначине (1.18) и (1.19) дефинишу Чебишевљев алгоритам. Помоћу овог алгоритма могуће је једноставно одредити првих n коефицијената трочлане рекурентне релације ако је познато првих $2n$ момената. Једини недостатак Чебишевљевог алгоритма је његова слаба условљеност. У овом случају долази до одузимања блиских бројева, па у аритметици коначне мантисе долази до губитка значајних цифара.

Увођењем погодних модификованих момената, могуће је добити бољу нумеричку стабилност. Овај алгоритам познат је у литератури као модификован Чебишевљев алгоритам. Он захтева познавање још једног низа ортогоналних полинома и њихове трочлане рекурентне релације. Тада, на основу следећих величина

$$\sigma_{k,i} = \int_{\mathbb{R}} P_k(x) W_i(x) x^i \mathrm{d}\mu(x),$$

где је W_i низ моничних ортогоналних полинома који задовољавају трочлану рекурентну релацију

$$W_{k+1}(x) = (x - a_k) W_k(x) - b_k W_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

при чему је $W_{-1}(x) = 0$, $W_0(x) = 1$, а коефицијенти a_k и b_k су познати. Непознате коефицијенте трочлане рекуренте релације одређујемо из

$$\begin{aligned}
\sigma_{k,i} &= \sigma_{k-1,i+1} - (\alpha_{k-1} - a_i)\sigma_{k-1,i} - \beta_{k-1}\sigma_{k-2,i} + b_i \sigma_{k-1,i-1},\\
\alpha_k &= a_k + \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{k,k}} - \frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}},\\
\beta_k &= \frac{\sigma_{k,k}}{\sigma_{k-1,k-1}},
\end{aligned} \tag{1.20}$$

где је $\sigma_{-1,i} = 0$ и $\sigma_{0,i} = \int_{\mathbb{R}} W_i(x) \mathrm{d}\mu(x)$.

Модификовани Чебишевљев алгоритам користи додатни низ ортогоналних полинома са познатим коефицијентима трочлане рекурентне релације. У раду [25] показано је да се помоћу модификованог Чебишевљевог алгоритма могу извршити конструкције које имају бољу нумеричку стабилност од резултата који се добијају применом оригиналног Чебишевљевог алгоритма. Такође, могуће је дискутовати за разне низове познатог низа ортогоналних полинома стабилност алгоритма. Приметимо још да се у случају $W_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, 2n-1$, тј. $a_k = b_k = 0$, модификовани Чебишевљев алгоритам своди на основни алгоритам дефинисан помоћу (1.18) и (1.19).

1.4.2 Стилтјесова процедура

Нека је P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, моничан низ ортогоналних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Из трочлане рекурентне релације користећи својства ортогоналности добијају се следеће формуле

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\int_{\mathbb{R}} x P_k^2(x)\mathrm{d}\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}} P_k^2(x)\mathrm{d}\mu(x)}, \quad k \in \mathbb{N}_0,\\
\beta_0 &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu(x),\\
\beta_k &= \frac{\int_{\mathbb{R}} P_k^2(x)\mathrm{d}\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}} P_{k-1}^2(x)\mathrm{d}\mu(x)}, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Полазећи од $P_0 = 1$, можемо конструисати коефицијенте α_0 и β_0. Формирамо итеративни поступак којим на основу добијених коефицијената трочлане релације најпре одредимо наредни члан низа ортогоналних полинома P_k, а затим на основу релација (1.21) одређујемо и нове коефицијенте α_k и β_k. Процедуру настављамо до конструкције првих n коефицијената, односно чланова низа ортогоналних полинома.

Наведени поступак алтернативне примене формула (1.21) и трочлане рекурентне релације коју полиноми P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, задовољавају назива се Стилтјесова процедура.

Одређивање вредности интеграла који се појављују у (1.21) могуће је извршити нумерички, тј. применом неке квадратурне формуле (видети поглавље квадратурне формуле). Како квадратурне формуле за меру $\mathrm{d}\mu$ нису доступне због непознавања коефицијената трочлане релације, најчешће се користи нека друга квадратурна формула за меру која је слична мери $\mathrm{d}\mu$. У том случају наведени поступак се назива дискретизована Стилтјесова процедура. Овакав поступак показује добре карактеристике условљености и има предност над Чебишевљевим алгоритмом.

Развој симболичког рачуна и аритметике променљиве прецизности омогућили су генерисање коефицијената трочлане рекурзије Чебишевљевом или Стилтјесовом процедуром. У наставку наводимо неке интересантне некласичне мере за које су у литератури добијени рекурзивни коефицијенти [51].

1. Кристофелов пример $w(x) = [(1-k^2x^2)(1-x^2)]^{-1/2},\ 0<k<1,$ $x \in [-1,1]$;
2. Логаритамска тежина $w(x) = x^\alpha \ln(1/x),\ \alpha > -1,\ x \in (0,1)$;
3. Генералисана логаритамска тежина $w(x) = x^\alpha (1-x)^\beta \ln(1/x)$, $\alpha, \beta > -1$, $x \in (0,1)$;
4. Ермитова мера на полу-интервалу $w(x) = e^{-x^2},\ x \in [0,\infty)$;
5. Више-компонентна дистрибуција $w(x) = (1-x^2)^{-1/2} + a,\ a > 0,$ $x \in [-1,1]$;
6. Ејријева[21] тежина $w(x) = e^{-x^3/3},\ x \in (0,\infty)$;
7. Реципрочна гама тежина $w(x) = 1/\Gamma(x),\ x \in (0,\infty)$;
8. Ајнштајнова[22] тежина $w(x) = \dfrac{x}{e^x-1},\ x \in (0,\infty)$;
9. Фермијева тежина[23] $w(x) = \dfrac{1}{e^x+1},\ x \in (0,\infty)$;
10. Хиперболичке тежине $w(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ и $w(x) = \dfrac{\sinh x}{\cosh^2 x},\ x \in (0,\infty)$.

[21] George Biddell Airy (1801–1892), британски астроном.
[22] Albert Einstein (1879–1955), теоретски физичар рођен у Немачкој, јеврејског порекла.
[23] Enrico Fermi (1901–1954), италијански физичар.

Глава 2

Модификациони алгоритми

Један од најважнијих проблема конструктивне теорије ортогоналних полинома јесте одређивање коефицијената трочлане рекурентне релације за некласичне тежинске функције. У овом поглављу бавићемо се утврђивањем утицаја модификације тежинске функције на коефицијенте трочлане рекурентне релације. Разматраћемо случај множења тежинске функције позитивном рационалном функцијом. Испитивање ортогоналних полинома са модификованим тежинама значајно је приликом конструкције квадратурних формула. Овакав приступ у конструкцији квадратура шири њихов скуп тачности са алгебарских на рационалне функције унапред дефинисаних полова.

Нека је $\mathrm{d}\mu(x)$ позитивна мера са коначним носачем $\mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu) = [a, b]$ и нека су

$$u(x) = \pm\prod_{k=1}^{l}(x - u_k) \quad \text{и} \quad v(x) = \prod_{k=1}^{m}(x - v_k)$$

два реална узајамно проста полинома која се не анулирају на $[a, b]$, при чему се знак $+$ или $-$ у изразу за $u(x)$ узима тако да је $u(x)/v(x) > 0$ на $[a, b]$. Уводимо нову меру

$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = \frac{u(x)}{v(x)}\mathrm{d}\mu(x), \quad x \in [a, b]. \tag{2.1}$$

Потребно је одредити коефицијенте $\widehat{\alpha}_k = \widehat{\alpha}_k(\mathrm{d}\widehat{\mu})$ и $\widehat{\beta}_k = \widehat{\beta}_k(\mathrm{d}\widehat{\mu})$ трочлане рекурентне релације за меру (2.1), на основу познатих коефицијената рекурзије $\alpha_k = \alpha_k(\mathrm{d}\mu)$ и $\beta_k = \beta_k(\mathrm{d}\mu)$ везане за почетну меру $\mathrm{d}\mu$. Методи који врше ову трансформацију зову се модификациони алгоритми.

Први резултат у овој области долази од Кристофела [13] који је изразио

$$u(x)\pi_n(x;\mathrm{d}\widehat{\mu}) \qquad (v \equiv 1 \text{ и } \mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{d}x)$$

у облику детерминанте, као линеарну комбинацију полинома $\pi_{n+i}(x;\mathrm{d}\mu)$, $i = 0, 1, \ldots, l$. Сто година касније Уваров[1] [70] је решио случај када је $v(x) \not\equiv 1$. Савремен развој конструктивне теорије ортогоналних полинома на реалној правој у многоме дугујемо Волтеру Гаучију [51]. Развијао је ефикасне алгоритме за нумеричко генерисање ортогоналних полинома, дао њихову детаљну анализу стабилности и неколико нових примена. Захваљујући раду Гаучија могућа је конструкција многих нових класа ортогоналних полинома и њихова примена у различитим областима примењене и нумеричке математике као и многим областима примењене науке.

2.1 Трансформације тежинске функције

У овом одељку дајемо преглед познатих резултата (видети [26], [65]) модификационих алгоритама са две једноставне трансформације.

Теорема 2.1.1 *Означимо са $w(x)$ и $\widetilde{w}(x)$ оригиналну и трансформисану тежинску функцију, а са $\pi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, и $\widetilde{\pi}_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, низове моничних ортогоналних полинома у односу на $w(x)$ и $\widetilde{w}(x)$ тежинску функцију редом. Нека су даље α_n, β_n, $n \in \mathbb{N}_0$, и $\widetilde{\alpha}_n$, $\widetilde{\beta}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, одговарајући коефицијенти трочлане рекурентне релације за оригиналну и трансформисану тежинску функцију редом. Тада важе следеће трансформационе формуле.*

1° *Ако је $\widetilde{w}(x) = Cw(x)$, где је $C > 0$, онда важи*

$$\widetilde{\alpha}_n = \alpha_n,\ n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и} \quad \widetilde{\beta}_0 = C\beta_0,\ \widetilde{\beta}_n = \beta_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

При том је $\widetilde{\pi}_n(x) = \pi_n(x)$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

2° *Ако је $\widetilde{w}(x) = w(ax + b)$, где је $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$, онда важи*

$$\widetilde{\alpha}_n = (\alpha_n - b)/a,\ n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и} \quad \widetilde{\beta}_0 = \beta_0/|a|,\ \widetilde{\beta}_n = \beta_n/a^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Осим тога је $\widetilde{\pi}_n(x) = \pi_n(ax + b)/a^n$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

[1] Василий Борисович Уваров (1929–1997), руски математичар и физичар.

Наредна теорема тиче се трансформације тежинске функције облика

$$\widetilde{w}(x) = \frac{u(x)}{v(x)} w(x),$$

где су $u(x)$ и $v(x)$ реални полиноми.

Теорема 2.1.2 *Нека су $\pi_n(x)$ и $\widetilde{\pi}_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, монични ортогонални полиноми у односу на тежинске функције $w(x)$ и $\widetilde{w}(x) = r(x)w(x)$ редом, где су*

$$r(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \textit{и} \qquad u(x) = \prod_{i=1}^{l}(x-u_i), \; v(x) = \prod_{j=1}^{m}(x-v_j).$$

У случају $m \leq n$ важи

$$u(x)\widetilde{\pi}_n(x) = C \begin{vmatrix} \pi_{n-m}(x) & \cdots & \pi_{n-1}(x) & \pi_n(x) & \cdots & \pi_{n+l}(x) \\ \pi_{n-m}(u_1) & \cdots & \pi_{n-1}(u_1) & \pi_n(u_1) & \cdots & \pi_{n+l}(u_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{n-m}(u_l) & \cdots & \pi_{n-1}(u_l) & \pi_n(u_l) & \cdots & \pi_{n+l}(u_l) \\ \rho_{n-m}(v_1) & \cdots & \rho_{n-1}(v_1) & \rho_n(v_1) & \cdots & \rho_{n+l}(v_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n-m}(v_m) & \cdots & \rho_{n-1}(v_m) & \rho_n(v_m) & \cdots & \rho_{n+l}(v_m) \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

У супротном, ако је $m > n$, онда важи

$$u(x)\widetilde{\pi}_n(x) = C \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \pi_0(x) & \cdots & \pi_{n+l}(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \pi_0(u_1) & \cdots & \pi_{n+l}(u_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \pi_0(u_l) & \cdots & \pi_{n+l}(u_l) \\ 1 & v_1 & \cdots & v_1^{m-n-1} & \rho_0(v_1) & \cdots & \rho_{n+l}(v_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & v_m & \cdots & v_m^{m-n-1} & \rho_0(v_m) & \cdots & \rho_{n+l}(v_m) \end{vmatrix}, \tag{2.3}$$

где је C нормализациона константа за монични полином. Са $\rho_n(z)$ означили смо Кошијеве[2] интеграле полинома $\pi_n(x)$ дефинисане са

$$\rho_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n(x)}{z-x} w(x)\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Оригинална Кристофелова теорема се добија у случају $v(x) = 1$, односно $m = 0$.

[2] Augustin Cauchy (1789–1857), француски математичар.

Наредне трансформационе формуле добијене су применом теореме 2.1.2 у специјалним случајевима ([26]).

Теорема 2.1.3 *Нека су све ознаке као у теореми 2.1.1 и нека је низ* r_n, $n \in \mathbb{N}_0$, *дефинисан са*

$$r_0 = c - \alpha_0, \quad r_n = c - \alpha_n - \frac{\beta_n}{r_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Тада:

1° *Ако је* $\widetilde{w}(x) = (x-c)w(x)$, *где је* $c < \inf \operatorname{supp}(w)$, *онда важи*

$$\widetilde{\beta}_0 = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{w}(x)\mathrm{d}x, \quad \widetilde{\beta}_n = \beta_n \frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$\widetilde{\alpha}_n = \alpha_{n+1} + r_{n+1} - r_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

2° *У случају* $\widetilde{w}(x) = (x-c)(x-\overline{c})w(x)$, *за* $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *важи*

$$\widetilde{\beta}_0 = \beta_0(\beta_1 + |r_0|^2), \quad \widetilde{\beta}_n = \beta_n \frac{r''_{n+1} r''_{n-1}}{(r''_{n-1})^2} \left| \frac{r_n}{r_{n-1}} \right|^2, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$\widetilde{\alpha}_n = \alpha_{n+2} + r'_{n+2} + \frac{r''_{n+2}}{r''_{n+1}} r'_{n+1} - \left(r'_{n+1} + \frac{r''_{n+1}}{r''_n} r'_n \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

где је $r'_n = \operatorname{Re} r_n$ *и* $r''_n = \operatorname{Im} r_n$.

У неким случајевима је веома тешко наћи решење диференцне једначине (2.4) у затвореном облику. У следећем тврђењу трансформационе формуле из дела 1° претходне теореме се упрошћавају увођењем помоћног низа.

Последица 2.1.1 *Нека су све ознаке као у теореми 2.1.1 и нека је низ* λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, *дефинисан са*

$$\lambda_{-1} = 0, \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_{n+1} = (c - \alpha_n)\lambda_n - \beta_n \lambda_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

где је $c < \inf \operatorname{supp}(w)$. *Ако је* $\widetilde{w}(x) = (x-c)w(x)$, *тада важи*

$$\widetilde{\beta}_0 = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{w}(x)\mathrm{d}x, \quad \widetilde{\beta}_n = \beta_n \frac{\lambda_{n+1}\lambda_{n-1}}{\lambda_n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$\widetilde{\alpha}_n = c - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - \beta_{n+1}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема 2.1.4 *Нека су све ознаке као у теореми 2.1.1. Нека је низ r_n, $n \in \mathbb{N}_0$, дефинисан са*

$$r_{-1} = -\int_{\mathbb{R}} \widetilde{w}(x)\mathrm{d}x, \quad r_n = c - \alpha_n - \frac{\beta_n}{r_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.6}$$

Тада:

1° *Ако је $\widetilde{w}(x) = \dfrac{w(x)}{x-c}$, где је $c < \inf \operatorname{supp}(w)$, онда важи*

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_0 &= \alpha_0 + r_0, \quad \widetilde{\alpha}_n = \alpha_n + r_n - r_{n-1}, \\ \widetilde{\beta}_0 &= -r_{-1}, \quad \widetilde{\beta}_n = \beta_{n-1}\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

2° *Уколико је $\widetilde{w}(x) = \dfrac{w(x)}{c-x}$, где је $c > \sup \operatorname{supp}(w)$, важе релације* (2.6) *и* (2.7) *при чему је $\widetilde{\beta}_0 = r_{-1}$, где је*

$$r_{-1} = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{w}(x)\mathrm{d}x.$$

2.2 Рационални алгоритам за квадратну Кристофелову модификацију мере

Модификација квадратним фактором

$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) := (x-z)^2\,\mathrm{d}\mu(x), \quad z \in \mathbb{C},$$

производи нови низ ортогоналних полинома

$$\widehat{p}_n(x) = \widehat{p}_n(x; \mathrm{d}\widehat{\mu}), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

који се може реализовати двоструком узастопном применом модификације линеарним факторима (видети [27, стр. 121–124] и [17]). Проблем са овим приступом настаје када z припада $\operatorname{supp}(\mathrm{d}\mu)$. Наиме, када је z нула полинома p_n, који је члан низа ортогоналних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu$, примена модификационог алгоритма линеарним фактором није могућа, због чињенице да долази до дељења нулом. Алтернативни приступ је да се примени један корак QR алгоритма на Јакобијеву матрицу $J = J(\mathrm{d}\mu)$ за меру $\mathrm{d}\mu$. Овај алгоритам захтева рачунање квадратних корена, што значи да није рационалан.

У раду [18] представљен је алгоритам који може да се примени без обзира на чињеницу где се тачка z налази. Такође, тај алгоритам је рационалан, као и алгоритам представљен у [10] који се односи на линеарне модификације. За неке друге модификације видети [29].

Дата модификација квадратним фактором може бити успешно примењена на дириговану полиномијалну L^2-апроксимацију, за конструкцију s- (или σ-) ортогоналних полинома и одговарајуће квадратуре Турановог[3] типа (видети [32], [55]), итд. Типична примена на L^2-апроксимацију са ограничењима захтева полиноме ортогоналне у односу на меру $q_m(x)^2\mathrm{d}\mu(x)$, где је q_m монични полином степена m са нулама $\tau_1,\ldots,\tau_m$, које припадају носачу мере $\mathrm{d}\mu(x)$ (видети [45, стр. 388] и [52]). То се може постићи применом датог модификационог алгоритма m пута са квадратним фактором $(x-\tau_k)^2, k=1,\ldots,m$.

2.2.1 Модификација квадратним фактором

Дефиниција 2.2.1 Нека је $\mathrm{d}\mu$ позитивна мера и $p_n(\,\cdot\,)=p_n(\,\cdot\,;\mathrm{d}\mu)$ низ моничних ортогоналних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Нека је $z\in\mathbb{C}$ и претпоставимо да је $p_n(z)\neq 0$ за $n\in\mathbb{N}$. Тада израз

$$\widetilde{p}_n(x;z)=\frac{1}{x-z}\left[p_{n+1}(x)-\frac{p_{n+1}(z)}{p_n(z)}p_n(x)\right] \tag{2.8}$$

зовемо полиномско језгро за меру $\mathrm{d}\mu$.

Приметимо да је $\widetilde{p}_n(x;z)\in\mathcal{P}_n$ као функција по x.

Теорема 2.2.1 *Нека је $\mathrm{d}\mu$ позитивна мера и $z\in\mathbb{C}$ такав да је $p_n(z)\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$. Нека је $\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x)=(x-z)\mathrm{d}\mu(x)$. Тада је $\mathrm{d}\widetilde{\mu}$ квази-дефинитна мера и полиномска језгра $\widetilde{p}_k$, $k\in\mathbb{N}_0$, су формални монични ортогонални полиноми у односу на меру $\mathrm{d}\widetilde{\mu}$.*

У раду [18] дати су следећи резултати.

Лема 2.2.1 *Коефицијенти $\widehat{\alpha}_k$ и $\widehat{\beta}_k$, $k\in\mathbb{N}_0$, који се јављају у трочланој рекурентној релацији за полиноме ортогоналне у односу на меру*

$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x)=(x-z)^2\mathrm{d}\mu(x),\quad z\in\mathbb{C},$$

су непрекидне функције по $z\in\mathbb{R}$.

[3] Pál Turán (1910–1976), мађарски математичар.

Доказ. Посматрајмо низ момената $\widehat{m}_n = \int x^n \mathrm{d}\widehat{\mu}(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Једноставно се показује да је сваки $\widehat{m}_n$ полином другог степена по z. Како $\widehat{p}_n$ може да се изрази помоћу

$$\widehat{p}_n(x) = \frac{1}{\widehat{H}_n} \begin{vmatrix} \widehat{m}_0 & \widehat{m}_1 & \cdots & \widehat{m}_n \\ \widehat{m}_1 & \widehat{m}_2 & \cdots & \widehat{m}_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix},$$

(видети [11, стр. 17]), где је $\widehat{H}_n$ Хенкелова детерминанта која је различита од нуле јер је мера $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ позитивна. Дакле, коефицијенти полинома $\widehat{p}_n$ су непрекидне функције по $z \in \mathbb{R}$ а такође и коефицијенти у трочланој рекурентној релацији. □

Лема 2.2.2 *Ако је* $\Delta_n \equiv \Delta_n(z) = p_{n+1}(z)p_n'(z) - p_n(z)p_{n+1}'(z)$, $n \in \mathbb{N}_0$, *онда је*

$$\Delta_{n+1} = \beta_{n+1}\Delta_n - p_{n+1}^2(z), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.9}$$

Доказ. Према Кристофел-Дарбуовој формули (видети [11, стр. 23–24], [27, стр. 15–16]), следи

$$-\frac{\Delta_n}{\|p_n\|^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k^2(z)}{\|p_k\|^2} \quad \text{и} \quad -\frac{\Delta_{n+1}}{\|p_{n+1}\|^2} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{p_k^2(z)}{\|p_k\|^2},$$

одакле, одузимањем добијамо

$$\frac{p_{n+1}^2(z)}{\|p_{n+1}\|^2} = -\frac{\Delta_{n+1}}{\|p_{n+1}\|^2} + \frac{\Delta_n}{\|p_n\|^2}.$$

Користећи идентитет $\beta_{n+1} = \dfrac{\|p_{n+1}\|^2}{\|p_n\|^2}$ добијамо тврђење леме. □

Теорема 2.2.2 *Нека је* $z \in \mathbb{C}$ *такав број да је мера* $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ *квази-дефинитна. Коефицијенти у трочланој рекурентној релацији за полиноме ортогоналне у односу на меру*

$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = (x - z)^2 \mathrm{d}\mu(x), \quad z \in \mathbb{C},$$

су дати са

$$\widehat{\alpha}_n = \frac{-p_{n+1}^2\big(p_n p_{n+1} + z\Delta_n\big) + \beta_{n+1}\big(2p_n p_{n+1}\Delta_n + \alpha_{n+1}\Delta_n^2\big)}{\Delta_n \Delta_{n+1}}, \tag{2.10}$$

$$\widehat{\beta}_0 = \beta_0\big[\beta_1 + (z-\alpha_0)^2\big], \quad \widehat{\beta}_n = \beta_n \frac{\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}}{\Delta_n^2}, \tag{2.11}$$

где смо означили $p_n := p_n(z; \mathrm{d}\mu)$, $n \in \mathbb{N}_0$, *и* p_n *је низ полинома ортогоналних у односу на меру* $\mathrm{d}\mu$.

Доказ. Применом Кристофел-Дарбуове формуле добијамо

$$-\frac{\Delta_n}{\|p_n\|^2} = \frac{p_{n+1}'p_n - p_n'p_{n+1}}{\|p_n\|^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k^2}{\|p_k\|^2} > 0,$$

одакле следи да је $\Delta_n(z) < 0$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и $z \in \mathbb{R}$.

Означимо са $\mathcal{Z}_n$ скуп свих нула полинома p_n. Према теореми 1.1.5 скуп нула $\mathcal{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$, садржи n реалних бројева, па је $\mathcal{Z} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{Z}_n$, скуп нула свих полинома p_n, $n \in \mathbb{N}$, пребројив скуп. Зато је скуп $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ непразан и има моћ континуума.

Изаберимо $z \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$. За такво z важи $p_n(z) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\Delta_n(z) < 0$, $n \in \mathbb{N}$. Услов $p_n(z) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, према теореми 2.2.1 обезбеђује да је мера $\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x) = (x-z)\mathrm{d}\mu(x)$ квази-дефинитна и да постоји одговарајући низ ортогоналних полинома дат са (2.8). Дакле, можемо изразити полиноме $\widetilde{p}_n$, $n \in \mathbb{N}$, ортогоналне у односу на меру $\mathrm{d}\widetilde{\mu}$ помоћу

$$\widetilde{p}_n(x; z) = \frac{1}{x-z}\left[p_{n+1}(x) - \frac{p_{n+1}}{p_n}p_n(x)\right], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Мера коју надаље испитујемо је $\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = (x-z)\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x) = (x-z)^2\mathrm{d}\mu(x)$. Применимо теорему 2.2.1 још једном и добијамо

$$\widehat{p}_n(x; z) = \frac{1}{x-z}\left[\widetilde{p}_{n+1}(x; z) - \frac{\widetilde{p}_{n+1}(z; z)}{\widetilde{p}_n(z; z)}\widetilde{p}_n(x; z)\right], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

С обзиром на

$$\widetilde{p}_n(z; z) = -\frac{\Delta_n(z)}{p_n(z)},$$

услов $\Delta_n(z) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, нам омогућује примену теореме 2.2.1.

Сређивањем израза

$$\begin{aligned}
\widehat{p}_n(x; z) &= \frac{1}{x-z}\left[\widetilde{p}_{n+1}(x) - \frac{\widetilde{p}_{n+1}(z)}{\widetilde{p}_n(z)}\widetilde{p}_n(x)\right] \\
&= \frac{1}{x-z}\left\{\frac{p_{n+2}(x) - (p_{n+2}(z)/p_{n+1}(z))p_{n+1}(x)}{x-z}\right. \\
&\quad \left. - \frac{-\Delta_{n+1}/p_{n+1}(z)}{-\Delta_n/p_n(z)}\left(\frac{p_{n+1}(x) - (p_{n+1}(z)/p_n(z))p_n(x)}{x-z}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x-z)^2}\left\{\frac{p_{n+1}(z)p_{n+2}(x)-p_{n+2}(z)p_{n+1}(x)}{p_{n+1}(z)}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\Delta_{n+1}p_n(z)}{\Delta_n p_{n+1}(z)}\frac{p_{n+1}(x)p_n(z)-p_{n+1}(z)p_n(x)}{p_n(z)}\right\}\\
&= \frac{p_{n+2}(x)-\dfrac{p_{n+2}(z)}{p_{n+1}(z)}p_{n+1}(x)-\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\left(\dfrac{p_n(z)}{p_{n+1}(z)}p_{n+1}(x)-p_n(x)\right)}{(x-z)^2}\\
&= \frac{p_{n+2}(x)\Delta_n-p_{n+1}(x)\left(\Delta_n\dfrac{p_{n+2}(z)}{p_{n+1}(z)}+\Delta_{n+1}\dfrac{p_n(z)}{p_{n+1}(z)}\right)+p_n(x)\Delta_{n+1}}{(x-z)^2\Delta_n},
\end{aligned}
$$

добијамо

$$
\widehat{p}_n(x;z)=\frac{p_{n+2}(x)\Delta_n-p_{n+1}(x)\left(p_{n+2}p_n'-p_np_{n+2}'\right)+p_n(x)\Delta_{n+1}}{(x-z)^2\Delta_n}. \tag{2.12}
$$

Заменом (2.12) у трочланој рекурентној релацији за полиноме $\widehat{p}_n$,

$$
\widehat{p}_{n+1}(x)=(x-\widehat{\alpha}_n)\widehat{p}_n(x)-\widehat{\beta}_n\widehat{p}_{n-1}(x),\quad n\in\mathbb{N}_0,
$$

добијамо

$$
\begin{aligned}
&\frac{p_{n+3}(x)\Delta_{n+1}-p_{n+2}(x)(p_{n+3}p_{n+1}'-p_{n+1}p_{n+3}')+p_{n+1}(x)\Delta_{n+2}}{(x-z)^2\Delta_{n+1}}\\
&\qquad=(x-\widehat{\alpha}_n)\frac{p_{n+2}(x)\Delta_n-p_{n+1}(x)(p_{n+2}p_n'-p_np_{n+2}')+p_n(x)\Delta_{n+1}}{(x-z)^2\Delta_n}\\
&\qquad-\widehat{\beta}_n\frac{p_{n+1}(x)\Delta_{n-1}-p_n(x)(p_{n+1}(p_{n-1}'-p_{n-1}p_{n+1}')+p_{n-1}(x)\Delta_n}{(x-z)^2\Delta_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Сређивањем претходног израза и заменом у трочланој рекурентној релацији за низ полинома p_n следи

$$
\begin{aligned}
&p_{n+3}(x)-\frac{p_{n+2}(x)}{\Delta_{n+1}}\left[(z-\alpha_{n+2})\Delta_{n+1}-p_{n+1}p_{n+2}\right]+p_{n+1}(x)\frac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}}\\
&\quad=(x-\widehat{\alpha}_n)\left(p_{n+2}(x)-\frac{p_{n+1}(x)}{\Delta_n}\left[(z-\alpha_{n+1})\Delta_n-p_np_{n+1}\right]+p_n(x)\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)\\
&\quad-\widehat{\beta}_n\left(p_{n+1}(x)-\frac{p_n(x)}{\Delta_{n-1}}\left[(z-\alpha_n)\Delta_{n-1}-p_{n-1}p_n\right]+p_{n-1}(x)\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).
\end{aligned}
$$

Заменом $p_{n+3}(x)=(x-\alpha_{n+2})p_{n+2}(x)-\beta_{n+2}p_{n+1}(x)$ у претходној једнакости, имамо

$$
\begin{aligned}
&-\beta_{n+2}p_{n+1}(x)+\frac{\Delta_{n+2}p_{n+1}(x)}{\Delta_{n+1}}+\widehat{\beta}_n\\
&\times\left(\frac{\Delta_n p_{n-1}(x)}{\Delta_{n-1}}-\frac{p_n(x)((z-\alpha_n)\Delta_{n-1}-p_{n-1}p_n)}{\Delta_{n-1}}+p_{n+1}(x)\right)\\
&+(x-\alpha_{n+2})p_{n+2}(x)-(x-\widehat{\alpha}_n)\\
&\times\left(\frac{\Delta_{n+1}p_n(x)}{\Delta_n}-\frac{p_{n+1}(x)((z-\alpha_{n+1})\Delta_n-p_np_{n+1}}{\Delta_n}+p_{n+2}(x)\right)\\
&-\frac{p_{n+2}(x)((z-\alpha_{n+2})\Delta_{n+1}-p_{n+1}p_{n+2})}{\Delta_{n+1}}=0.
\end{aligned}
$$

Како је $\Delta_{n+2}=\beta_{n+2}\Delta_{n+1}-p_{n+2}^2$, $p_{n+2}(x)=(x-\alpha_{n+1})p_{n+1}(x)-\beta_{n+1}p_n(x)$ и $p_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)p_n(x)-\beta_np_{n-1}(x)$, решавањем система од две једначине добија се:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\alpha}_n &= \frac{\alpha_{n+1}\Delta_n\Delta_{n+1}+\Delta_{n+1}p_np_{n+1}-\Delta_np_{n+1}p_{n+2}}{\Delta_n\Delta_{n+1}},\\
\widehat{\beta}_n &= \frac{(\alpha_{n+1}-z)\beta_n\Delta_{n-1}\Delta_n\Delta_{n+1}p_np_{n+1}+\beta_n\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}p_n^2p_{n+1}^2}{\Delta_n^2\Delta_{n+1}(\Delta_n-\beta_n\Delta_{n-1})}\\
&- \frac{(\alpha_{n+1}-z)\beta_n\Delta_{n-1}\Delta_n^2p_{n+1}p_{n+2}+\beta_n\Delta_{n-1}\Delta_np_{n+2}(\Delta_np_{n+2}+p_np_{n+1}^2)}{\Delta_n^2\Delta_{n+1}(\Delta_n-\beta_n\Delta_{n-1})}.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Сада, заменом $\Delta_{n+1}=\beta_{n+1}\Delta_n-p_{n+1}^2$ и $p_{n+2}(z)=(z-\alpha_{n+1})p_{n+1}(z)-\beta_{n+1}p_n(z)$ у (2.13) добијају се изрази дати са (2.10) и (2.11).

Добијени изрази за коефицијенте у трочланој релацији $\widehat{\alpha}_n$ и $\widehat{\beta}_n$, $n\in\mathbb{N}_0$, важе за $z\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{Z}$. Како је мера $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ позитивна за $z\in\mathbb{R}$, то полиноми ортогонални у односу на $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ постоје. Сада показујемо да исти изрази важе за свако $z\in\mathbb{R}$.

Прво приметимо да смо доказали да је $\Delta_n(z)<0$, $z\in\mathbb{R}$, те су десне стране у изразима (2.10) и (2.11) дефинисане за свако $z\in\mathbb{R}$. Посматрајмо сада низ отворених скупова $O_n=\mathbb{R}\setminus\mathcal{Z}_n$, $n\in\mathbb{N}$. Сваки O_n, $n\in\mathbb{N}$, је густ у $\mathbb{R}$. Како је $\mathbb{R}$ комплетан метрички простор он је Баиров[4] простор (видети [1, стр. 31]). На основу Баирове теореме о категоријама сваки резидуалан скуп, тј. пресек пребројиво много отворених скупова који су густи у $\mathbb{R}$, је густ у $\mathbb{R}$. Дакле, $\cap_{n\in\mathbb{N}}O_n=\mathbb{R}\setminus\mathcal{Z}$ је густ у $\mathbb{R}$. То значи да једнакости (2.10) и (2.11) важе на скупу који је густ у $\mathbb{R}$. На основу леме 2.2.1 коефицијенти $\widehat{\alpha}_n$ и $\widehat{\beta}_n$, $n\in\mathbb{N}_0$, су непрекидне функције по $z\in\mathbb{R}$, и

[4] René-Lous Baire (1874–1932), француски математичар.

десне стране у једнакостима (2.10) и (2.11) су непрекидне по $z \in \mathbb{R}$, јер је $\Delta_n(z) < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}$. За свако $z \in \mathcal{Z}$, можемо конструисати низ тачака $z_n \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, такав да је $\lim z_n = z$, а то на основу чињенице да је скуп $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ густ у $\mathbb{R}$. Користећи непрекидност добијамо да једнакости (2.10) важе по z такође. Како је $z \in \mathcal{Z}$ произвољно, следи да једнакости важе за свако $z \in \mathbb{R}$.

Сада, нека је $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Означимо са

$$\widetilde{\mathcal{Z}}_n = \left\{ z_l^n \in \mathbb{C} \mid \widehat{H}_n(z_l^n) = 0, \quad l = 1, \ldots, N(n) \right\},$$

где је $N(n)$ број нула полинома $\widehat{H}_n$. Дакле, $\cup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{Z}}_n$ је пребројив скуп свих комплексних бројева где мера $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ није квази-дефинитна. Нека је $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ такав да је мера $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ квази-дефинитна. Претпоставимо да за неко $n \in \mathbb{N}$ важи $\Delta_n(z_0) = 0$. Дефинишимо

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \Delta_n(z_0) = 0\}.$$

Како је $\widehat{H}_n$ непрекидна функција по z и како је $\widehat{\beta}_n = \widehat{H}_{n-2}\widehat{H}_n/\widehat{H}_{n-1}^2$, следи да је $\widehat{\beta}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, такође непрекидна функција по z на $\mathbb{C} \setminus \widetilde{\mathcal{Z}}_n$. Зато постоји отворена околина тачке z_0, $\mathcal{O}_1(z_0)$, таква да за свако $z \in \mathcal{O}_1(z_0)$ важи $\widehat{H}_n \neq 0$, $\widehat{\beta}_n \neq 0$, за $n = 0, 1, \ldots, 4n_0$.

Како је $\Delta_{n_0}(z_0) = 0$, постоји отворена околина тачке z_0, $\mathcal{O}_2(z_0)$, таква да за свако $z \in \mathcal{O}_2(z_0) \setminus \{z_0\}$ важи $\Delta_{n_0}(z) \neq 0$. Ако не, постоји тачка z у свакој отвореној околини тачке z_0, различита од z_0, тако да важи $\Delta_{n_0}(z) = 0$. Како је Δ_{n_0} цела функција по z то би значило да је $\Delta_{n_0}(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$ (видети [38, стр. 168]), што је немогуће на основу чињенице да је $\Delta_{n_0}(z) < 0$, $z \in \mathbb{R}$.

Дефинишимо $\mathcal{O}(z_0) = \mathcal{O}_1(z_0) \cap \mathcal{O}_2(z_0)$. Тада је $\mathcal{O}(z_0)$ отворена околина тачке z_0 за коју је $\Delta_{n_0}(z) \neq 0$, $z \neq z_0$, и на којој је $\widehat{\beta}_{n_0}$ непрекидна. Како је

$$\{0, \infty\} \not\ni \lim_{z\to z_0} \widehat{\beta}_{n_0} = \lim_{z\to z_0} \beta_{n_0} \frac{\Delta_{n_0-1}\Delta_{n_0+1}}{\Delta_{n_0}^2},$$

то је

$$\Delta_{n_0+1}(z_0) = 0.$$

С обзиром на то да је

$$\Delta_{n_0}(z_0) = -\|p_{n_0+1}\|^2 \sum_{k=0}^{n_0} \frac{p_k^2(z_0)}{\|p_k\|^2} = 0$$

и

$$\Delta_{n_0+1}(z_0) = -\|p_{n_0+2}\|^2 \sum_{k=0}^{n_0+1} \frac{p_k^2(z_0)}{\|p_k\|^2} = 0,$$

добијамо $p^2_{n_0+1}(z_0) = 0$, што је контрадикција јер p_{n_0+1} не може имати комплексну нулу, као члан низа полинома ортогоналних у односу на позитивну меру $\mathrm{d}\mu$ на реалној правој.

Овим је показано да формуле (2.10) и (2.11) важе за све $z \in \mathbb{C}$ за које је мера $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ квази-дефинитна.

Коначно, за неко $z \in \mathbb{C}$ за које је мера $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ квази-дефинитна, добијамо

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_0 &= \int (x-z)^2 \mathrm{d}\mu = \int (x-\alpha_0+\alpha_0-z)^2 \mathrm{d}\mu \\
&= \int (x-\alpha_0)^2 \mathrm{d}\mu + 2\int (x-\alpha_0)(\alpha_0-z)\mathrm{d}\mu + \int (\alpha_0-z)^2 \mathrm{d}\mu \\
&= \beta_0\beta_1 + (\alpha_0-z)^2\beta_0 = \beta_0\left[\beta_1 + (z-\alpha_0)^2\right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

2.3 Алгоритам

У овом поглављу представљамо рационални алгоритам за модификацију квадратним фактором, $\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = (x-z)^2\mathrm{d}\mu(x)$, при чему је z произвољан комплексан број такав да је мера $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ квази-дефинитна.

Теорема 2.3.1 *Коефицијенти $\widehat{\alpha}_n$ и $\widehat{\beta}_n$ у трочланој рекурентној релацији за низ полинома ортогоналних у односу на квази-дефинитну меру*

$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = (x-z)^2\mathrm{d}\mu(x)$$

могу да се израчунају на следећи начин:

Почетни услови:

$$f_0 = 0, \quad e_0 = 1.$$

Израчунавање: за $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ рачунати

$$\begin{aligned}
a &= \alpha_i - z - f_i, \\
b &= \begin{cases} \dfrac{a^2}{e_i} & \text{ако је} \quad e_i \neq 0, \\ e_{i-1}\beta_i & \text{ако је} \quad e_i = 0, \end{cases} \\
\widehat{\beta}_i &= (1-e_i)(b+\beta_{i+1}), \\
e_{i+1} &= \frac{b}{b+\beta_{i+1}}, \\
f_{i+1} &= (1-e_{i+1})(a+\alpha_{i+1}-z), \\
\widehat{\alpha}_i &= a + f_{i+1} + z.
\end{aligned}$$

Доказ. Прво претпоставимо да је $p_i(z) \neq 0$ за све $i \in \mathbb{N}_0$. Доказ се изводи користећи математичку индукцију. Показаћемо да за свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи:

$$e_n = -\frac{p_n^2(z)}{\Delta_n}, \quad f_n = \alpha_n - z - \frac{p_n(z)p_{n+1}(z)}{\Delta_n}.$$

За $i = 0$ имамо:

$$\begin{aligned}
a &= \alpha_0 - z - f_0 = \alpha_0 - z = \frac{p_0 p_1}{\Delta_0},\\
b &= \frac{a^2}{e_0} = (\alpha_0 - z)^2,\\
\widehat{\beta}_0 &= 0,\\
e_1 &= \frac{b}{b+\beta_1} = \frac{(\alpha_0 - z)^2}{(\alpha_0 - z)^2 + \beta_1} = -\frac{p_1^2}{\Delta_1},\\
f_1 &= (1 - e_1)(a + \alpha_1 - z)\\
&= \frac{\beta_1(\alpha_0 + \alpha_1 - 2z)}{(\alpha_0 - z)^2 + \beta_1} = \alpha_1 - z - \frac{p_1 p_2}{\Delta_1},\\
\widehat{\alpha}_0 &= a + f_1 + z = \frac{-p_1^2\big(p_0 p_1 + z\Delta_0\big) + \beta_1\big(2p_0 p_1 \Delta_0 + \alpha_1 \Delta_0^2\big)}{\Delta_0 \Delta_1}.
\end{aligned}$$

Нека је тврђење тачно за n. Из Алгоритма за $i = n+1$ следи:

$$\begin{aligned}
a &= \alpha_{n+1} - z - f_{n+1} = \alpha_{n+1} - z - (\widehat{\alpha}_n - a - z)\\
&= \alpha_{n+1} - z - \widehat{\alpha}_n + a + z = \alpha_{n+1} + \frac{p_n p_{n+1}}{\Delta_n} - \widehat{\alpha}_n\\
&= \frac{p_{n+1} p_{n+2}}{\Delta_{n+1}},\\
b &= \frac{a^2}{e_{n+1}} = -\frac{p_{n+2}^2}{\Delta_{n+1}},\\
\widehat{\beta}_{n+1} &= (1 - e_{n+1})(b + \beta_{n+2}) = \beta_{n+1} \frac{\Delta_n \Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}^2},\\
e_{n+2} &= \frac{p_{n+2}^2}{p_{n+2}^2 - \beta_{n+2}\Delta_{n+1}} = -\frac{p_{n+2}^2}{\Delta_{n+2}},\\
f_{n+2} &= (1 - e_{n+2})(a + \alpha_{n+2} - z)\\
&= \left(1 + \frac{p_{n+2}^2}{\Delta_{n+2}}\right)\left(\frac{p_{n+1}p_{n+2}}{\Delta_{n+1}} + \alpha_{n+2} - z\right)\\
&= \frac{\beta_{n+2}\left(p_{n+1}p_{n+2} + \alpha_{n+2}\Delta_{n+1} - z\Delta_{n+1}\right)}{\Delta_{n+2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}_{n+1} = a + f_{n+2} + z &= \frac{p_{n+1}p_{n+2}}{\Delta_{n+1}} + \frac{\beta_{n+2}\left(p_{n+1}p_{n+2} + \alpha_{n+2}\Delta_{n+1} - z\Delta_{n+1}\right)}{\Delta_{n+2}} + z \\
&= \frac{1}{\Delta_{n+1}\Delta_{n+2}}\big(p_{n+1}p_{n+2}\Delta_{n+2} + \Delta_{n+1}\beta_{n+2}p_{n+1}p_{n+2} + \Delta_{n+1}^2\beta_{n+2}\alpha_{n+2} \\
&\quad -z\Delta_{n+1}^2\beta_{n+2} + z\Delta_{n+1}\Delta_{n+2}\big) \\
&= \frac{1}{\Delta_{n+1}\Delta_{n+2}}\big(p_{n+1}p_{n+2}(\beta_{n+2}\Delta_{n+1} - p_{n+2}^2) + \Delta_{n+1}\beta_{n+2}p_{n+1}p_{n+2} \\
&\quad +\Delta_{n+1}^2\beta_{n+2}\alpha_{n+2} - z\Delta_{n+1}p_{n+2}^2\big) \\
&= \frac{-p_{n+1}^2\big(p_np_{n+1} + z\Delta_n\big) + \beta_{n+1}\big(2p_np_{n+1}\Delta_n + \alpha_{n+1}\Delta_n^2\big)}{\Delta_n\Delta_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Ако је $p_i(z) = 0$ за неко i, тада из трочлане рекурентне релације следи

$$p_{i+1}(z) = (z - \alpha_i)p_i(z) - \beta_ip_{i-1}(z) = -\beta_ip_{i-1}(z).$$

Из

$$a = \frac{p_ip_{i+1}}{\Delta_i}, \quad e_i = -\frac{p_i^2}{\Delta_i}$$

следи

$$\frac{a^2}{e_i} = -\frac{p_i^2p_{i+1}^2}{p_i^2\Delta_i} = -\frac{p_{i+1}^2}{p_{i+1}p_i' - p_ip_{i+1}'}.$$

Како је

$$p_{i+1}p_i' - p_ip_{i+1}' = -\beta_ip_{i-1}p_i' = \beta_i(p_ip_{i-1}' - p_{i-1}p_i'),$$

то је

$$\frac{a^2}{e_i} = -\frac{\beta_ip_{i-1}^2(z)}{p_ip_{i-1}' - p_{i-1}p_i'} = \beta_ie_{i-1}.$$

Овим је доказ завршен. $\square$

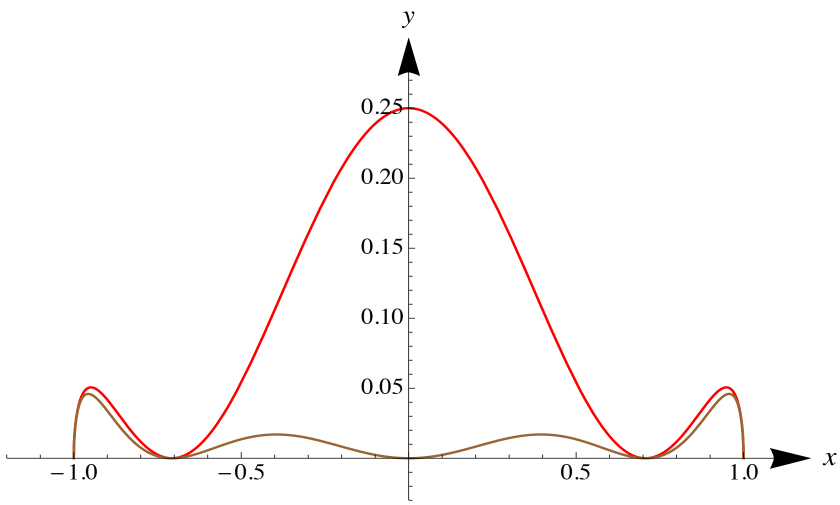
2.4 Примене алгоритма

У овом делу примењујемо теорему 2.3.1 два пута да бисмо израчунали коефицијенте у трочланој рекурентној релацији за низ полинома ортогоналних у односу на модификовану Чебишевљеву меру друге врсте

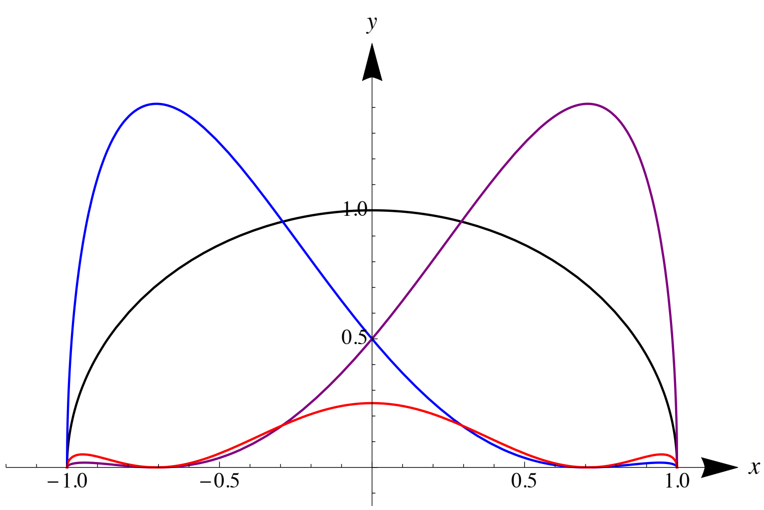
$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) := \widehat{w}(x)\mathrm{d}x = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2\sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x, \quad x \in [-1, 1],$$

као и у односу на меру

$$\mathrm{d}\mu'(x) := w'(x)\mathrm{d}x = x^2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad x \in [-1,1].$$



Слика 2.1: Графици тежинских функција $x \mapsto \widehat{w}(x)$ и $x \mapsto w'(x)$ на интервалу $[-1,1]$



Слика 2.2: Графици тежинских функција $x \mapsto w(x)$, $x \mapsto \widetilde{w}(x)$, $x \mapsto \bar{w}(x)$ и $x \mapsto \widehat{w}(x)$ на интервалу $[-1,1]$

У првом кораку рачунамо коефицијенте $\widetilde{\alpha}_k$, $\widetilde{\beta}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, за низ полинома ортогоналних у односу на меру $\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x) := \widetilde{w}(x)\mathrm{d}x = \left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $x \in [-1,1]$. Затим, користећи израчунате коефицијенте $\widetilde{\alpha}_k$ и $\widetilde{\beta}_k$ применом теореме 2.3.1 добијамо тражене коефицијенте $\widehat{\alpha}_k$ и $\widehat{\beta}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, користећи чињеницу да је $\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = \left(x - \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{d}\widetilde{\mu}(x)$.

На слици 2.2 приказане су тежинске функције $w(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\widetilde{w}(x)$, $\bar{w}(x) = (x + 1/\sqrt{2})^2 w(x)$ и $\widehat{w}(x)$.

Теорема 2.4.1 *Коефицијенти у трочланој рекурентној релацији за низ полинома ортогоналних у односу на меру*

$$\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad x \in [-1,1],$$

су

$$\left(\widetilde{\alpha}_k,\ \widetilde{\beta}_k\right) = \begin{cases} \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{(k+1)(k+3)}, \dfrac{k(k+3)}{4(k+1)^2}\right), & k \equiv 0 \bmod 4, \\[2ex] \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}(k+2)}, \dfrac{k(k+3)}{4(k+2)^2}\right), & k \equiv 1 \bmod 4, \\[2ex] \left(0, \dfrac{k+1}{4(k+2)}\right), & k \equiv 2 \bmod 4, \\[2ex] \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}(k+2)}, \dfrac{k+2}{4(k+1)}\right), & k \equiv 3 \bmod 4, \end{cases}$$

за $k \in \mathbb{N}_0$.

Доказ. Како је ово модификација Чебишевљеве мере друге врсте, коефицијенти α_k и β_k у теореми 2.3.1 су $\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\beta_0 = \pi/2$ и $\beta_k = 1/4$, $k \in \mathbb{N}$, а $z = 1/\sqrt{2}$. Да бисмо доказали теорему показаћемо да су за свако $k \in \mathbb{N}_0$ низови f_k и e_k у теореми 2.3.1 једнаки

$$(f_k,\ e_k) = \begin{cases} \left(-\dfrac{k\sqrt{2}}{2(k+1)}, \dfrac{1}{k+1}\right), & k \equiv 0 \bmod 4, \\[2ex] \left(-\dfrac{(k+1)}{\sqrt{2}(k+2)}, \dfrac{2}{k+2}\right), & k \equiv 1 \bmod 4, \\[2ex] \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{k+2}\right), & k \equiv 2 \bmod 4, \\[2ex] \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), & k \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Доказ следи применом математичке индукције. На почетку показујемо тачност тврђења за $k = 0, 1, 2, 3$.

Директним израчунавањем добијамо:

$k = 0:$

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{\beta}_0 = 0, \quad e_1 = \frac{2}{3}, \quad f_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \widetilde{\alpha}_0 = -\frac{\sqrt{2}}{3};$$

$k = 1:$

$$a = -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{12}, \quad \widetilde{\beta}_1 = \frac{1}{9}, \quad e_2 = \frac{1}{4}, \quad f_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \widetilde{\alpha}_1 = -\frac{1}{3\sqrt{2}};$$

$k = 2:$

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \widetilde{\beta}_2 = \frac{3}{16}, \quad e_3 = 0, \quad f_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \widetilde{\alpha}_2 = 0;$$

$k = 3:$

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{16}, \quad \widetilde{\beta}_3 = \frac{5}{16}, \quad e_4 = \frac{1}{5}, \quad f_4 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \quad \widetilde{\alpha}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Нека је сада тврђење тачно за $k \in \mathbb{N}$. На основу теореме 2.3.1 следи:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{k\sqrt{2}}{2(k+1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}(k+1)}, \quad b = \frac{1}{2(k+1)}, \quad \widehat{\beta}_k = \frac{k(k+3)}{4(k+1)^2},$$

$$e_{k+1} = \frac{2}{k+3}, \quad f_{k+1} = -\frac{k+2}{\sqrt{2}(k+3)}, \quad \widehat{\alpha}_{k+1} = -\frac{\sqrt{2}}{(k+1)(k+3)},$$

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}(k+3)}, \quad b = \frac{1}{4(k+3)}, \quad \widehat{\beta}_{k+1} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+3)^2},$$

$$e_{k+2} = \frac{1}{k+4}, \quad f_{k+2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \widehat{\alpha}_{k+2} = -\frac{1}{\sqrt{2}(k+3)},$$

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \widehat{\beta}_{k+2} = \frac{k+3}{4(k+4)},$$

$$e_{k+3} = 0, \quad f_{k+3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \widehat{\alpha}_{k+3} = 0,$$

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{4(k+4)}, \quad \widehat{\beta}_{k+3} = \frac{k+5}{4(k+4)},$$
$$e_{k+4} = \frac{1}{k+5}, \quad f_{k+4} = -\frac{k+4}{\sqrt{2}(k+5)}, \quad \widehat{\alpha}_{k+4} = \frac{1}{\sqrt{2}(k+5)}.$$

Овим је доказ завршен. $\square$

Теорема 2.4.2 *Коефицијенти у трочланој рекурентној релацији за полиноме ортогоналне у односу на меру*

$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad x \in [-1,1], \tag{2.14}$$

су

$$\widehat{\alpha}_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \widehat{\beta}_0 = \frac{\pi}{16},$$
$$\widehat{\beta}_k = \begin{cases} \dfrac{k}{4(k+2)}, & k \equiv 0 \bmod 4, \\[2ex] \dfrac{1+k}{4(k+3)}, & k \equiv 1 \bmod 4, \\[2ex] \dfrac{k+4}{4(k+2)}, & k \equiv 2 \bmod 4, \\[2ex] \dfrac{5+k}{4(k+3)}, & k \equiv 3 \bmod 4, \end{cases}$$

за $k \in \mathbb{N}_0$.

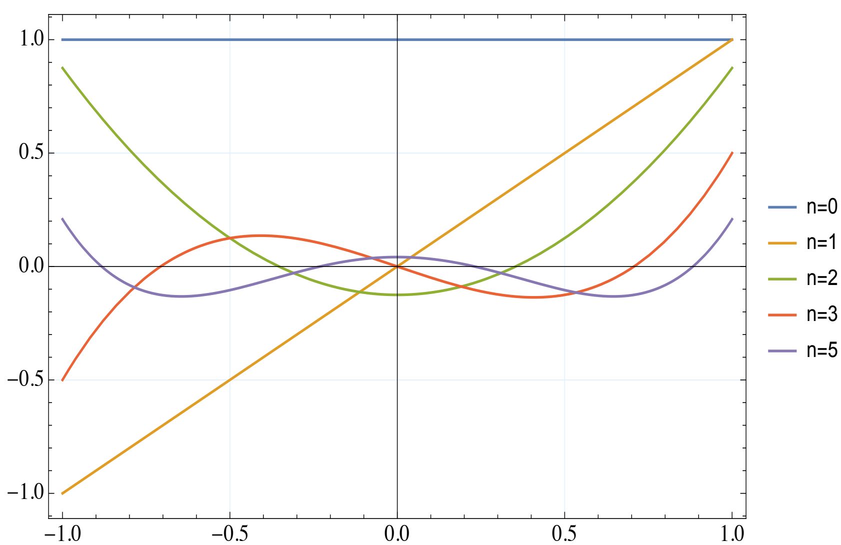
Доказ. Да бисмо доказали теорему показаћемо да су за свако $k \in \mathbb{N}_0$ низови f_k и e_k у теореми 2.3.1 једнаки

$$\left(\widehat{f}_k,\ \widehat{e}_k\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{\sqrt{2}(k+1)}, \dfrac{1}{k+2}\right), & k \equiv 0 \bmod 4, \\[2ex] \left(\dfrac{(k+1)}{\sqrt{2}(k+2)}, \dfrac{2(k+1)}{k(k+3)}\right), & k \equiv 1 \bmod 4, \\[2ex] \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{k+1}\right), & k \equiv 2 \bmod 4, \\[2ex] \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), & k \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Остатак доказа је исти као и доказ теореме 2.4.1. $\square$

Пример 2.4.1 Првих неколико полинома p_k ортогоналних у односу на меру (2.14) су:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= 1,\\
p_1(x) &= x,\\
p_2(x) &= x^2 - \frac{1}{8},\\
p_3(x) &= x^3 - \frac{1}{2}x,\\
p_4(x) &= x^4 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{24},\\
p_5(x) &= x^5 - x^3 + \frac{1}{8}x,\\
p_6(x) &= x^6 - \frac{19}{16}x^4 + \frac{9}{32}x^2 - \frac{1}{128},\\
p_7(x) &= x^7 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{19}{32}x^3 - \frac{3}{64}x,\\
p_8(x) &= x^8 - \frac{9}{5}x^6 + \frac{19}{20}x^4 - \frac{21}{160}x^2 + \frac{3}{1280},\\
p_9(x) &= x^9 - 2x^7 + \frac{5}{4}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{256}x,\\
p_{10}(x) &= x^{10} - \frac{53}{24}x^8 + \frac{13}{8}x^6 - \frac{43}{96}x^4 + \frac{5}{128}x^2 - \frac{1}{2048}.
\end{aligned}
$$



Слика 2.3: Графици полинома $p_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, 5$

На сличан начин добијамо следећу теорему.

Теорема 2.4.3 *Коефицијенти у трочланој рекурентној релацији за полиноме ортогоналне у односу на меру*

$$\mathrm{d}\mu'(x) = x^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x, \quad x \in [-1, 1], \tag{2.15}$$

су

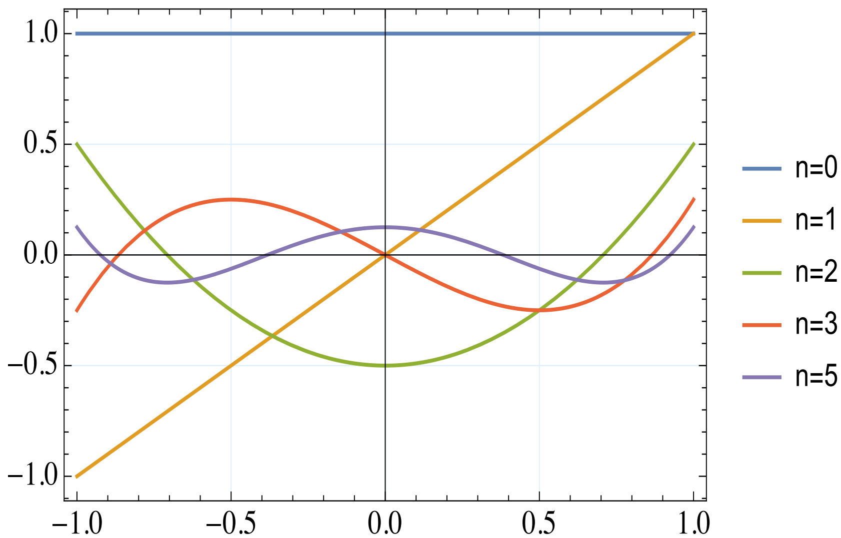
$$\widehat{\alpha}_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \widehat{\beta}_0 = \frac{\pi}{128},$$

$$\widehat{\beta}_k = \begin{cases} \dfrac{k}{4(k+4)}, & k \equiv 0 \bmod 4, \\[2ex] \dfrac{k+7}{4(k+3)}, & k \equiv 1 \bmod 4, \\[2ex] \dfrac{1}{4}, & k \equiv 2 \bmod 4, \\[2ex] \dfrac{1}{4}, & k \equiv 3 \bmod 4, \end{cases}$$

за $k \in \mathbb{N}_0$.

Пример 2.4.2 Првих неколико полинома r_k ортогоналних у односу на меру (2.15) су:

$$\begin{aligned}
r_0(x) &= 1, \\
r_1(x) &= x, \\
r_2(x) &= x^2 - \frac{1}{2}, \\
r_3(x) &= x^3 - \frac{3}{4}x, \\
r_4(x) &= x^4 - x^2 + \frac{1}{8}, \\
r_5(x) &= x^5 - \frac{9}{8}x^3 + \frac{7}{32}x, \\
r_6(x) &= x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{19}{32}x^2 - \frac{3}{64}, \\
r_7(x) &= x^7 - \frac{7}{4}x^5 + \frac{7}{8}x^3 - \frac{13}{128}x, \\
r_8(x) &= x^8 - 2x^6 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{256}, \\
r_9(x) &= x^9 - \frac{13}{6}x^7 + \frac{37}{24}x^5 - \frac{19}{48}x^3 + \frac{11}{384}x, \\
r_{10}(x) &= x^{10} - \frac{5}{2}x^8 + \frac{53}{24}x^6 - \frac{13}{16}x^4 + \frac{43}{384}x^2 - \frac{1}{256}.
\end{aligned}$$



Слика 2.4: Графици полинома $r_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, 5$

Глава 3

Полиноми ортогонални у односу на модификоване Чебишевљеве мере

Савремена теорија ортогоналних полинома бави се конструкцијом и анализом њихових нових класа. У највећем броју случајева истраживачи инспирацију црпу управо из класичних ортогоналних полинома. Њихово уопштавање или сегрегација најчешћи су приступи у процесу конструкције и могу се свести на неки од следећих начина или на њихову комбинацију: измена носача класичне мере или модификација тежинске функције. Тако су у радовима [2], [5], [33], [40], [4] разматране класе ортогоналних полинома на фрагментираном носачу мере.

Неки од начина модификације тежинске функције дати су у претходној глави. У овом поглављу бавићемо се параметризацијом тежинске функције једне од класичних мера. У [27] аутори су разматрали модификацију Чебишевљеве мере која је касније уопштена у раду [19]. Модерна истраживања потпомогнута су моћним компјутерским системима у којима су и специјализовани пакети за рад са ортогоналним полиномима и специјалним функцијама, уопште. Резултати рада [19] у великој мери добијени су захваљујући употреби програмског пакета Mathematica, а нарочито програмског пакета "OrthogonalPolynomials" који је детаљно описан у [14], [17].

3.1 Полиноми ортогонални у односу на модификовану Чебишевљеву меру прве врсте

Нека су дати бројеви $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, и мера

$$\mathrm{d}\mu^{n,s}(x) := w^{n,s}(x)\mathrm{d}x = \frac{\widehat{T}_n^{2s}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

где је $\widehat{T}_n(x) = T_n(x)/2^{n-1} = \cos(n \arccos x)/2^{n-1}$ монични Чебишевљев полином прве врсте n-тог степена. Ова мера генерише низ ортогоналних полинома

$$p_k^{n,s}(x) = p_k^{n,s}(x; \mathrm{d}\mu^{n,s}), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

за који знамо да је $p_n^{n,s} = p_{n,s} = \widehat{T}_n$. Егзистенција овог низа полинома је осигурана јер је $\mathrm{d}\mu^{n,s}(x)$ позитивна мера.

У [27] аутори су разматрали специјалан случај $s = 1$ и доказали следећу теорему, која ће бити коришћена у доказу главног резултата као база индукције.

Теорема 3.1.1 *За свако $n \geq 2$, полиноми $p_k^n(x) = p_k^n(x; \mathrm{d}\mu^n)$, $k \in \mathbb{N}_0$, где је $\mathrm{d}\mu^n(x) = \widehat{T}_n^2(x)/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, задовољавају рекурентну релацију*

$$\begin{aligned} &p_{k+1}^n(x) = x p_k^n(x) - \beta_k^n p_{k-1}^n(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \\ &p_0^n(x) = 1, \quad p_{-1}^n(x) = 0, \end{aligned}$$

при чему је

$$\beta_k^n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2^{2n-1}}, & \textit{ако је } k = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{(-1)^{k/n}}{1+k/n}\right), & \textit{ако је } k \equiv 0 \pmod{n}\ (k \neq 0), \\[2ex] \dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{(-1)^{(k-1)/n}}{1+(k-1)/n}\right), & \textit{ако је } k \equiv 1 \pmod{n}, \\[2ex] \dfrac{1}{4}, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Главни резултат овог поглавља је уопштење теореме 3.1.1 дато у раду [19].

Теорема 3.1.2 *За свако* $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *полиноми* $p_k^{n,s}(x) = p_k^{n,s}(x; \mathrm{d}\mu^{n,s})$, $k \in \mathbb{N}_0$, *задовољавају трочлану рекурентну релацију*

$$\begin{aligned} &p_{k+1}^{n,s}(x) = xp_k^{n,s}(x) - \beta_k^{n,s} p_{k-1}^{n,s}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \\ &p_0^{n,s}(x) = 1, \quad p_{-1}^{n,s}(x) = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

са

$$\beta_0^{n,s} = \frac{\pi}{2^{2ns}} \binom{2s}{s}$$

и за $k \in \mathbb{N}$

$$\beta_k^{n,s} = \begin{cases} \dfrac{k}{4(k+ns)}, & \textit{ако је } k \equiv 0 \pmod{2n}, \\[2ex] \dfrac{k+2ns-1}{4(k+ns-1)}, & \textit{ако је } k \equiv 1 \pmod{2n}, \\[2ex] \dfrac{k+2ns}{4(k+ns)}, & \textit{ако је } k \equiv n \pmod{2n}, \\[2ex] \dfrac{k-1}{4(k+ns-1)}, & \textit{ако је } k \equiv n+1 \pmod{2n}, \\[2ex] \dfrac{1}{4}, & \textit{иначе}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Доказ. Претпоставимо да је за свако $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, низ $\{p_k^{n,s}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ дефинисан са (3.2), при чему је $\beta_k^{n,s}$ дато са (3.3). Очигледно, сваки $p_k^{n,s}$ је моничан полином.

Одредимо најпре коефицијент $\beta_0^{n,s}$. По дефиницији имамо

$$\beta_0^{n,s} = \mu_0^{n,s} = \frac{1}{2^{2(n-1)s}} \int_\pi^0 \frac{\cos^{2s} nt}{\sin t}(-\sin t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{2(n-1)s}} \int_0^\pi \cos^{2s} nt \mathrm{d}t.$$

Даље следи

$$\begin{aligned} \beta_0^{n,s} &= \frac{1}{2^{2(n-1)s}} \int_0^\pi \left(\frac{e^{\mathrm{i}nt} + e^{-\mathrm{i}nt}}{2} \right)^{2s} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2^{2(n-1)s+2s}} \int_0^\pi \sum_{j=0}^{2s} \binom{2s}{j} e^{\mathrm{i}jnt} e^{-\mathrm{i}(2s-j)nt} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2^{2ns}} \int_0^\pi \sum_{j=0}^{2s} \binom{2s}{j} e^{-2\mathrm{i}(s-j)nt} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2ns}} \sum_{j=0}^{2s} \binom{2s}{j} \int_0^{\pi} e^{-2\mathrm{i}(s-j)nt} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^{2ns}} \sum_{j=0}^{2s} \binom{2s}{j} \frac{1 - e^{-2\mathrm{i}(s-j)n\pi}}{2\mathrm{i}(s-j)n} \\
&= \frac{\pi}{2^{2ns}} \binom{2s}{s}.
\end{aligned}
$$

У наставку изоставићемо аргумент полинома ради упрошћења и прегледности израза. Тако ћемо, на пример, уместо $\widehat{T}_n(x)^2 p_{2nk}^{n,s}(x)$ писати $\widehat{T}_n^2 p_{2nk}^{n,s}$.

За наставак доказа кључна је тачност тврђења исказаних следећим релацијама за $k \in \mathbb{N}_0$:

$$
\left.
\begin{aligned}
\widehat{T}_n^2 p_{2nk}^{n,s} &= p_{2n(k+1)}^{n,s-1} + \frac{(2k+2s-2)(2k+2s-1)}{2^{2n}(2k+s-1)(2k+s)} p_{2nk}^{n,s-1}, \\
\widehat{T}_n^2 p_{2nk+j}^{n,s} &= p_{2n(k+1)+j}^{n,s-1} + \frac{k+s}{2^{2j-1}(2k+s)(2k+s+1)} p_{2n(k+1)-j}^{n,s-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2} p_{2nk+j}^{n,s-1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\
\widehat{T}_n^2 p_{2nk+n}^{n,s} &= p_{2n(k+1)+n}^{n,s-1} + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s)(2k+s+1)} p_{2nk+n}^{n,s-1}, \\
\widehat{T}_n^2 p_{2nk+n+j}^{n,s} &= p_{2n(k+1)+n+j}^{n,s-1} \\
&\quad - \frac{2k+2s+1}{2^{2j}(2k+s+1)(2k+s+2)} p_{2n(k+1)+n-j}^{n,s-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2} p_{2nk+n+j}^{n,s-1}, \quad j = 1, \dots, n-1.
\end{aligned}
\right\} \tag{3.4}
$$

Будући да низ полинома са леве стране једнакости у (3.4) очигледно задовољава релацију

$$
\widehat{T}_n^2 p_{k+1}^{n,s} - x \widehat{T}_n^2 p_k^{n,s} + \beta_k^{n,s} \widehat{T}_n^2 p_{k-1}^{n,s} = \widehat{T}_n^2 \left(p_{k+1}^{n,s} - x p_k^{n,s} + \beta_k^{n,s} p_{k-1}^{n,s} \right) = 0
$$

за свако $k \in \mathbb{N}_0$, остаје да покажемо да низ дефинисан десном страном једнакости, рецимо $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, у (3.4) задовољава исту релацију, као и да важи $\widehat{T}_n^2 p_0^{n,s} = q_0$ и $\widehat{T}_n^2 p_1^{n,s} = q_1$.

Да бисмо показали једнакост $q_{i+1} - x q_i + \beta_i^{n,s} q_{i-1} = 0$ за свако $i \in \mathbb{N}$, разликоваћемо осам случајева.

Случај 1: $i \equiv 1 \pmod{2n}$.

У овом случају треба да покажемо да је израз

$$
\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+2} + \frac{k+s}{2^3(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-2} \\
&\quad + \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2} p^{n,s-1}_{2nk+2} \\
&\quad - x\Big(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+1} + \frac{k+s}{2(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2} p^{n,s-1}_{2nk+1}\Big) \\
&\quad + \frac{2k+2s}{2^2(2k+s)}\Big(p^{n,s-1}_{2n(k+1)} + \frac{(2k+2s-2)(2k+2s-1)}{2^{2n}(2k+s-1)(2k+s)} p^{n,s-1}_{2nk}\Big)
\end{aligned}
$$

једнак нули. Како еквивалентни облик гласи

$$
\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+2} - x p^{n,s-1}_{2n(k+1)+1} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)+1} p^{n,s-1}_{2n(k+1)} \\
&- \left(\frac{2k+2s}{2^2(2k+s)} - \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)+1}\right)\left(p^{n,s-1}_{2n(k+1)} + x p^{n,s-1}_{2n(k+1)-1} - \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)-1} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-2}\right) \\
&+ \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2}\left(p^{n,s-1}_{2nk+2} - x p^{n,s-1}_{2nk+1} + \beta^{n,s-1}_{2nk+1} p^{n,s-1}_{2nk}\right),
\end{aligned}
$$

тврђење једноставно закључујемо.

Случај 2: $i \equiv j \pmod{2n}$, $j = 2, \ldots, n-2$.

У овом случају посматрамо израз

$$
\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+j+1} + \frac{k+s}{2^{2j+1}(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-j-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2} p^{n,s-1}_{2nk+j+1} \\
&\quad - x\Big(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+j} + \frac{k+s}{2^{2j-1}(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-j} \\
&\quad + \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2} p^{n,s-1}_{2nk+j}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+j-1} + \frac{k+s}{2^{2j-3}(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-j+1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2} p^{n,s-1}_{2nk+j-1}\Big).
\end{aligned}
$$

У еквивалентном облику гласи

$$
\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+j+1} - xp^{n,s-1}_{2n(k+1)+j} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)+1} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+j-1} \\
&\quad + u^{(j)}_{k,s}\left(p^{n,s-1}_{2n(k+1)-j+1} - xp^{n,s-1}_{2n(k+1)-j} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)-j} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-j-1}\right) \\
&\quad + v^{(n)}_{k,s}\left(p^{n,s-1}_{2nk+j+1} - xp^{n,s-1}_{2nk+j} + \beta^{n,s-1}_{2nk+j} p^{n,s-1}_{2nk+j-1}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

где је

$$
u^{(j)}_{k,s} = \frac{k+s}{2^{2j-1}(2k+s)(2k+s+1)} \quad \text{и} \quad v^{(n)}_{k,s} = \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2}.
$$

Јасно је да је претходни израз једнак нули.

Случај 3: $i \equiv n-1 \pmod{2n}$.

Сада добијамо

$$
\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n} + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2nk+n} \\
&\quad - x\biggl(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-1} + \frac{k+s}{2^{2n-3}(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-n+1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2} p^{n,s-1}_{2nk+n-1}\biggr) \\
&\quad + \frac{1}{4}\biggl(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-2} + \frac{k+s}{2^{2n-5}(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-n+2} \\
&\quad + \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2} p^{n,s-1}_{2nk+n-2}\biggr),
\end{aligned}
$$

што можемо написати као

$$
\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n} - xp^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-1} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-1} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-2} \\
&\quad + u^{(n)}_{k,s}\left(p^{n,s-1}_{2n(k+1)-n+2} - xp^{n,s-1}_{2n(k+1)-n+1} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)-n+1} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-n}\right) \\
&\quad + v^{(n)}_{k,s}\left(p^{n,s-1}_{2nk+n} - xp^{n,s-1}_{2nk+n-1} + \beta^{n,s-1}_{2nk+n-1} p^{n,s-1}_{2nk+n-2}\right),
\end{aligned}
$$

па је све једнако нули. Сада је

$$
u^{(n)}_{k,s} = \frac{k+s}{2^{2n-3}(2k+s)(2k+s+1)} \quad \text{и} \quad v^{(n)}_{k,s} = \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2}.
$$

Случај 4: $i \equiv n \pmod{2n}$.

Одговарајући изрази за овај случај постају

$$\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+1} - \frac{2k+2s+1}{4(2k+s+1)(2k+s+2)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2} p^{n,s-1}_{2nk+n+1} \\
&\quad - x\Big(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n} + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2nk+n}\Big) \\
&\quad + \frac{2k+2s+1}{4(2k+s+1)}\Big(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-1} \\
&\quad + \frac{k+s}{2^{2n-3}(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-n+1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s-1)(2k+2s)}{2^{2n}(2k+s)^2} p^{n,s-1}_{2nk+n-1}\Big),
\end{aligned}$$

које можемо написати у облику

$$\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+1} - x p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)+n} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s)(2k+s+1)}\left(p^{n,s-1}_{2nk+n+1} - x p^{n,s-1}_{2nk+n} + \beta^{n,s-1}_{2nk+n} p^{n,s-1}_{2nk+n-1}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Јасно је да је претходни израз једнак нули.

Случај 5: $i \equiv n+1 \pmod{2n}$.

У овом случају имамо

$$\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+2} + \frac{2k+2s+1}{2^4(2k+s+1)(2k+s+2)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-2} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2} p^{n,s-1}_{2nk+n+2} \\
&\quad - x\Big(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+1} - \frac{2k+2s+1}{2^2(2k+s+1)(2k+s+2)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2} p^{n,s-1}_{2nk+n+1}\Big) \\
&\quad + \frac{2k+1}{2^2(2k+s+1)}\Big(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n} + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s)(2k+s+1)} p^{n,s-1}_{2nk+n}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+2} - xp^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+1} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+1} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n} \\
&\quad - u_{k,s}\left(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n} - xp^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-1} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-1} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-2}\right) \\
&\quad + v^{(n)}_{k,s}\left(p^{n,s-1}_{2nk+n+2} - xp^{n,s-1}_{2nk+n+1} + \beta^{n,s-1}_{2nk+n+1} p^{n,s-1}_{2nk+n}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

где је

$$
u_{k,s} = \frac{2k+2s+1}{(2k+s+1)(2k+s+2)} \quad \text{и} \quad v^{(n)}_{k,s} = \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2}.
$$

Случај 6: $i \equiv n+j+1 \pmod{2n}$, $j = 1, \ldots, n-3$.

Сада имамо израз

$$
\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+j+2} + \frac{2k+2s+1}{2^{2(j+2)}(2k+s+1)(2k+s+2)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-j-2} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2} p^{n,s-1}_{2nk+n+j+2} \\
&\quad - x\Big(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+j+1} - \frac{2k+2s+1}{2^{2(j+1)}(2k+s+1)(2k+s+2)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-j-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2} p^{n,s-1}_{2nk+n+j+1}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+j} - \frac{2k+2s+1}{2^{2j}(2k+s+1)(2k+s+2)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-j} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2} p^{n,s-1}_{2nk+n+j}\Big),
\end{aligned}
$$

који се своди на

$$
\begin{aligned}
&p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+j+2} - xp^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+j+1} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+j+1} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n+j} \\
&\quad - u^{(j)}_{k,s}\left(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-j} - xp^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-j-1} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-j-1} p^{n,s-1}_{2n(k+1)+n-j-2}\right) \\
&\quad + v^{(n)}_{k,s}\left(p^{n,s-1}_{2nk+n+j+2} - xp^{n,s-1}_{2nk+n+j+1} + \beta^{n,s-1}_{2nk+n+j+1} p^{n,s-1}_{2nk+n+j}\right),
\end{aligned}
$$

и једнак је нули једноставном анализом сваког реда претходног израза. У овом случају је

$$
u^{(j)}_{k,s} = \frac{2k+2s+1}{2^{2j+2}(2k+s+1)(2k+s+2)} \quad \text{и} \quad v^{(n)}_{k,s} = \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2}.
$$

Случај 7: $i \equiv 2n-1 \pmod{2n}$.

Како се

$$\begin{aligned}
&p_{2n(k+2)}^{n,s-1} + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)(2k+s+2)} p_{2n(k+1)}^{n,s-1} \\
&\quad - x\Big(p_{2n(k+2)-1}^{n,s-1} - \frac{2k+2s+1}{2^{2n-1}(2k+s+1)(2k+s+2)} p_{2n(k+1)+1}^{n,s-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2} p_{2n(k+1)-1}^{n,s-1}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big(p_{2n(k+2)-2}^{n,s-1} + \frac{2k+2s+1}{2^{2n-2}(2k+s+1)(2k+s+2)} p_{2n(k+1)+2}^{n,s-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2} p_{2n(k+1)-2}^{n,s-1}\Big)
\end{aligned}$$

своди на

$$\begin{aligned}
&p_{2n(k+2)}^{n,s-1} - xp_{2n(k+2)-1}^{n,s-1} + \beta_{2n(k+2)-1}^{n,s-1} p_{2n(k+2)-2}^{n,s-1} \\
&\quad - u_{k,s}^{(n)}\left(p_{2n(k+1)+2}^{n,s-1} - xp_{2n(k+1)+1}^{n,s-1} + \beta_{2n(k+1)+1}^{n,s-1} p_{2n(k+1)}^{n,s-1}\right) \\
&\quad + v_{k,s}^{(n)}\left(p_{2n(k+1)}^{n,s-1} - xp_{2n(k+1)-1}^{n,s-1} + \beta_{2n(k+1)-1}^{n,s-1} p_{2n(k+1)-2}^{n,s-1}\right),
\end{aligned}$$

то је последње једнако нули јер је сваки ред једнак нули. У овом случају је

$$u_{k,s}^{(n)} = \frac{2k+2s+1}{2^{2n-1}(2k+s+1)(2k+s+2)} \quad \text{и} \quad v_{k,s}^{(n)} = \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2}.$$

Случај 8: $i \equiv 2n \pmod{2n}$.

Сада имамо израз

$$\begin{aligned}
&p_{2n(k+2)+1}^{n,s-1} + \frac{k+s+1}{2(2k+s+2)(2k+s+3)} p_{2n(k+2)-1}^{n,s-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s+1)(2k+2s+2)}{2^{2n}(2k+s+2)^2} p_{2n(k+1)+1}^{n,s-1} \\
&\quad - x\Big(p_{2n(k+2)}^{n,s-1} + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)(2k+s+2)} p_{2n(k+1)}^{n,s-1}\Big) \\
&\quad + \frac{2(k+1)}{4(2k+s+2)}\Big(p_{2n(k+2)-1}^{n,s-1} \\
&\quad - \frac{2k+2s+1}{2^{2n-1}(2k+s+1)(2k+s+2)} p_{2n(k+1)+1}^{n,s-1} \\
&\quad + \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)^2} p_{2n(k+1)-1}^{n,s-1}\Big),
\end{aligned}$$

који се своди на

$$p^{n,s-1}_{2n(k+2)+1} - xp^{n,s-1}_{2n(k+2)} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+2)} p^{n,s-1}_{2n(k+2)-1}$$
$$+ \frac{(2k+2s)(2k+2s+1)}{2^{2n}(2k+s+1)(2k+s+2)} \left(p^{n,s-1}_{2n(k+1)+1} - xp^{n,s-1}_{2n(k+1)} + \beta^{n,s-1}_{2n(k+1)} p^{n,s-1}_{2n(k+1)-1} \right)$$

и једнак је нули јер је сваки ред једнак нули.

Сада ћемо показати следећу једнакост

$$\widehat{T}_n^2 = p^{n,s-1}_{2n} + \frac{(2s-2)(2s-1)}{2^{2n}(s-1)s}. \tag{3.5}$$

Познато је да за моничне Чебишевљеве полиноме прве врсте $\widehat{T}_n$ важи $\widehat{T}_n^2 = 1/2^{2n-1} + \widehat{T}_{2n}$. Користећи рекурентну релацију за Чебишевљеве полиноме $\widehat{T}_{n+1} = x\widehat{T}_n - \widehat{T}_{n-1}/4$ и једнакост

$$\beta^{n,s}_n = \frac{1+2s}{4(1+s)} = \frac{1}{4} + \frac{s}{4(1+s)},$$

добијамо

$$p^{n,s}_{n+1} = xp^{n,s}_n - \beta^{n,s}_n p^{n,s}_{n-1} = \widehat{T}_{n+1} - \frac{s}{4(s+1)}\widehat{T}_{n-1},$$
$$p^{n,s}_{n+2} = xp^{n,s}_{n+1} - \beta^{n,s}_{n+1} p^{n,s}_n = \widehat{T}_{n+2} - \frac{sx}{4(s+1)}\widehat{T}_{n-1} + \frac{s}{4(s+1)}\widehat{T}_n.$$

Ако означимо са

$$u_0 = -\frac{s}{4(s+1)}\widehat{T}_{n-1}, \quad u_1 = -\frac{sx}{4(s+1)}\widehat{T}_{n-1} + \frac{s}{4(s+1)}\widehat{T}_n,$$

можемо да запишемо

$$p^{n,s}_{n+k} = \widehat{T}_{n+k} + u_{k-1},$$

где низ полинома u_k, $k = 0, \dots, n-1$, задовољава релацију

$$u_{k+1} = xu_k - \frac{1}{4}u_{k-1}.$$

Применом математичке индукције лако можемо да покажемо да важи

$$u_k = -\frac{s}{4(s+1)}(\widehat{U}_k \widehat{T}_{n-1} - \widehat{U}_{k-1}\widehat{T}_n),$$

где је $\widehat{U}_k$ монични Чебишевљев полином друге врсте k-тог степена.

Сада имамо

$$\begin{aligned} p_{2n}^{n,s} = \widehat{T}_{2n} + u_{n-1} &= \widehat{T}_{2n} - \frac{s}{4(s+1)}(\widehat{U}_{n-1}\widehat{T}_{n-1} - \widehat{U}_{n-2}\widehat{T}_n) \\ &= \widehat{T}_{2n} - \frac{s}{4(s+1)}\frac{1}{2^{2n-3}}, \end{aligned}$$

одакле следи

$$p_{2n}^{n,s} = \widehat{T}_n^2 - \frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{s}{s+1}\frac{1}{2^{2n-1}} = \widehat{T}_n^2 - \frac{1}{2^{2n-1}}\frac{2s+1}{s+1},$$

што је заправо (3.5) за $s := s+1$.

Треба да покажемо да је $\widehat{T}_n^2 p_1^{n,s} = q_1$. Имамо

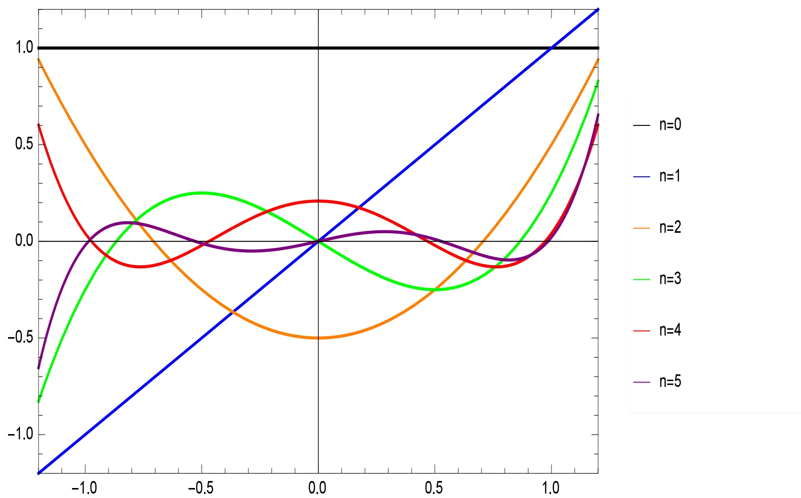
$$\begin{aligned} q_1 &= p_{2n+1}^{n,s-1} + \frac{1}{2(s+1)}p_{2n-1}^{n,s-1} + \frac{2s-1}{2^{2n-1}s}p_1^{n,s-1} \\ &= xp_{2n}^{n,s-1} - \beta_{2n}^{n,s-1}p_{2n-1}^{n,s-1} + \frac{1}{2(s+1)}p_{2n-1}^{n,s-1} + \frac{2s-1}{2^{2n-1}s}x \\ &= xp_{2n}^{n,s-1} - \frac{1}{2(s+1)}p_{2n-1}^{n,s-1} + \frac{1}{2(s+1)}p_{2n-1}^{n,s-1} + \frac{2s-1}{2^{2n-1}s}x \\ &= \left(p_{2n}^{n,s-1} + \frac{2s-1}{2^{2n-1}s}\right)x = \widehat{T}_n^2 p_1^{n,s}. \end{aligned}$$

Остаје да се докаже ортогоналност низа $p_k^{n,s}$, $k \in \mathbb{N}_0$, за $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Сада користимо математичку индукцију по s. Случај $s = 1$ је управо теорема 3.1.1. Ако претпоставимо да је за $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $p_k^{n,s-1}$, $k \in \mathbb{N}_0$, низ моничних полинома који је ортогоналан у односу на тежинску функцију $w^{n,s-1}$, онда ортогоналност низа $p_k^{n,s}$, $k \in \mathbb{N}_0$, једноставно следи из релације $w^{n,s} = \widehat{T}_n^2 w^{n,s-1}$. После множења релације (3.4) са одговарајућим $p_j^{n,s-1}$ и интеграљењем обе стране једнакости добијамо

$$\int_{-1}^{1} p_m^{n,s}p_j^{n,s-1}w^{n,s}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \widehat{T}_n^2 p_m^{n,s}p_j^{n,s-1}w^{n,s-1}\mathrm{d}x = 0.$$

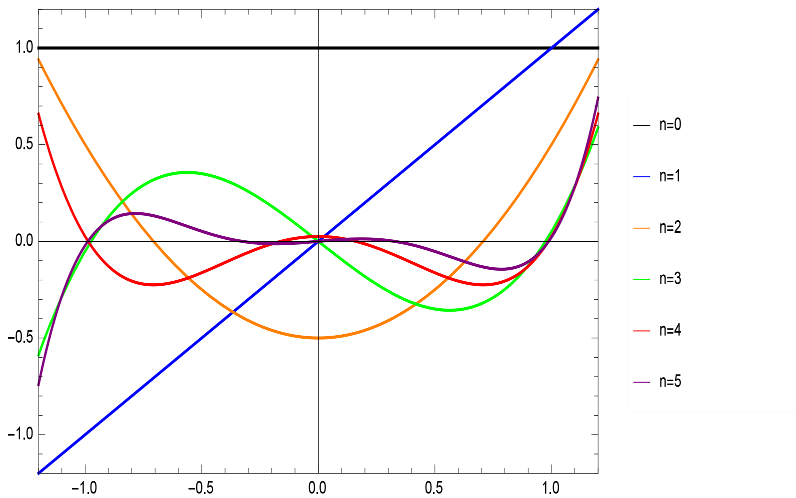
Овим је доказ завршен. $\square$



Слика 3.1: Графици полинома $p_k^{3,2}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Пример 3.1.1 Првих неколико полинома $p_k^{3,2}(x)$ и $p_k^{2,4}(x)$ ортогоналних у односу на меру (3.1) за $n = 3,\ s = 2$ и $n = 2,\ s = 4$ редом су:

$$
\begin{aligned}
p_0^{3,2}(x) &= 1,\\
p_1^{3,2}(x) &= x,\\
p_2^{3,2}(x) &= x^2 - \frac{1}{2},\\
p_3^{3,2}(x) &= x^3 - \frac{3}{4}x,\\
p_4^{3,2}(x) &= x^4 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{5}{24},\\
p_5^{3,2}(x) &= x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{13}{48}x,\\
p_6^{3,2}(x) &= x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{5}{96},\\
p_7^{3,2}(x) &= x^7 - \frac{13}{8}x^5 + \frac{23}{32}x^3 - \frac{11}{128}x,\\
p_8^{3,2}(x) &= x^8 - 2x^6 + \frac{41}{32}x^4 - \frac{19}{64}x^2 + \frac{5}{256},\\
p_9^{3,2}(x) &= x^9 - \frac{9}{4}x^7 + \frac{27}{16}x^5 - \frac{61}{128}x^3 + \frac{21}{512}x,\\
p_{10}^{3,2}(x) &= x^{10} - \frac{13}{5}x^8 + \frac{191}{80}x^6 - \frac{37}{40}x^4 + \frac{371}{2560}x^2 - \frac{7}{1024}.
\end{aligned}
$$



Слика 3.2: Графици полинома $p_k^{2,4}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$
\begin{aligned}
p_0^{2,4}(x) &= 1,\\
p_1^{2,4}(x) &= x,\\
p_2^{2,4}(x) &= x^2 - \frac{1}{2},\\
p_3^{2,4}(x) &= x^3 - \frac{19}{20}x,\\
p_4^{2,4}(x) &= x^4 - x^2 + \frac{1}{40},\\
p_5^{2,4}(x) &= x^5 - \frac{13}{12}x^3 + \frac{5}{48}x,\\
p_6^{2,4}(x) &= x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{25}{48}x^2 - \frac{1}{96},\\
p_7^{2,4}(x) &= x^7 - \frac{53}{28}x^5 + \frac{53}{56}x^3 - \frac{23}{448}x,\\
p_8^{2,4}(x) &= x^8 - 2x^6 + \frac{31}{28}x^4 - \frac{3}{28}x^2 + \frac{1}{896},\\
p_9^{2,4}(x) &= x^9 - \frac{17}{8}x^7 + \frac{43}{32}x^5 - \frac{101}{448}x^3 + \frac{27}{3584}x,\\
p_{10}^{2,4}(x) &= x^{10} - \frac{5}{2}x^8 + \frac{67}{32}x^6 - \frac{41}{64}x^4 + \frac{171}{3584}x^2 - \frac{3}{7168},
\end{aligned}
$$

а њихови графици су приказани на сликама 3.1 и 3.2.

3.2 Полиноми ортогонални у односу на модификовану Чебишевљеву меру друге врсте

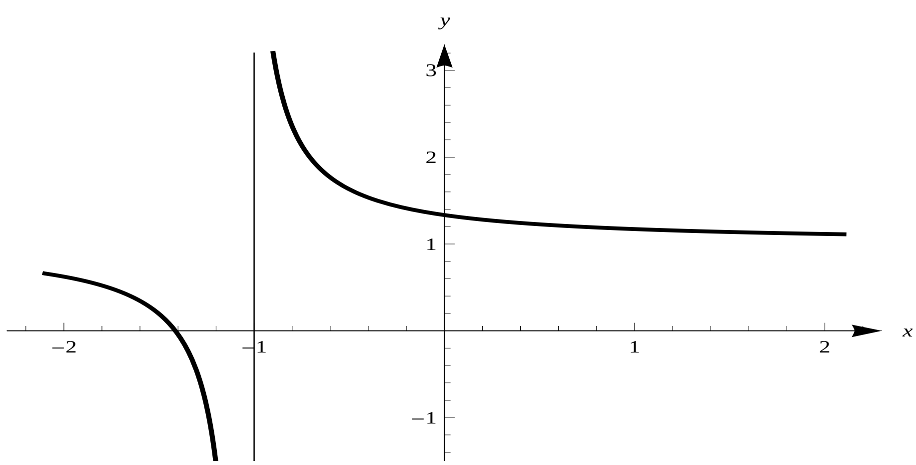
Конструишемо низ полинома $\widehat{P}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, ортогоналан у односу на модификовану Чебишевљеву меру друге врсте

$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = \frac{x + \frac{1}{2}c + \frac{1}{c}}{x + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2c}} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x, \quad x \in [-1, 1],$$

где је c позитиван реалан број. Дакле, изучавамо полиноме ортогоналне у односу на момент-функционелу

$$\mathcal{L}(P) = \int_{-1}^{1} P(x) \frac{x + \frac{1}{2}c + \frac{1}{c}}{x + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2c}} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x, \quad P \in \mathcal{P}, \tag{3.6}$$

где је $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Специјалан случај $c = 1$ разматран је у [17]. Да бисмо појаснили случај, на слици 3.3 је приказан график рационалног дела тежинске функције за $c = \sqrt{2}$. Када c тежи ка 1 сингуларитет рационалног дела тежи ка -1, када c прође 1 сингуларитет тежи ка $-\infty$. Потпуно симетрична ситуација настаје за $c < 0$. Наиме, стављајући $c := -c$, и после смене $x := -x$, добијамо исту линеарну функционелу, па надаље разматрамо само случај $c > 0$. Нула рационалног дела је увек по модулу већа од сингуларитета.



Слика 3.3: График рационалног дела тежине у (3.6)

Посматрамо модификовану меру

$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = \frac{x-\gamma}{x-\delta}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad x \in [-1,1],$$

где је $\gamma = -\frac{1}{2}c - \frac{1}{c}$ и $\delta = -\frac{1}{2}c - \frac{1}{2c}$. Решавамо проблем налажења коефицијената у рекурентној релацији $\widehat{\alpha}_k = \alpha_k(\mathrm{d}\widehat{\mu})$, $\widehat{\beta}_k = \beta_k(\mathrm{d}\widehat{\mu})$, знајући да су коефицијенти за Чебишевљеву меру друге врсте $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 1/4$ за $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = \pi/2$.

Низ ортогоналних полинома $\widehat{P}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, постоји будући да је мера $\mathrm{d}\widehat{\mu}(x)$ позитивна на $[-1,1]$ и да има коначне све моменте

$$\mathcal{L}(x^k) = \int_{-1}^{1} x^k \frac{x+\frac{1}{2}c+\frac{1}{c}}{x+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2c}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Проблем решавамо у два корака. Прво, посматрамо модификацију Чебишевљеве мере друге врсте дељењем линеарним фактором, при чему користимо Алгоритам 1. На тај начин добијамо коефицијенте $\widetilde{\alpha}_k$ и $\widetilde{\beta}_k$. Затим примењујемо Алгоритам 2 за одређивање коефицијената у односу на модификовану меру која настаје множењем линеарним фактором, $\mathrm{d}\widehat{\mu}(x)$, и коначно добијамо $\widehat{\alpha}_k$ и $\widehat{\beta}_k$, за $k \in \mathbb{N}_0$.

Сличне тежинске функције, као што су на пример

$$(1-x^2)(1-k^2x^2)^{-1/2}, \quad k^2 < 1,$$

су изучаване у [67]. Такође постоји велики број резултата за такозване Сеге[1]-Бернштајн тежинске функције дате са

$$w_1(x) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad w_2(x) = \rho(x)\sqrt{1-x^2}, \quad w_3(x) = \rho(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

при чему је ρ полином који је позитиван на интервалу $(-1,1)$ (видети [69], [9]). Слична тежинска функција

$$w(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\mu x^2}, \quad \mu \leq 1,$$

такође је изучавана у [34]. За Чебишевљеву меру прве врсте иста модификација је проучавана у [37]. Коначно, у [5] могу се наћи слични резултати чак и за случај када носач мере има две дисјунктне компоненте.

[1] Gábor Szegő (1895–1985), мађарски математичар.

3.2.1 Линеарни делиоци

Разматрамо модификовану меру која се добија дељењем линеарним фактором

$$\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x) = \frac{1}{x-\delta}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad x \in [-1,1], \quad \delta \in \mathbb{R} \setminus [-1,1],$$

где је $\delta = -\frac{1}{2}c - \frac{1}{2c}$.

Да бисмо могли да применимо модификациони Алгоритам 1, неопходна нам је вредност Кошијевог интеграла

$$\rho_0(\delta) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\delta - x}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \delta \in \mathbb{R} \setminus [-1,1],$$

који израчунавамо у следећој леми.

Лема 3.2.1 *Вредност Кошијевог интеграла је*

$$\rho_0(\delta) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\delta - x}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = (\sqrt{\delta^2-1}+\delta)\pi.$$

Доказ. Користећи другу Ојлерову[2] смену $\sqrt{1-x^2} = 1 + mx$, добијамо

$$x = -\frac{2m}{1+m^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2(m^2-1)}{(1+m^2)^2}\mathrm{d}m.$$

Сада имамо

$$\int \frac{1}{\delta - x}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{(m^2-1)^2}{(\delta m^2 + 2m + \delta)(1+m^2)^2}\,\mathrm{d}m.$$

Овај интеграл можемо израчунати као интеграл рационалне функције. Даље имамо

$$\frac{(m^2-1)^2}{(\delta m^2 + 2m + \delta)(1+m^2)^2} = \frac{\delta}{1+m^2} - \frac{2m}{(1+m^2)^2} + \frac{1-\delta^2}{\delta m^2 + 2m + \delta}.$$

Остатак доказа је сада очигледан. □

Пре него што докажемо следећу теорему дајемо Алгоритам 1 који ћемо користити у доказу теореме 3.2.1. Оба модификациона алгоритма могу се наћи, на пример, у [27, стр. 123–129].

[2]Leonhard Euler (1707–1783), швајцарски математичар и физичар.

Алгоритам 1 (Модификација линеарним делиоцем)

Почетни услови:

$$\widetilde{\alpha}_0 = \delta - \frac{\beta_0}{\rho_0(\delta)}, \quad \widetilde{\beta}_0 = -\rho_0(\delta), \quad q_0 = -\frac{\beta_0}{\rho_0(\delta)}. \tag{3.7}$$

Израчунавање: За $k = 1, 2, \ldots, n-1$ рачунати

$$e_{k-1} = \alpha_{k-1} - \delta - q_{k-1}, \tag{3.8}$$
$$\widetilde{\beta}_k = q_{k-1} e_{k-1},$$
$$q_k = \beta_k / e_{k-1}, \tag{3.9}$$
$$\widetilde{\alpha}_k = q_k + e_{k-1} + \delta. \tag{3.10}$$

Теорема 3.2.1 *Коефицијенти у трочланој релацији за меру*

$$\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x) = \frac{1}{x + \frac{c}{2} + \frac{1}{2c}} \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x, \quad x \in [-1, 1],$$

су

$$\widetilde{\alpha}_0 = -\frac{1}{2c}, \qquad \widetilde{\alpha}_k = 0 \quad \text{за} \quad k \geq 1$$

и

$$\widetilde{\beta}_0 = \frac{\pi}{c}, \qquad \widetilde{\beta}_k = \frac{1}{4} \quad \text{за} \quad k \geq 1.$$

Доказ. Коефицијенти $\widetilde{\alpha}_0$ и $\widetilde{\beta}_0$ су израчунати директно помоћу (3.7). Такође, корисно је израчунати коефицијенте $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\beta}_1$ као базу математичке индукције. Применом Алгоритма 1 за $k = 1$ добијамо

$$\widetilde{\alpha}_1 = 0, \qquad \widetilde{\beta}_1 = \frac{1}{4}.$$

Остатак доказа следи применом математичке индукције. Дакле, нека је тврђење тачно за k и треба доказати тачност тврђења за $k+1$. Комбиновањем (3.8) и (3.10) добија се

$$\widetilde{\alpha}_k = 0 = q_k + e_{k-1} + \delta = q_k - \delta - q_{k-1} + \delta,$$

одакле је

$$q_k = q_{k-1}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) следи

$$\widetilde{\alpha}_{k+1} = q_{k+1} + e_k + \delta = q_{k+1} - \delta - q_k + \delta = q_{k+1} - q_k.$$

Користећи (3.9) добијамо

$$q_{k+1} = \frac{1}{4e_k},$$

а из (3.11)

$$e_k = e_{k-1}. \tag{3.12}$$

Сада је

$$\widetilde{\alpha}_k = \frac{1}{4e_{k-1}} - q_k = q_k - q_k = 0.$$

Из (3.11) и (3.12) следи

$$\widetilde{\beta}_{k+1} = q_k e_k = q_{k-1}e_{k-1} = \frac{1}{4},$$

чиме је доказ завршен. □

3.2.2 Линеарни фактори

Посматрамо модификацију мере линеарним фактором

$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = (x-\gamma)\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x), \quad x \in [-1,1], \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus [-1,1],$$

где је $\gamma = -\frac{1}{2}c - \frac{1}{c}$.

Пре него што представимо Алгоритам 2, треба да нагласимо да у овом алгоритму користимо већ израчунате коефицијенте $\widetilde{\alpha}_k$ и $\widetilde{\beta}_k$ да бисмо израчунали коефицијенте у трочланој рекурентој релацији за меру $\mathrm{d}\widehat{\mu}(x)$, $\widehat{\alpha}_k$ и $\widehat{\beta}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Алгоритам 2 (Модификација линеарним фактором)

Почетни услов:

$$e_{-1} = 0.$$

Израчунавање: За $k = 0, 1, \ldots, n-1$ рачунати

$$q_k = \widetilde{\alpha}_k - e_{k-1} - \gamma, \tag{3.13}$$

$$\widehat{\beta}_k = (\widetilde{\alpha}_0 - \gamma)\widetilde{\beta}_0 \quad \text{за} \quad k = 0,$$

$$\widehat{\beta}_k = q_k e_{k-1} \quad \text{за} \quad k > 0, \tag{3.14}$$

$$e_k = \widetilde{\beta}_{k+1}/q_k, \tag{3.15}$$

$$\widehat{\alpha}_k = \gamma + q_k + e_k. \tag{3.16}$$

Теорема 3.2.2 *Коефицијенти у трочланој рекурентној релацији за меру*

$$\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = \frac{x + \frac{c}{2} + \frac{1}{c}}{x + \frac{c}{2} + \frac{1}{2c}} \sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x, \quad x \in [-1, 1],$$

су

$$\widehat{\alpha}_k = -\frac{Apq^k}{(1 + pq^k)(1 + pq^{k+1})}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.17}$$

и

$$\widehat{\beta}_k = \frac{(1 + pq^{k-1})(1 + pq^{k+1})}{4(1 + pq^k)^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.18}$$

где смо означили

$$A = \frac{c^4 + 4}{c(2 + c^2 + \sqrt{c^4 + 4})}, \quad p = \frac{\sqrt{c^4 + 4} - c^2}{\sqrt{c^4 + 4} + c^2}, \quad q = \frac{2 + c^2 - \sqrt{c^4 + 4}}{2 + c^2 + \sqrt{c^4 + 4}}.$$

Доказ. Показаћемо да је

$$e_k = \frac{2 + c^2 - \sqrt{c^4 + 4}}{4c} \frac{1 + pq^k}{1 + pq^{k+1}}, \qquad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.19}$$

одакле остатак доказа ове теореме следи директно. Доказ изводимо применом математичке индукције. За $k = 0$ из (3.19) добијамо $e_0 = c/(2+2c^2)$ што такође можемо добити из Алгоритма 2 стављајући да је $k = 0$. Дакле, нека је тврђење тачно за $k - 1$. Из (3.13) и (3.15) следи

$$e_k = \frac{1/4}{q_k} = -\frac{1}{4(e_{k-1} + \gamma)}. \tag{3.20}$$

Елементарним рачуном добијамо

$$-4\Big(\frac{2 + c^2 - \sqrt{c^4 + 4}}{4c} \frac{1 + pq^{k-1}}{1 + pq^k} - \frac{c}{2} - \frac{1}{c}\Big) = \frac{4c}{2 + c^2 - \sqrt{c^4 + 4}} \frac{1 + pq^{k+1}}{1 + pq^k}.$$

Израз на десној страни претходне једнакости је $1/e_k$, што се управо и тврдило у (3.20).

Из (3.14) и (3.15) следи

$$\widehat{\beta}_k = q_k e_{k-1} = \frac{\widetilde{\beta}_{k+1}}{e_k} e_{k-1} = \frac{1}{4} \frac{e_{k-1}}{e_k},$$

што је заправо (3.18).

Сада, (3.17) је директна последица (3.16) и (3.19). □

На крају овог поглавља, у следеће две теореме дајемо експлицитни израз за низ полинома $\widehat{P}_n$.

Теорема 3.2.3 *Низ полинома ортогоналан у односу на меру* $\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x)$ *може се изразити помоћу*

$$\widetilde{P}_k(x) = U_k(x) - \widetilde{\alpha}_0 U_{k-1}(x),$$

где је $\widetilde{\alpha}_0 = -1/(2c)$, *а* U_n *је Чебишевљев полином друге врсте* n*-тог степена.*

Доказ. Тврђење је тачно за $k = 1$ и $k = 2$. Заиста, имамо

$$\widetilde{P}_1(x) = (x - \widetilde{\alpha}_0)\widetilde{P}_0(x) = x - \widetilde{\alpha}_0 = U_1(x) - \widetilde{\alpha}_0 U_0(x)$$

и

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_2(x) &= (x - \widetilde{\alpha}_1)\widetilde{P}_1(x) - \widetilde{\beta}_1\widetilde{P}_0(x) = x(U_1(x) - \widetilde{\alpha}_0 U_0(x)) - \beta_1 U_0 \\ &= xU_1(x) - \beta_1 U_0(x) - \widetilde{\alpha}_0 x U_0(x) = U_2(x) - \widetilde{\alpha}_0 U_1(x).\end{aligned}$$

Нека је тврђење тачно за $k-1$ и k, и треба да докажемо тачност за $k+1$. Сада је

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{k+1}(x) &= (x - \widetilde{\alpha}_k)\widetilde{P}_k(x) - \widetilde{\beta}_k\widetilde{P}_{k-1}(x) \\ &= (x - \widetilde{\alpha}_k)(U_k(x) - \widetilde{\alpha}_0 U_{k-1}(x)) - \widetilde{\beta}_k(U_{k-1}(x) - \widetilde{\alpha}_0 U_{k-2}(x)) \\ &= (xU_k(x) - \widetilde{\beta}_k U_{k-1}(x)) - \widetilde{\alpha}_0(xU_{k-1}(x) - \beta_k U_{k-2}(x)) \\ &= U_{k+1}(x) - \widetilde{\alpha}_0 U_k(x). \qquad \square\end{aligned}$$

Коначно, можемо да изразимо дати низ полинома $\widehat{P}_n$ директно преко Чебишевљевих полинома друге врсте U_n.

Теорема 3.2.4 *Нека је* $\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x)$ *квази-дефинитна мера и* $\gamma = -\frac{1}{2}c - \frac{1}{c}$ *такво да је* $\widetilde{P}_k(\gamma) \neq 0$ *за* $k \in \mathbb{N}$. *Нека је* $\mathrm{d}\widehat{\mu}(x) = (x-\gamma)\mathrm{d}\widetilde{\mu}(x)$. *Тада је мера* $\mathrm{d}\widehat{\mu}(x)$ *такође квази-дефинитна и полиноми* $\widehat{P}_n$ *су монични формални ортогонални полиноми у односу на* $\mathrm{d}\widehat{\mu}(x)$, *који се могу изразити помоћу*

$$\begin{aligned}\widehat{P}_n(x,\gamma) &= \frac{\widetilde{P}_{n+1}(x) - \dfrac{\widetilde{P}_{n+1}(\gamma)}{\widetilde{P}_n(\gamma)}\widetilde{P}_n(x)}{x-\gamma} \\ &= \frac{U_{n+1}(x) - \widetilde{\alpha}_0 U_n(x) - \dfrac{U_{n+1}(\gamma) - \widetilde{\alpha}_0 U_n(\gamma)}{U_n(\gamma) - \widetilde{\alpha}_0 U_{n-1}(\gamma)}(U_n(x) - \widetilde{\alpha}_0 U_{n-1}(x))}{x-\gamma}.\end{aligned}$$

Доказ. Доказ ове теореме је последица теореме 1.55 из [27, стр. 38]. $\square$

Пример 3.2.1 Првих неколико полинома $\widehat{P}_k$ ортогоналних у односу на момент-функционелу (3.6) за $c = \sqrt{2}$ су:

$$
\begin{aligned}
\widehat{P}_0(x) &= 1, \\
\widehat{P}_1(x) &= x + \frac{1}{6\sqrt{2}}, \\
\widehat{P}_2(x) &= x^2 + \frac{1}{5\sqrt{2}}x - \frac{11}{40}, \\
\widehat{P}_3(x) &= x^3 + \frac{7}{34\sqrt{2}}x^2 - \frac{9}{17}x - \frac{3}{68\sqrt{2}}, \\
\widehat{P}_4(x) &= x^4 + \frac{3\sqrt{2}}{29}x^3 - \frac{181}{232}x^2 - \frac{11\sqrt{2}}{232}x + \frac{2}{29}, \\
\widehat{P}_5(x) &= x^5 + \frac{41\sqrt{2}}{396}x^4 - \frac{34}{33}x^3 - \frac{29\sqrt{2}}{396}x^2 + \frac{29}{144}x + \frac{35\sqrt{2}}{6336}.
\end{aligned}
$$

Глава 4

Примене у квадратурним процесима и L^2-апроксимацији

4.1 Квадратурне формуле

Нека је $\mathrm{d}\mu$ коначна позитивна Борелова[1] мера на реалној правој $\mathbb{R}$ чији носач $\mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu)$ има бесконачно много елемената и чији сви моменти $m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \mathrm{d}\mu$, $k = 0, 1, \ldots$, постоје и коначни су. Квадратурна формула са n тачака облика

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(\tau_k) + R_n(f), \tag{4.1}$$

која је тачна на скупу $\mathcal{P}_{2n-1}$ ($R_n(\mathcal{P}_{2n-1}) = 0$) је позната као Гаус-Кристофелова квадратурна формула. То је квадратурна формула која има максимални алгебарски степен тачности $d_{\max} = 2n - 1$. Прву формулу овог типа

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(\tau_k) + R_n(f) \tag{4.2}$$

открио је Карл Фридрих Гаус пре два века.

После Њутнове[2] формуле о нумеричкој интеграцији из 1676. године (познато је и као Њутн-Коутсово правило)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(\tau_k), \tag{4.3}$$

[1] Émile Borel (1871–1956), француски математичар.

[2] Isaac Newton (1643–1727), енглески физичар и математичар.

која се добија интеграцијом одговарајућег интерполационог полинома функције $f(x)$ у n различитих фиксираних тачака (чворова) $\tau_1,\ldots,\tau_n$ (које се најчешће бирају еквидистантно у $[a,b]$), Гаус је 1814. године развио свој чувени метод који драстично побољшава Њутнов метод. Будући да је Њутн-Коутсова формула тачна само за полиноме степена највише $n-1$, Гаус је поставио питање који максималан алгебарски степен тачности може да се постигне у (4.3) (тј. у (4.2) стављајући $[a,b]=[0,1]$) ако су чворови $\tau_1,\ldots,\tau_n$ слободни.

Како квадратурна сума

$$Q_n(f)=\sum_{k=1}^{n} A_k f(\tau_k)$$

има $2n$ непознатих параметара: τ_k, A_k, $k=1,\ldots,n$, Гаус је пошао од претпоставке да квадратурна формула (4.2) може бити тачна за све алгебарске полиноме степена највише $2n-1$. Ослањајући се на радове Њутна и Коутса и свој рад о хипергеометријским развојима из 1812. године, Гаус је доказао овај резултат. Треба напоменути да је Гаус одредио нумеричке вредности параметара квадратуре: чворове τ_k и тежине A_k, $k=1,\ldots,n$, за све $n\le 7$ са скоро 16 значајних децималних цифара. Ово откриће је било једно од најзначајнијих у деветнаестом веку у пољу нумеричке интеграције, а можда и у целој нумеричкој анализи. Гаусове резултате је по форми поједноставио Јакоби 1826. године. У деветнаестом веку Гаусове квадратуре су детаљније разрађивали Мелер[3], Радау[4], Хајне[5], Кристофел, итд. Оцену грешке и конвергенцију су доказали Марков и Стилтјес.

Модерним језиком речено, главни резултат ове теорије гласи: Нека је $\mathrm{d}\mu(x)$ позитивна мера на $\mathbb{R}$ са коначним или неограниченим носачем чији сви моменти $m_k=\int_{\mathbb{R}} x^k \mathrm{d}\mu(x)$, $k\in\mathbb{N}$, постоје и коначни су и $m_0>0$. Тада, за свако $n\in\mathbb{N}$, постоји Гаус-Кристофелова квадратурна формула (4.1) са n тачака која је тачна за све алгебарске полиноме степена $\le 2n-1$, тј. $R_n(f)=0$ за свако $f\in\mathcal{P}_{2n-1}$.

Следећу теорему доказао је Јакоби 1826. године.

Теорема 4.1.1 *За дати природан број m ($\le n$), квадратурна формула* (4.1) *има алгебарски степен тачности $d=n-1+m$ ако и само ако важи:*

1° *формула* (4.1) *је интерполациона;*

[3] Gustav Ferdinand Mehler (1835–1895), немачки математичар.
[4] Jean Charles Rodolphe Radau (1835–1911), астроном и математичар рођен у Прусији.
[5] Heinrich Eduard Heine (1821–1881), немачки математичар.

2° *полином* $\omega_n(x) = (x - \tau_1) \cdots (x - \tau_n)$ *задовољава*

$$(p, \omega_n) = \int_{\mathbb{R}} p(x)\omega_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0 \quad \text{за све} \quad p \in \mathcal{P}_{m-1}.$$

Према овој теореми, квадратурна формула (4.1) у односу на позитивну меру $\mathrm{d}\mu(x)$ има максимални алгебарски степен тачности $2n-1$, тј. вредност $m = n$ је оптимална. Вредности $m > n$ нису могуће. Заиста, за $m = n+1$ би, због 2°, полином ω_n морао бити ортогоналан на самом себи, што је немогуће.

Када је $m = n - 1$ имамо Гаус-Радауову формулу (једна од крајњих тачака интервала a или b је укључена у скуп чворова), док за $m = n-2$ имамо Гаус-Лобатову[6] формулу ($\tau_1 = a$ и $\tau_n = b$).

У случају $m = n$ из услова ортогоналности 2° теореме 4.1.1 следи да полином ω_n мора бити монични ортогонални полином π_n у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Дакле, чворови Гаусове квадратурне формуле су нуле моничног ортогоналног (или ортонормираног) полинома $t_k^{(n)}$ у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Тежине се могу представити у следећем облику

$$A_k = \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu \left(t_k^{(n)}\right)^2\right)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Према томе, све тежине A_k, $k = 1, \ldots, n$, су позитивне. Дакле, важи следећа теорема.

Теорема 4.1.2 *Параметри Гаусове квадратурне формуле* (4.1) *у односу на позитивну меру* $\mathrm{d}\mu$ *су*

$$\tau_k = t_k^{(n)}, \quad A_k = \lambda_{n,k} = \lambda_n(t_k^{(n)}; \mathrm{d}\mu), \quad k = 1, \ldots, n,$$

тј. чворови су нуле ортогоналног полинома $\pi_n(x; \mathrm{d}\mu)$*, а тежине су одговарајући Кристофелови бројеви.*

За нумеричку конструкцију Гаусових квадратурних формула постоји више метода, а свакако најпознатији је метод Голуба[7] и Велча ([36]). Њихов метод је базиран на одређивању сопствених вредности и првих компонената сопствених вектора симетричне тродијагоналне Јакобијеве матрице користећи QR алгоритам.

[6] Rehnel Lobatto (1797–1866), дански математичар.

[7] Gene Howard Golub (1932–2007), амерички математичар.

Теорема 4.1.3 *Чворови τ_k, $k = 1, \dots, n$, у Гаусовој квадратурној формули* (4.1) *у односу на позитивну меру* $\mathrm{d}\mu$ *су сопствене вредности Јакобијеве матрице реда* n

$$J_n(\mathrm{d}\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

где су α_k *и* β_k, $k = 0, 1, \dots, n-1$, *коефицијенти трочлане рекурентне релације за моничне ортогоналне полиноме* $\pi_k(\,\cdot\,; \mathrm{d}\mu)$. *Тежине* A_k *дате су са*

$$A_k = \beta_0 \upsilon_{k,1}^2, \quad k = 1, \dots, n,$$

где је $\beta_0 = m_0 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu(x)$, *а* $\upsilon_{k,1}$ *прва компонента нормализованог сопственог вектора* $\mathbf{v}_k$ $(= [\upsilon_{k,1} \dots \upsilon_{k,n}]^{\mathrm{T}})$ *који одговара сопственој вредности* $t_k^{(n)}$, *тј.*

$$J_n(\mathrm{d}\mu)\mathbf{v}_k = t_k^{(n)}\mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_k = 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Претпоставимо да је $[a, b] = \mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu)$. За остатак $R_n(f)$ Гаусове квадратурне формуле важи следећи резултат.

Теорема 4.1.4 *Ако је* $f \in C^{2n}[a, b]$, *тада постоји* $\xi \in (a, b)$ *тако да важи*

$$R_n(f) = \frac{\|\pi_n\|^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

где је π_n *монични ортогонални полином у односу на меру* $\mathrm{d}\mu$.

Пример 4.1.1 За израчунавање интеграла облика

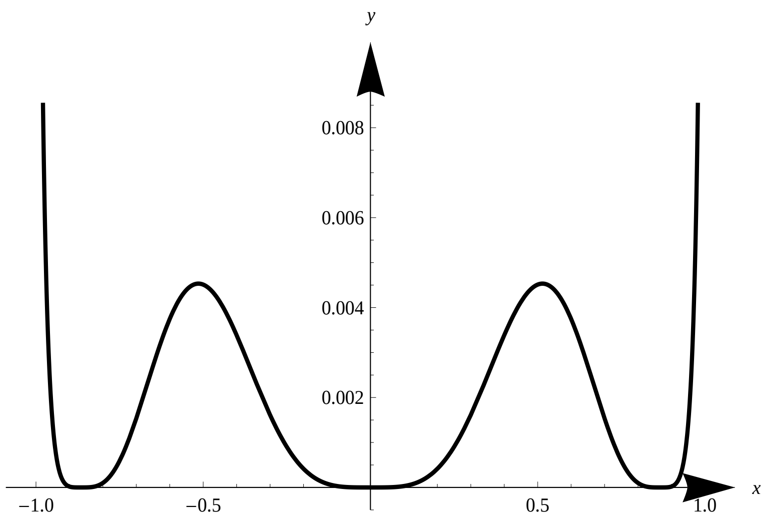
$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{\widehat{T}_n^{2s}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x, \quad n, s \in \mathbb{N}, \; n \geq 2,$$

где је $\widehat{T}_n(x)$ монични Чебишевљев полином n-тог степена прве врсте, формирамо квадратурне формуле

$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{\widehat{T}_n^{2s}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} A_j^{n,s} f(\tau_j^{n,s}) + R_m(f), \tag{4.5}$$

где су $\tau_j^{n,s}$, $j = 1, 2, \dots, m$, нуле полинома степена m из низа полинома $p_k^{n,s}(x)$ ортогоналних у односу на тежинску функцију

$$x \mapsto w^{n,s}(x) = \frac{\widehat{T}_n^{2s}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.6}$$



Слика 4.1: График тежинске функције $x \mapsto w^{3,2}(x)$

На слици 4.1 приказан је график тежинске функције (4.6) за $n = 3$ и $s = 2$.

Посматрајмо случај $m = 10$, $n = 3$ и $s = 2$. Према теореми 4.1.3, чворови $\tau_j^{3,2}$ и коефицијенти $A_j^{3,2}$, $j = 1, 2, \ldots, 10$, у квадратурној формули (4.5) израчунавају се коришћењем полинома $p_{10}^{3,2}(x)$, одређеног у примеру 3.1.1. Нумеричке вредности чворова и коефицијената приказане су у табели 4.1.

Табела 4.1: Чворови и тежински коефицијенти у квадратурној формули (4.5) за $m = 10$, $n = 3$ и $s = 2$

j	$\tau_j^{3,2}$	$A_j^{3,2}$
1	−0.99415332793052032915	0.0006884659799311187000
2	−0.93628704657748948491	0.00008735176910905409706
3	−0.65212379076979938244	0.0004380496697456038496
4	−0.47812331875516987286	0.0008067909214309841006
5	−0.28488309979786882138	0.00028031284161170109733
6	0.28488309979786882138	0.00028031284161170109733
7	0.47812331875516987286	0.0008067909214309841006
8	0.65212379076979938244	0.0004380496697456038496
9	0.93628704657748948491	0.00008735176910905409706
10	0.99415332793052032915	0.0006884659799311187000

Применом тако добијене квадратурне формуле одређују се, на пример, вредности интеграла

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{\widehat{T}_3^4(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \approx 0.002170291752774188887,$$
$$\int_{-1}^{1} \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{\widehat{T}_3^4(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \approx 0.0004603135759260652326,$$
$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2+10x} \frac{\widehat{T}_3^4(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \approx 6.022591407146374626.$$

Према теореми 4.1.4, процена грешке је

$$|R_{10}(f)| = \frac{\|p_{10}^{3,2}\|^2}{20!} |f^{(20)}(\xi)| = 1.26274 \cdot 10^{-27} |f^{(20)}(\xi)|, \quad -1 < \xi < 1.$$

У наведеним примерима, границе апсолутне грешке при израчунавању интеграла су $5.612 \cdot 10^{-25}$, $6.29502 \cdot 10^{-11}$ и $8.98695 \cdot 10^{-6}$ редом.

Пример 4.1.2 За тестирање квадратурне формуле (4.5) за $n = 2$ и $s = 4$

$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{\widehat{T}_2^8(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} A_j^{2,4} f(\tau_j^{2,4}) + R_m(f), \tag{4.7}$$

за различит број чворова m користимо функцију

$$f(x) = 0.01(1-x^2)\sqrt{1-x^2},$$

јер се тачно може израчунати вредност интеграла

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x) \frac{\widehat{T}_2^8(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{100} \widehat{T}_2^8(x) \mathrm{d}x = 0.000016225829983569922.$$

У табели 4.3 приказани су чворови $\tau_j^{2,4}$ и коефицијенти $A_j^{2,4}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, у квадратурној формули (4.5) за $m = 5(5)20$.

Табела 4.2: Апсолутна грешка квадратурних формула (4.7) за $n = 2$, $s = 4$ и $m = 5(5)20$

m	5	10	15	20
$\lvert I(f) - Q_m^{2,4}(f)\rvert$	1.32311(−8)	1.351379(−9)	3.12557(−10)	1.15572(−10)

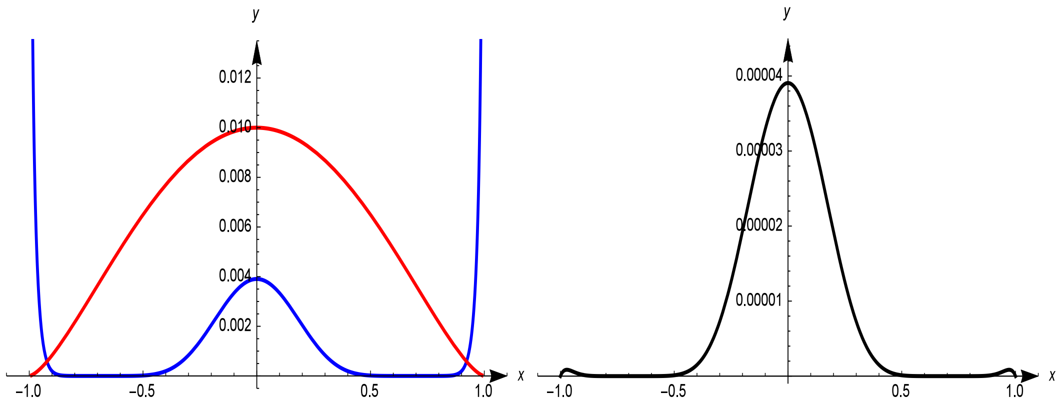
Апсолутне грешке при израчунавању интеграла $I(f)$ применом квадратурних сума

$$Q_m^{2,4}(f) = \sum_{j=1}^{m} A_j^{2,4} f(\tau_j^{2,4})$$

из формуле (4.7) за $m = 5(5)20$ представљене су у табели 4.2, а графици тежинске функције $x \mapsto w^{2,4}(x)$, функције $x \mapsto f(x)$ и интегранда $x \mapsto f(x)w^{2,4}(x)$ на слици 4.2.

Табела 4.3: Чворови и тежински коефицијенти у квадратурној формули (4.7) за $n = 2$, $s = 4$ и $m = 5(5)20$

m	j	$\tau_j^{2,4}$	$A_j^{2,4}$
5	1, 5	± 0.98827093343438616188	0.00083258730859177457 51
	2, 4	± 0.32657907995164112958	0.00024119924292817428 57
	3	0.	0.00120800987045994246 84
10	1, 10	± 0.99493925749376569302	0.00067087636704143990 34
	2, 9	± 0.95274878026932396086	0.00016684609557355516 50
	3, 8	± 0.70710678118654752440	2.3465615199299581748(−6)
	4, 7	± 0.30375938124659697440	0.00016684609557355516 50
	5, 6	± 0.10047822598829164873	0.00067087636704143990 34
15	1, 15	± 0.99734087333264202689	0.00052374209824484446 97
	2, 14	± 0.97593603839212828089	0.00026024939828106070 00
	3, 13	± 0.93197749081794170424	0.00005303218578156262 82
	4, 12	± 0.85563539965079726540	1.8924261719924816230(−6)
	5, 11	± 0.43373015915138572669	0.00001457676276501609 54
	6, 10	± 0.28953665834652860567	0.00013497808842173685 13
	7, 9	± 0.14533345879667599749	0.00040501273992805878 94
	8	0.	0.00056861557431129615 86
20	1, 20	± 0.99832405260271392186	0.00042881735541371292 80
	2, 19	± 0.98491339196320002780	0.00027714309823596431 68
	3, 18	± 0.95804358845234438353	0.00010912441019055412 61
	4, 17	± 0.91739369383462618909	0.00002230187250869613 37
	5, 16	± 0.86119699118961561419	1.5090070260325426594(−6)
	6, 15	± 0.50827132750722140866	1.5090070260325426594(−6)
	7, 14	± 0.39798091727174576497	0.00002230187250869613 37
	8, 13	± 0.28662254381914026857	0.00010912441019055412 61
	9, 12	± 0.17304800007958458605	0.00027714309823596431 68
	10, 11	± 0.05787128817378861759	0.00042881735541371292 80



Слика 4.2: Графици функција $x \mapsto w^{2,4}(x)$, $x \mapsto f(x)$ (лево) и $x \mapsto f(x)w^{2,4}(x)$ (десно)

4.2 О позитивној дефинитности неких линеарних функционела

Нека је линеарна функционела $\mathcal{L}$ дефинисана са

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_k p(z_k), \quad p \in \mathcal{P}. \tag{4.8}$$

Генерално говорећи, испитујемо функционеле код којих је $\omega_k, z_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, али са следећим рестрикцијама. Прво, претпостављамо да је $\omega_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Овај услов је крајње природан, будући да ако је за неко $k \in \mathbb{N}$, $\omega_k = 0$, онда сумирање вршимо преко скупа $\mathbb{N} \setminus \{k\}$. Друго, нећемо умањити општост ако претпоставимо да је $z_i \neq z_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, јер у супротном можемо изоставити члан суме са индексом j а узети $\omega_i' = \omega_i + \omega_j$ за тачку z_i.

За скуп тачака z_i, $i \in \mathbb{N}$, уводимо ознаку $\mathcal{Z} = \{z_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Претпоставићемо да је

$$\lim_{k\to+\infty} z_k = 0, \tag{4.9}$$

и, да бисмо имали апсолутну интеграбилност свих полинома $p \in \mathcal{P}$ претпоставићемо да важи

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\omega_k| \leq M < +\infty. \tag{4.10}$$

Такође, надаље ћемо подразумевати да је низ z_k, $k \in \mathbb{N}$, уређен тако да је $|z_{k+1}| \leq |z_k|$, $k \in \mathbb{N}$.

Приметимо да линеарна функционела $\mathcal{L}$ може бити схваћена као линеарна функционела која делује у простору ограничених комплексних низова l_∞. Наиме, према услову (4.10) имамо да низ w_k, $k \in \mathbb{N}$, припада простору l_1, простору свих апсолутно сумабилних комплексних низова (видети [66, стр. 30], [43, стр. 39]). Као што је познато важи $l_1 \subset l'_\infty$, где l'_∞ означава дуални простор простора l_∞.

Дефинишимо линеарно пресликавање $\mathcal{I} : \mathcal{P} \to l_\infty$ на следећи начин

$$\mathcal{I}(p) = (p(z_1), p(z_2), \ldots, p(z_n), \ldots) .$$

Линеарни простор $\mathcal{P}$ може се нормирати помоћу

$$\|p\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |p(z_k)|, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Лема 4.2.1 *Линеарно пресликавање $\mathcal{I} : \mathcal{P} \to l_\infty$ је ограничено утапање скупа $\mathcal{P}$ у l_∞.*

Доказ. За дато $\mathcal{I}$ сваки полином $p \in \mathcal{P}$ достиже свој максимум на компакту $\overline{\mathcal{Z}}$, па је сваки низ $p(z_k)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}$, униформно ограничен по k и припада скупу l_∞.

Особина очувања норме се једноставно показује. Приметимо да ако два полинома задовољавају $\mathcal{I}(p_1 - p_2) = 0$, онда је $p_1 = p_2$, јер су ово две аналитичке функције једнаке на скупу $\mathcal{Z}$ који има једну тачку нагомилавања. Дакле, $\mathcal{I}(\mathcal{P}) \subset l_\infty$ је утапање.

Лако се уочава да је $\|\mathcal{I}\| = 1$. $\square$

Сада дефинишимо линеарну функционелу $\mathcal{L}' : l_\infty \to \mathbb{C}$ на следећи начин

$$\mathcal{L}'(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k u_k, \quad u = (u_1, u_2, \ldots) \in l_\infty.$$

Очигледно је функционела $\mathcal{L}'$ ограничена јер је

$$|\mathcal{L}'(u)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\omega_k||u_k| \leq \|u\| \sum_{k \in \mathbb{N}} |\omega_k|, \quad u \in l_\infty,$$

и $\mathcal{L}' \circ \mathcal{I} = \mathcal{L}$ на $\mathcal{P}$. Због тога можемо идентификовати $\mathcal{L}'$ са $\mathcal{L}$ и можемо сматрати да је $\mathcal{L}'$ ограничена линеарна екстензија функционеле $\mathcal{L}$ на цео скуп l_∞.

Означимо са $\mathcal{P}_+$ скуп свих полинома $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ који су ненегативни на реалној правој.

Као директну последицу позитивне дефинитности имамо следећу лему.

Лема 4.2.2 *Ако је линеарна функционела $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ позитивно-дефинитна, онда важи*

$$\mathcal{L}(x^{2n}) > 0, \quad \mathcal{L}(x^{2n+1}) \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(p) \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.11}$$

Доказ. Како је $x^{2n} \in \mathcal{P}_+$, директно следи да је $\mathcal{L}(x^{2n}) > 0$. За непарне степене имамо

$$\mathcal{L}(x-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} \mathcal{L}(x^k) > 0,$$

и користећи математичку индукцију по $n \in 2\mathbb{N}$ добијамо

$$\mathcal{L}(x^{2n-1}) < \frac{1}{2n} \sum_{k=0, k\neq 2n-1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k \mathcal{L}(x^k).$$

Коначно, користећи линеарност функционеле $\mathcal{L}$ следи остатак тврђења. $\square$

Централна теорема овог поглавља гласи:

Теорема 4.2.1 *Линеарна функционела $\mathcal{L}$ дефинисана помоћу* (4.8) *је позитивно-дефинитна ако и само ако је $\omega_k > 0$ и $z_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Уведимо још једну ознаку

$$e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in l_\infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

при чему се број 1 налази на n-тој позицији, док су на осталим местима нуле.

4.2.1 Помоћни резултати

У овом делу доказујемо неколико помоћних лема.

Лема 4.2.3 *Изаберимо $z_n \in \mathcal{Z}$ и претпоставимо да $\overline{z}_n \notin \mathcal{Z}$. Тада постоји $p^n \in \mathbb{C}$, $|p^n| = 1$, такав да за сваки $r^n \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ важи $p^n r^n(z_n) e_n \in \overline{\mathcal{I}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}})}$. Ако је $z_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, онда је $p^n = 1$.*

Доказ. Конструисаћемо низ $p_k^n \in \mathcal{P}_+$, $k, n \in \mathbb{N}$, такав да је $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathcal{I}(p_k^n) = \alpha_n e_n$ за неке комплексне бројеве $\alpha_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Изаберимо неки $z_n \in \mathcal{Z}$ и претпоставимо да $\overline{z}_n \notin \mathcal{Z}$. Даље, изаберимо неки полином $r^n \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$. Дефинишимо

$$p_k^n(z) = r^n(z) \prod_{i=1, i\neq n}^{k} \frac{(z-z_i)(z-\overline{z}_i)}{\lambda_i^n}, \quad k \in \mathbb{N},$$

при чему смо увели ознаку

$$\lambda_i^n = |z_n - z_i||z_n - \overline{z}_i|, \quad i \neq n.$$

Очигледно важи $p_k^n \in \mathcal{P}_+$, $k, n \in \mathbb{N}$.

Будући да је r^n алгебарски полином, он је униформно ограничен на компакту $\overline{\mathcal{Z}}$. Дакле, постоји $M > 0$ тако да је $|r^n(z_\nu)| < M$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Користећи услов (4.9), можемо изабрати неки $i_{01} \in \mathbb{N}$ тако да је

$$|z_n|/2 < |z_\nu - z_i|, \quad |z_n|/2 < |z_\nu - \overline{z}_i|, \quad i > i_{01}, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Фиксирајмо $q \in (0,1)$. Можемо изабрати неки $i_{02} \in \mathbb{N}$ тако да важи

$$|z_i| < |z_n| q/4, \quad i > i_{02}.$$

Нека је $i_0 = \max\{i_{01}, i_{02}\}$. За $k > i_0$ и $\nu > k$ имамо

$$\begin{aligned}
|p_k^n(z_\nu)| &= |r^n(z_\nu)| \prod_{i=1, i\neq n}^{i_0} \frac{|z_\nu - z_i||z_\nu - \overline{z}_i|}{\lambda_i^n} \prod_{i=i_0+1}^{k} \frac{|z_\nu - z_i||z_\nu - \overline{z}_i|}{|z_n - z_i||z_n - \overline{z}_i|} \\
&\leq M \prod_{i=1, i\neq n}^{i_0} \frac{|z_\nu - z_i||z_\nu - \overline{z}_i|}{\lambda_i^n} \prod_{i=i_0+1}^{k} \frac{|z_n|q/2|z_n|q/2}{|z_n|/2|z_n|/2} \\
&\leq M \left(\frac{2|z_1|}{m}\right)^{2i_0-2} q^{2(k-i_0)},
\end{aligned}$$

где је $m = \min_{i=1,\ldots,i_0, i\neq n}\{|z_n - z_i|, |z_n - \overline{z}_i|\} > 0$. Приметимо да је $p_k^n(z_\nu) = 0$ за $\nu < k$, $\nu \neq n$. Одавде следи да имамо униформну конвергенцију израза $p_k^n(z_\nu)$ ка нули по $\nu \neq n$ када $k \to +\infty$, тј. да за свако $\varepsilon > 0$ и

$$k > k_{01} = i_0 + \frac{1}{2\log q} \log \frac{\varepsilon}{M} \left(\frac{m}{2|z_1|}\right)^{2i_0-2}$$

важи $|p_k^n(z_\nu) - 0| < \varepsilon$, $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$.

Сада, посматрајући $p_k^n(z_n)$ добијамо

$$|p_k^n(z_n)| = |r^n(z_n)|$$

према дефиницији λ_i^n. Ово значи да $p_k^n(z_n)$ има константну норму када $k \to +\infty$.

Производ

$$\prod_{i=1, i\neq n}^{k} \frac{(z_n - z_i)(z_n - \overline{z}_i)}{\lambda_i^n}, \quad k \in \mathbb{N},$$

је производ комплексних бројева чији је модуо 1, тј. бројева који се налазе на јединичној кружници у комплексној равни. Како је јединична кружница компакт у $\mathbb{C}$, следи да постоји неки подниз овог низа који конвергира ка неком p^n чија је норма један.

Означимо скуп индекса за тај конвергентан подниз са N_1. Тада, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $k_{02} \in N_1$, тако да за свако $k > k_{02}$, $k \in N_1$, важи

$$|p_k^n(z_n) - r^n(z_n)p^n| < \varepsilon.$$

Сада за вектор $r^n(z_n)p^n e_n$ имамо

$$\|\mathcal{I}(p_k^n) - r^n(z_n)p^n e_n\| = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} |p_k^n(z_\nu) - r^n(z_n)p^n e_n| < \varepsilon$$

за $k > \max\{k_{01}, k_{02}\}$, $k \in N_1$.

Дакле, ако извршимо ренумерацију низа p_k^n користећи једино индексе $k \in N_1$, добијамо низ $p_k^n \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ такав да је

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{I}(p_k^n) = p^n e_n.$$

Коначно, ако је $z_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и како је $r^n \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$, добијамо $r^n(z_n) \in \mathbb{R}$ и

$$p_k^n(z_n) = r^n(z_n) \prod_{i=1, i\neq n}^{k} \frac{|(z_n - z_i)(z_n - \overline{z}_i)|}{\lambda_i^n} \in \mathbb{R},$$

при чему су изрази у производу једнаки 1, па је $p^n = 1$.

Ову конструкцију можемо поновити за свако $n \in \mathbb{N}$, тј. за сваку тачку $z_n \in \mathcal{Z}$ за коју важи $\overline{z}_n \notin \mathcal{Z}$. $\square$

У случају да је $r^n \in \mathcal{P}_+$, једноставно се уочава да p_k^n такође припада простору $\mathcal{P}_+$, па самим тим имамо следећи резултат.

Лема 4.2.4 *Претпоставимо да важи $\overline{z}_n \notin \mathcal{Z}$. Тада постоји $p^n \in \mathbb{C}$, $|p^n| = 1$, такав да за сваки $r^n \in \mathcal{P}_+$ важи $p^n r^n(z_n) e_n \in \overline{\mathcal{I}(\mathcal{P}_+)}$. Ако је $z_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, онда је $p^n = 1$.*

Сада ћемо размотрити случај када $\overline{z}_n \in \mathcal{Z}$. Без губљења општости можемо претпоставити да је $z_{n+1} = \overline{z}_n$, што се једноставно постиже ренумерацијом низа z_n, $n \in \mathbb{N}$.

Лема 4.2.5 *Нека је $z_{n+1} = \overline{z}_n$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Тада постоји неки $p^n \in \mathbb{C}$, $|p^n| = 1$, тако да за сваки полином $r^n \in \mathcal{P}_+$ важи*

$$p^n r^n(z_n) e_n + \overline{p^n r^n(z_n)} e_{n+1} \in \overline{\mathcal{I}(\mathcal{P}_\mathbb{R})}.$$

Доказ. Посматрајмо низ полинома

$$p_k^n(z) = r^n(z) \prod_{i=1, i\neq n, n+1}^{k} \frac{(z - z_i)(z - \overline{z}_i)}{\lambda_i^n},$$

при чему су све ознаке као у доказу леме 4.2.3. Једини проблем представља дефиниција низа λ_i^n, али срећом имамо

$$|z_n - z_i||z_n - \overline{z}_i| = |z_{n+1} - z_i||z_{n+1} - \overline{z}_i|,$$

јер је $z_{n+1} = \overline{z}_n$. На основу ове чињенице следи да можемо применити исту дефиницију.

Користећи исте аргументе, можемо доказати да важи

$$|p_k^n(z_\nu) - 0| < \varepsilon$$

за свако

$$k > k_{01} = i_0 + \frac{1}{2\log q} \log \frac{\varepsilon}{M} \left(\frac{m}{2|z_1|} \right)^{2i_0 - 4}.$$

Такође је $p_k^n(z_n) = \overline{p_k^n(z_{n+1})}$, одакле следи конвергенција по неком низу $k \in N_1$ ка међусобно конјугованим вредностима. $\square$

Јасно је да можемо да изаберемо $r^n \in \mathcal{P}_+$ да бисмо добили директну последицу ове леме.

Лема 4.2.6 *Нека је $z_{n+1} = \overline{z}_n$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Тада постоји неки $p^n \in \mathbb{C}$, $|p^n| = 1$, тако да за сваки полином $r^n \in \mathcal{P}_+$ важи*

$$p^n r^n(z_n) e_n + \overline{p^n r^n(z_n)} e_{n+1} \in \overline{\mathcal{I}(\mathcal{P}_+)}.$$

4.2.2 Доказ главног резултата

Сада дајемо доказ главне теореме.

Доказ теореме 4.2.1. Једноставно се доказује да ако је $\omega_n > 0$ и $z_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, за $p \in \mathcal{P}_+$ је

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_k p(z_k) > 0,$$

користећи једноставну чињеницу да је $p(z_k) \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Претпоставимо да је $\mathcal{L}$ позитивно-дефинитна функционела. Изаберимо неки $n \in \mathbb{N}$ и претпоставимо да $\overline{z}_n \notin \mathcal{Z}$. Тада, према леми 4.2.3 добијамо

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{L}(p_k^n) = \lim_{k\to+\infty} (\mathcal{L}' \circ \mathcal{I})(p_k^n) = \mathcal{L}'(p^n r^n(z_n) e_n),$$

при чему смо искористили чињеницу да је $\mathcal{L}'$ непрекидна функционела на l_∞. Тада је

$$\mathcal{L}'(p^n r^n(z_n) e_n) = \omega_n r^n(z_n) p^n.$$

Узимајући $r^n(z) = 1$, $r^n \in \mathcal{P}_+$, и $r^n(z) = z$, $r^n \in \mathcal{P}_\mathbb{R}$, добијамо

$$\mathcal{L}'(p^n e_n) = \omega_n p^n \geq 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{L}'(p^n z_n e_n) = \omega_n z_n p^n \in \mathbb{R}.$$

Како је $z_n \neq 0$ и према конструкцији $p^n \neq 0$, следи да је $\mathcal{L}'(p^n e_n) = \omega_n p^n > 0$. Тада добијамо

$$z_n = \frac{\mathcal{L}'(p^n z_n e_n)}{\mathcal{L}'(p^n e_n)} \in \mathbb{R}$$

и такође $\omega_n > 0$, према чињеници да је $p^n = 1$ за $z_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Нека је сада $\overline{z}_n = z_{n+1}$. Приметимо да у овом случају не може да буде $z_n \in \mathbb{R}$, јер бисмо тада имали $z_n = z_{n+1}$, што је немогуће према условима наметнутим за скуп $\mathcal{Z}$. Тада, према леми 4.2.5 и чињеници да је $\mathcal{L}$ позитивно-дефинитна функционела, за $r^n(z) = 1$ и $r^n(z) = z$ следи

$$\mathcal{L}'(p^n e_n + \overline{p^n} e_{n+1}) = \omega_n p^n + \omega_{n+1} \overline{p^n} = \alpha \geq 0$$

и

$$\mathcal{L}'(p^n z_n e_n + \overline{p^n z_n} e_{n+1}) = \omega_n z_n p^n + \omega_{n+1} \overline{p^n z_n} = \beta \in \mathbb{R}.$$

Ове две једнакости можемо посматрати као систем линеарних једначина по p^n и $\overline{p^n}$ који има јединствено решење дато са

$$p^n = \frac{\alpha \overline{z}_n - \beta}{\omega_n(\overline{z}_n - z_n)}, \quad \overline{p^n} = \frac{\alpha z_n - \beta}{\omega_{n+1}(z_n - \overline{z}_n)}.$$

Користећи ове изразе добијамо $\omega_{n+1} = \overline{\omega}_n$ а такође следи да не може да буде $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ јер би то за последицу имало $p^n = 0$, што је немогуће.

Ставимо сада да је $r^n(z) = z^{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Даље имамо

$$\mathcal{L}'(p^n z_n^{2\nu} e_n + \overline{p^n z_n^{2\nu}} e_{n+1}) = \omega_n z_n^{2\nu} p^n + \overline{\omega_n z_n^{2\nu} p^n} = \mathrm{Re}(\omega_n z_n^{2\nu} p^n) \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Ако означимо са $\alpha_n = \arg(\omega_n)$, $\beta_n = \arg(p^n)$ и $\varphi_n = \arg(z_n)$, при чему је $\varphi_n \neq 0$ и $\varphi_n \neq \pi$, следи

$$|\omega_n z_n^{2\nu} p^n| \cos(\alpha_n + \beta_n + 2\nu\varphi_n) \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Желимо да покажемо да постоји неко $\nu \in \mathbb{N}_0$ такво да је функција cos негативна, што би довело до контрадикције.

Функција $\cos x$ је негативна ако 2ν припада неком од интервала

$$J_k = \left(\frac{(4k+1)\pi - 2(\alpha_n + \beta_n)}{2\varphi_n}, \frac{(4k+3)\pi - 2(\alpha_n + \beta_n)}{2\varphi_n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Дужина интервала J_k је $\pi/|\varphi_n| > 1$, па зато у сваком од ових интервала постоји бар један цео број. Ако је $\pi/|\varphi_n| > 2$, онда у сваком интервалу постоје бар два узастопна цела броја и бар један од њих је паран. Узимајући да је 2ν баш тај паран цео број, добијамо контрадикцију. Зато ћемо претпоставити да је $\pi/|\varphi_n| \leq 2$.

Сегменте облика

$$G_k = \left[\frac{(4k+3)\pi - 2(\alpha_n + \beta_n)}{2\varphi_n}, \frac{(4k+5)\pi - 2(\alpha_n + \beta_n)}{2\varphi_n} \right], \quad k \in \mathbb{Z},$$

зваћемо празнине. Очигледно је $\mathbb{R} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(J_k \cup G_k)$.

Ако је $\pi/|\varphi_n| = 2$, онда је $\varphi_n = \pm\pi/2$, што значи да ако је

$$\cos(\alpha_n + \beta_n \pm 2 \cdot 0 \cdot \pi/2) > 0$$

следи

$$\cos(\alpha_n + \beta_n \pm 2 \cdot 1 \cdot \pi/2) = -\cos(\alpha_n + \beta_n) < 0,$$

што је контрадикција. Ако је $\cos(\alpha_n + \beta_n \pm 2 \cdot 0 \cdot \pi/2) = 0$, онда добијамо

$$\mathrm{Re}(\omega_n z_n^{2\nu} p^n) = |\omega_n z_n^{2\nu} p^n| \cos(\alpha_n + \beta_n \pm \nu\pi) = 0, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

и, бирајући $r^n(z) = z^{2\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, следи

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\omega_n z_n^{2\nu+1} p^n) &= |\omega_n z_n^{2\nu+1} p^n| \cos(\alpha_n + \beta_n \pm (2\nu+1)\pi/2) \\ &= \pm(-1)^\nu |\omega_n z_n^{2\nu+1} p^n| \sin(\alpha_n + \beta_n) \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Из услова $\cos(\alpha_n + \beta_n) = 0$ следи $\sin(\alpha_n + \beta_n) = \pm 1$, одакле добијамо да претходни израз није једнак нули. Посматрајмо сада полиноме $r^n(z) = z^{2\nu}(z-1)^2$, $\nu \in \mathbb{N}_0$. Очигледно је $r^n \in \mathcal{P}_+$, па мора да важи

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \mathcal{L}(p_k^n) &= \lim_{k\to+\infty} (\mathcal{L}' \circ \mathcal{I})(p_k^n) = \omega_n z_n^{2\nu}(z_n - 1)^2 p^n + \overline{\omega_n z_n^{2\nu}(z_n - 1)^2 p^n} \\ &= \mathrm{Re}(\omega_n z_n^{2\nu}(z_n - 1)^2 p^n) \geq 0.\end{aligned}$$

Користећи линеарност добијамо

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\omega_n z_n^{2\nu}(z_n-1)^2 p^n) &= \mathrm{Re}(-2\omega_n z_n^{2\nu+1} p^n) \\ &= \mp 2(-1)^\nu |\omega_n z_n^{2\nu+1} p^n| \sin(\alpha_n + \beta_n) > 0, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Ово је, наравно, контрадикција.

Дакле, мора да важи $1 < \pi/|\varphi_n| < 2$. Претпоставимо да неки интервал J_k садржи цео број $2m+1$. Тада можемо да изаберемо $\nu \in \mathbb{N}$, тако да је

$$\frac{\pi}{|\varphi_n|} > \frac{2\nu - 2m - 1}{2\nu - 2m - 2} > 1.$$

Рачунајући од $2m+1$ до 2ν постоји тачно $2\nu - 2m$ целих бројева који су покривени са

$$2\nu - 2m - 2 + 1 > \frac{2\nu - 2m - 1}{\pi/|\varphi_n|} + 1$$

интервала и празнина. Како почињемо и завршавамо са интервалом, имамо $\nu - m - 1$ празнина и $\nu - m$ интервала. Према Дирихлеовом принципу постоји бар један интервал или једна празнина у којем се налазе бар два узастопна цела броја. Ако неки интервал садржи два узастопна цела броја, онда је доказ завршен. Зато претпоставимо да нека празнина садржи два цела узастопна броја. Ако празнина садржи паран па непаран цео број, онда следећи интервал садржи паран цео број, што је крај доказа. Ако празнина садржи непаран па паран цео број, онда претходни интервал садржи паран цео број, па је доказ завршен.

Закључујемо да не може да важи $z_n, \overline{z}_n \in \mathcal{Z}$. Већ смо доказали да ако је $z_n \in \mathcal{Z}$, онда је $z_n \in \mathbb{R}$ и $\omega_n > 0$, чиме је доказ завршен. $\square$

4.3 Стандардна L^2-апроксимација

Нека је $\mathrm{d}\mu(x)$ дата ненегативна мера на $\mathbb{R}$ и $U_n = \{g_0, g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ дати систем линеарно независних функција у реалном унитарном простору X

са скаларним производом

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) \quad (f,g \in X). \tag{4.12}$$

Нека је X_n потпростор простора X такав да је $X_n = \mathrm{Lin}\{g_0, g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Даље, претпоставимо да моменти функције f у односу на меру $\mathrm{d}\mu(x)$ и систем U_n

$$m_k(f,U_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g_k(x)\mathrm{d}\mu(x) = (f,g_k), \quad k = 0,1,\ldots,n, \tag{4.13}$$

постоје. Желимо да апроксимирамо функцију f са

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu g_\nu \in X_n,$$

тако да важи

$$m_k(s_n,U_n) = m_k(f,U_n), \quad k = 0,1,\ldots,n. \tag{4.14}$$

Познато је да се стандардна L^2-апроксимација функције $f \in X$ са $s_n \in X_n$, тј.

$$\min_{s\in X_n} \|f-s\|^2 = \min_{a_\nu \in \mathbb{R}} \Big\| f - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu g_\nu \Big\|^2 = \|f-s_n\|^2$$

достиже ако и само ако је грешка $f - s_n$ ортогонална на цео потпростор X_n, тј. ако и само ако је

$$\Big(f - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu g_\nu, g_k\Big) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,n, \tag{4.15}$$

што је еквивалентно са (4.14).

Дакле, стандардна L^2-апроксимација функције чува моменте. Напоменимо да ако је $S_n = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ ортонормиран (или ортогоналан) систем функција, из услова (4.15) директно добијамо Фуријеове[8] коефицијенте $a_k = (f, \phi_k)$, $k = 0,1,\ldots,n$.

У случају апроксимације алгебарским полиномима, S_n је скуп полинома $p_k(\,\cdot\,;\mathrm{d}\mu)$ који су ортонормирани у односу на меру $\mathrm{d}\mu(x)$. Сада је L^2-апроксимација дата са

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x), \quad a_k = \int_{\mathbb{R}} f(x)p_k(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad k = 0,1,\ldots,n, \tag{4.16}$$

[8] Joseph Fourier (1768–1830), француски математичар.

а одговарајућа грешка најбоље L^2-апроксимације је

$$E_n(\mathrm{d}\mu, f)_2^2 = \|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

4.4 Полиномска L^2-апроксимација са ограничењима

У неким случајевима желимо да најбоља L^2-апроксимација $\widetilde{s}_{n+m}$ очува још нека својства оригиналне функције f, на пример да има исте вредности као и функција f у неким тачкама. Иако ово можемо разматрати у општем случају, овде ћемо се задржати на најједноставнијем случају. Проблем L^2-апроксимације са ограничењима може се исказати на следећи начин. За дати скуп тачака $t_1, \ldots, t_m$, $m \le n$, и функцију f треба да важи

$$\widetilde{s}_{n+m}(t_i) = f(t_i), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4.17}$$

Дакле, треба да минимизирамо израз $\widetilde{E}_{n+m}(\mathrm{d}\mu, f)_2^2 = \|f - \widetilde{s}\|^2$, при чему је $\widetilde{s} \in \mathcal{P}_{n+m}$ и задовољава услове (4.17).

Означимо са

$$\mathcal{P}_{n+m}^C = \{p \in \mathcal{P}_{n+m} \mid p(t_i) = f(t_i),\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Да бисмо нашли најбољи L^2-апроксимациони полином са датим ограничењима, прво ћемо конструисати интерполациони полином степена највише $m-1$ који задовољава услове (4.17). То је полином

$$P_m(x) = L_m(f; x) = \sum_{i=1}^{m} f(t_i) \frac{q_m(x)}{(x - t_i) q_m'(t_i)},$$

где је $q_m(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - t_i)$. Сада тражимо најбољу квадратну апроксимацију у облику

$$\widetilde{s}(x) = P_m(x) + q_m(x) s(x), \quad s \in \mathcal{P}_n,$$

где је s неки полином степена највише n који ћемо одредити из следећег минимизационог услова

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}_{n+m}(\mathrm{d}\mu, f)_2^2 &= \min_{s \in \mathcal{P}_n} \|f - P_m - q_m s\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f(x) - P_m(x) - q_m(x) s(x))^2 \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x) - P_m(x)}{q_m(x)} - s(x) \right)^2 q_m(x)^2 \mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

Ако су $\widetilde{f}$ нова функција и $\mathrm{d}\widetilde{\mu}$ нова мера дате са

$$\widetilde{f}(x) = \frac{f(x) - P_m(x)}{q_m(x)} \quad \text{и} \quad \mathrm{d}\widetilde{\mu}(x) = q_m(x)^2 \mathrm{d}\mu(x)$$

редом, добијамо следећи L^2-апроксимациони проблем без ограничења

$$\widetilde{E}_{n+m}(\mathrm{d}\mu, f)_2^2 = E_n(\mathrm{d}\widetilde{\mu}, \widetilde{f})_2^2 = \min_{s\in\mathcal{P}_n} \int_{\mathbb{R}} (\widetilde{f}(x) - s(x))^2 \mathrm{d}\widetilde{\mu}(x).$$

Ако је s_n решење овог L^2-проблема, тада је

$$\widetilde{s}_{n+m}(x) = P_m(x) + q_m(x)s_n(x)$$

решење L^2-апроксимационог проблема са датим ограничењима. Према (4.16), решење s_n може да се напише у облику

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{a}_k p_k(x; \mathrm{d}\widetilde{\mu}), \quad \widetilde{a}_k = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x) p_k(x; \mathrm{d}\widetilde{\mu}) \mathrm{d}\widetilde{\mu}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Закључујемо да је полином s_n заправо L^2-апроксимација функције $(f - P_m)/q_m$ у односу на трансформисану меру $q_m^2 \mathrm{d}\mu$.

Да бисмо илустровали изложену теорију дајемо два примера.

Пример 4.4.1 Посматрајмо проблем дириговане L^2-апроксимације у односу на Чебишевљеву меру друге врсте са ограничењима датим у тачкама $\pm 1/\sqrt{2}$ за функцију $f(x) = \cos(\pi x/2)$. Овде је $m = 2$, а полином P_2 је интерполациони полином за скуп тачака $(-1/\sqrt{2}, a)$, $(1/\sqrt{2}, a)$, при чему је $a = \cos(\pi/(2\sqrt{2})) = 0.4440158403262133$, тј.

$$P_2(x) = a\left(\frac{x + 1/\sqrt{2}}{2/\sqrt{2}} + \frac{x - 1/\sqrt{2}}{-2/\sqrt{2}}\right) = a$$

и $q_2(x) = x^2 - 1/2$. Да бисмо решили L^2-апроксимациони проблем са ограничењима треба да решимо следећи стандардни L^2-апроксимациони проблем

$$\min_{s\in\mathcal{P}_n} \left| \int_{-1}^{1} \left(\frac{f(x) - a}{x^2 - 1/2} - s(x)\right)^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x \right|^{1/2}.$$

Уочавамо меру $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ из теореме 2.4.2. Најбољи приступ за конструкцију полинома S_n је да се S_n добије као линеарна комбинација полинома p_n,

$n \in \mathbb{N}_0$, ортогоналних у односу на меру $\mathrm{d}\widehat{\mu}$ (видети пример 2.4.1). Решење је дато у следећем облику

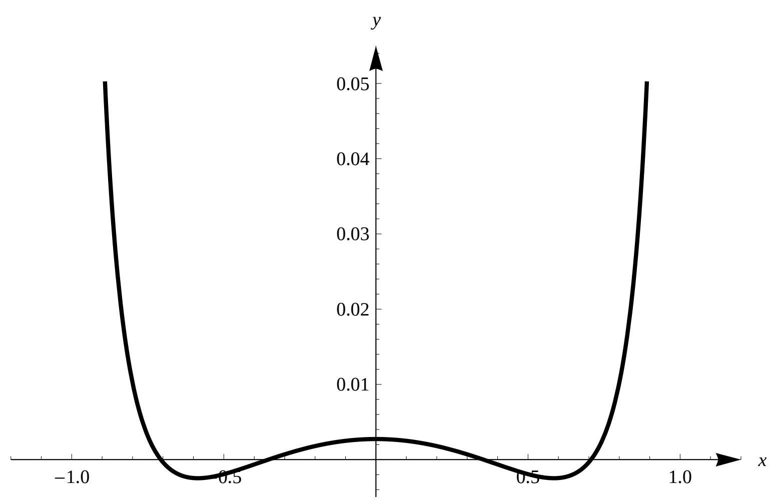
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k p_k(x), \quad q_k = \frac{1}{\|p_k\|^2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) - a}{x^2 - 1/2} p_k(x) \mathrm{d}\widehat{\mu}(x).$$

У овом случају је $q_{2k+1} = 0$, $k \geq 0$. Коефицијенти q_{2k} за $0 \leq k \leq 8$ су дати у табели 4.4. Све рачунске операције су извођене у аритметици двоструке прецизности (са машинском прецизношћу м.п.$\approx 2.22 \times 10^{-16}$). Бројеви у заградама означавају децималне експоненте.

Одговарајућа апсолутна грешка дириговане L^2-апроксимације p дата са

$$e_{n+m} = \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \cos \frac{\pi x}{2} - p(x) \right|, \quad p \in \mathcal{P}_{n+m}^{C},$$

приказана је у истој табели. На пример, апсолутна грешка одговарајуће



Слика 4.3: Релативна грешка при апроксимацији функције $x \mapsto f(x)$ полиномом $x \mapsto p(x)$

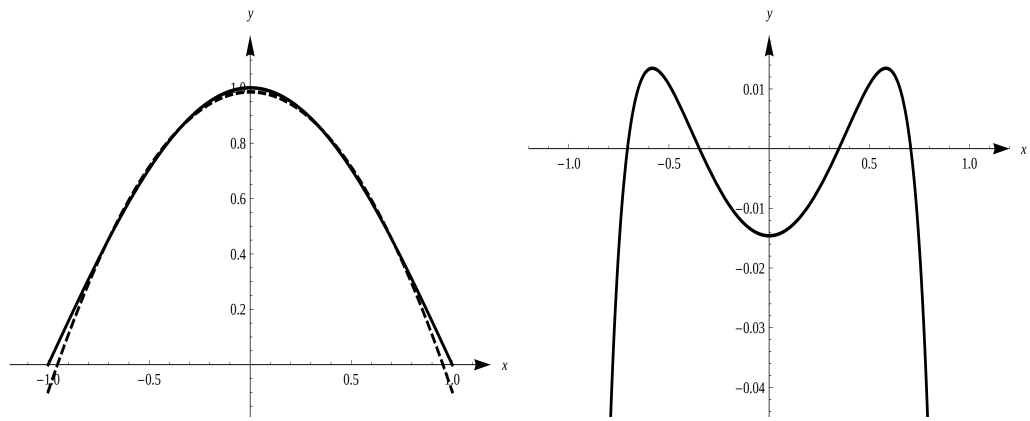
апроксимације за $n = 6$ и $m = 2$

$$\begin{aligned} p(x) &= a + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(q_0 p_0(x) + q_2 p_2(x) + q_4 p_4(x) + q_6 p_6(x)) \\ &= 0.0008629x^8 - 0.0208186x^6 + 0.2974042x^4 - 1.2610422x^2 + 1.0027343 \end{aligned}$$

је 3.68×10^{-5}, а релативна грешка је представљена на слици 4.3. На слици 4.4 приказани су графици функције $x \mapsto f(x)$ и полинома

$$x \mapsto a + (x^2 - 1/2) q_0 p_0(x) = -1.0827693x^2 + 0.9854005,$$

као и релативна грешка наведене апроксимације.



Слика 4.4: Графици функције $x \mapsto f(x)$ и полинома $x \mapsto a + (x^2 - 1/2)q_0 p_0(x)$ и релативна грешка

Табела 4.4: Нумерички резултати у примерима 4.4.1 и 4.4.2

k	q_{2k}	e_{2k+2}	q'_{2k+1}	e'_{2k+4}
0	−1.082769347042405	4.44(−1)	2.287103863997141(−1)	2.39(−3)
1	2.270832557191690(−1)	9.74(−2)	−1.941680177208599(−2)	4.02(−5)
2	−1.936241857485842(−2)	1.98(−3)	8.641187093109698(−4)	2.79(−7)
3	8.629162200449605(−4)	3.68(−5)	−2.397440322975305(−5)	1.75(−9)
4	−2.395555770714487(−5)	2.51(−7)	4.507523722168420(−7)	5.99(−12)
5	4.505323478769008(−7)	1.64(−8)	−6.148761353874306(−9)	1.95(−14)
6	−6.146774659794560(−10)	5.56(−12)	6.344566432377592(−11)	m.p.
7	6.343138140954393(−11)	1.84(−14)	−5.135154904236841(−13)	m.p.
8	−5.134318126826883(−13)	m.p.	3.342631175921556(−15)	m.p.

Пример 4.4.2 Нека је опет $f(x) = \cos(\pi x/2)$, $-1 \le x \le 1$. Слично као у претходном примеру, за скуп интерполационих ограничења у тачкама $0, \pm 1/\sqrt{2}$ и дириговану L^2-апроксимацију у односу на Чебишевљеву меру друге врсте, можемо да користимо изложену технику и теорему 2.4.3. У овом случају имамо

$$P_3(x) = 1 - 4x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) \quad \text{и} \quad q_3(x) = x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right).$$

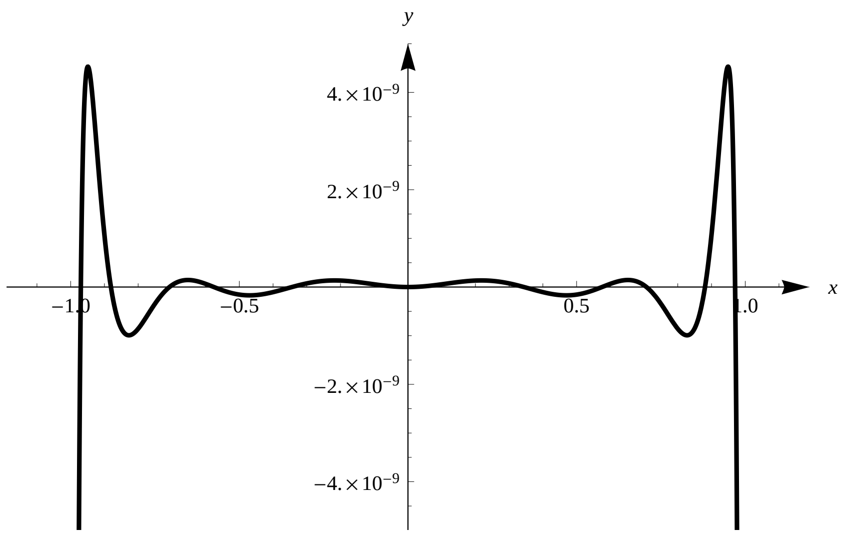
Ако означимо низ полинома ортогоналних у односу на меру $\mathrm{d}\mu'$ са r_k, $k \in \mathbb{N}_0$, (видети пример 2.4.2), добијамо

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} q'_k r_k(x), \quad q'_k = \frac{1}{\|r_k\|^2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) - P_3(x)}{x(x^2 - 1/2)} r_k(x) \mathrm{d}\mu'(x).$$

Сада је $q'_{2k} = 0$, $k \geq 0$. Коефицијенти q'_{2k+1} за $0 \leq k \leq 8$ и одговарајуће грешке e'_{2k+4} су такође дати у табели 4.4. Апроксимациони полином је

$$\begin{aligned} r(x) &= P_3(x) + x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\left(q'_1 r_1(x) + q'_3 r_3(x) + q'_5 r_5(x) + q'_7 r_7(x)\right) \\ &= -0.00002397x^{10} + 0.00091806x^8 - 0.02086295x^6 \\ &\quad + 0.25366941x^4 - 1.23370054x^2 + 1, \end{aligned}$$

а релативна грешка при апроксимацији је представљена на слици 4.5.



Слика 4.5: Релативна грешка при апроксимацији функције $x \mapsto f(x)$ полиномом $x \mapsto r(x)$

Литература

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[2] N.I. Akhiezer: *Orthogonal polynomials on several intervals*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 134 (1960), 9–12.

[3] N.I. Akhiezer, I.M. Galzman: *Theory of Linear Operators in Hilbert Space, vol I*, Pitman, Boston, 1981.

[4] W. Al-Salam, W.R. Allaway, R. Askey: *Sieved ultraspherical polynomials.* Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), 39–55.

[5] G.I. Barkov: *Some systems of polynomials orthogonal in two symmetric intervals*, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika 1960 no. 4 (17), 3–16 (Russian).

[6] B. Beckerman: *Complex Jacobi matrices*, J. Comput. Appl. Math. 127 (2001), 17–65.

[7] B. Beckerman: *On the convergence of bouded J-fractions on the resolvent set of the corresponding second order difference operator*, J. Approx. Theory 99 (1999), 369–408.

[8] S. Bernstein: *Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini.* J. Math. Pures Appl. 9(9), 127–177 (1930)

[9] S. Bernstein: *Sur une classe de polynomes orthogonaux.* Comm. de la Soc. Math. Kharkoff 4 (1930), 79–93; Complemant, Ibid. 5 (1932) 59–60.

[10] M.I. Bueno, F.M. Dopico: *A more accurate algorithm for computing the Christoffel transformation*, J. Comput. Appl. Math. 205 (2007), 567–582.

[11] T.S. Chihara: *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[12] T.S. Chihara: *The three–term recurrence relation and spectral properties of orthogonal polynomials*, In: P. Nevai: Orthogonal Polynomials, pp. 99–114.

[13] E.B. Christoffel: *Über die Gaußische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben*, J. Reine Andew. Math., 55:61–82, 1858.

[14] А.С. Цветковић: *Програмски пакет за симболичку и нумеричку конструкцију ортогоналних полинома и квадратурних формула*, Магистарска теза, Универзитет у Нишу, 2002.

[15] А.С. Цветковић: *Нестандардна ортогоналност и квадратурне формуле*, Докторска дисертација, Универзитет у Нишу, 2004.

[16] A.S. Cvetković, P. Rajković, M. Ivković: *Catalan numbers, the Hankel transform, and Fibonacci numbers.* Journal of Integer Sequences 5 (2002), Article 02.1.3.

[17] A.S. Cvetković, G.V. Milovanović: *The Mathematica Package "OrthogonalPolynomials"*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 19 (2004), 17–36.

[18] A.S. Cvetković, G.V. Milovanović, M.M. Matejić: *Rational Algorithm for Quadratic Christoffel Modification and Applications to the Constrained L^2-Approximation*, Int. J. Comput. Math. 88 (2011), 3012–3025.

[19] A.S. Cvetković, M.M. Matejić, G.V. Milovanović: *Orthogonal polynomials for modified Chebyshev measure of the first kind*, Results Math. 69 (2016), 443–455.

[20] J. Dieudonné: *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York 1969.

[21] J. Dombrowski: *Orthogonal polynomials and functional analysis*, In P. Nevai: Orthogonal Polynomials, 147–161.

[22] J. Favard: *Sur les polynomes de Tchebycheff*, C. R. Acad. Sci. Paris 200 (1935), 2052–2053.

[23] Г.М. Фихтенгольц: *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I.* Физматгиз, Москва 1962.

[24] W. Gautschi: *On generating orthogonal polynomials*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. 3 (1982), 289–317.

[25] W. Gautschi: *Algorithm 726: ORTHPOL - A package of routines for generating orthogonal polynomials and Gauss-type quadrature rules.*, ACM Trans. Math. Software 20 (1994), 21–62.

[26] W. Gautschi: *Orthogonal polynomials: applications and computations*, in Acta Numerica, 1996, Cambridge University Press, 1996, pp. 45–119.

[27] W. Gautschi: *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Oxford University Press Inc., New York, 2004.

[28] W. Gautschi: *Orthogonal polynomials (in Matlab)*, J. Comput. Appl. Math. 178, (2005), 215–234.

[29] W. Gautschi, S. Li: *A set of orthogonal polynomials induced by a given orthogonal polynomial*, Aequationes Math. 46 (1993), 174–198.

[30] W. Gautschi, G.V. Milovanović: *Gaussian quadrature involving Einstein and Fermi functions with an application to summation of series*, Math. Comp. 44 (1985), 177–190.

[31] W. Gautschi, G.V. Milovanović: *Polynomials orthogonal on the semicircle*, J. Approx. Theory 46 (1986), 230–250.

[32] W. Gautschi, G.V. Milovanović: *S–orthogonality and construction of Gauss–Turán type quadrature formulae*, J. Comput. Appl. Math. 86 (1997), 205–218.

[33] J.S. Geronimo, W. Van Assche: *Orthogonal polynomials on several intervals via a polynomial mapping*, Trans. Amer. Math. Soc. 308 (1988) 559–581.

[34] J. Geronimus: *On a set of orthogonal polynomials*. Ann. Math. 31 (1930) 681–686.

[35] A. Ghizzetti, A. Ossicini: *Quadrature Formulae*. Akademie Verlag, Berlin (1970)

[36] G.H. Golub, J.H. Welsch: *Calculation of Gauss quadrature rules.* Math. Comp. 23 (1969), 221–230.

[37] Z.S. Grinšpun: *On a class of orthogonal polynomials.* Vestnik Leningrad. Univ. 21 (1966), 147–149 (Russian).

[38] M. Heins: *Complex Function Theory*, Academic Press, New York-London, 1968.

[39] В.А. Ильин Э.Г. Позняк: *Основы математического анализа, I.* Наука, Москва 1971.

[40] M.E.H. Ismail: *On sieved orthogonal polynomials,* III: *orthogonality on several intervals*, Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986) 89–111.

[41] C. Krattenthaler: *Advanced determinant calculus*, The Andrews Festschhrift (Maratea, 1998), Sem. Lothar. Combin. 42 (1999), Art. B42q, 67 pp. (electronic).

[42] P. Lankaster: *Theory of Matrices.* Academic Press, New York – London 1969.

[43] P.D. Lax: *Functional Analysis*, Wiley-Interscience, 2002.

[44] A.P. Magnus: *Toeplitz matrix techniques and convergence of compex weight Pade approximation*, J. Comput. Appl. Math. 19 (1987), 23–38.

[45] G. Mastroianni, G.V. Milovanović: *Interpolation Processes – Basic Theory and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.

[46] Г.В. Миловановић: *Нумеричка анализа*, *I део*, Научна књига, Београд, 1991.

[47] Г.В. Миловановић: *Нумеричка анализа*, *II део*, Научна књига, Београд, 1991.

[48] G.V. Milovanović: *Construction of s-orthogonal polynomials and Turan quadrature formulae*, In: Numerical Methods and Approximation Theory III (Niš, 1987), 311–328. Univ. Niš, Niš (1988)

[49] G.V. Milovanović: *Quadratures with multiple nodes, power orthogonality, and moment-preserving spline approximation*, J. Comput. Appl. Math. 127, 267–286 (2001)

[50] G.V. Milovanović: *Construction and applications of Gaussian quadratures with nonclassical and exotic weight function*, Stud. Univ. Babes–Bolyai Math. 60 (2015), no. 2, 211-233.

[51] G.V. Milovanović: *Orthogonal polynomials on the real line, Walter Gautschi Volume 2*, Selected works with commentaries, Editors: Claude Brezinski, Ahmed Sameh, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2014, ISBN 978-1-4614-7048-9.

[52] G.V. Milovanović, S. Wrigge: *Least squares approximation with constrains*, Math. Comp. 46 (1986), 551–565.

[53] Г.В. Миловановић, Р.Ж. Ђорђевић: *Математика за студенте техничких факултета*, *I део*, Електронски факултет, Ниш, 2002.

[54] G.V. Milovanović, D.S. Mitrinović, Th.M. Rassias: *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific Publ. Co., Singapore - New Jersey - London - Hong Kong, 1994.

[55] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, A.S. Cvetković: *Calculation of Gaussian type quadrature rules with multiple nodes*, Math. Comput. Modelling 39 (2004), 325–347.

[56] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, M.M. Matejić: *On positive definitness of some linear functionals*, Stud. Univ. Babes–Bolyai Math. 51 (2006), no. 4, 157–166.

[57] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, M.M. Matejić: *Remark on orthogonal polynomials induced by the modified Chebyshev measure of the second kind*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 21 (2006), 13–21.

[58] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković: *Special classes of orthogonal polynomials and corresponding quadratures of Gaussian type*, Math. Balkanica 26 (2012), 169 184.

[59] Б. Мирковић: *Теорија мера и интеграла*, Научна књига, Београд, 1990.

[60] Д.С. Митриновић: *Предавања о редовима*, Грађевинска књига, Београд, 1986.

[61] Д.С. Митриновић: *Кошијев рачун остатака са применама, Математички проблеми и експозиције*, Научна књига, Београд, 1991.

[62] Д.С. Митриновић, Д.Д. Адамовић: *Низови и редови: дефиниције – ставови – задаци – проблеми, Математички проблеми и експозиције*, Научна књига, Београд, 1991.

[63] Д.С. Митриновић, Д.Ж. Ђоковић: *Полиноми и матрице*, Грађевинска књига, Београд, 1986.

[64] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several variables*, Academic Press, New York, 1970.

[65] М.Д. Петковић: *Симболичко израчунавање Хенкелових детерминаната и генералисаних инверза матрица*, Докторска дисертација, Универзитет у Нишу, 2008.

[66] В. Ракочевић: *Функционална анализа*, Научна књига, Београд, 1994.

[67] C.J. Rees: *Eliptic orthogonal polynomials.* Duke Math. J. 12 (1945), 173–187.

[68] H. Stahl, V. Totik: *General Orthogonal Polynomials*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[69] G. Szegő: *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 23, 4th ed., Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1975.

[70] V.B. Uvarov: *Relation between polynomials orthogonal with different weights*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 126(1):287–296, 1974.

[71] B. Wendroff: *On Orthogonal polynomials*, AMS procedings, 1960.

Биографија

Марјан Матејић је рођен у Нишу 03. 08. 1977. године, где је завршио основну школу као носилац дипломе ,,Вук Караџић”, као и специјализовано математичко одељење при Гимназији ,,Светозар Марковић” у Нишу. На студије на Филозофском факултету у Нишу уписао се школске 1996/97. године, а дипломирао на смеру за Теоријску математику и примене 08. 10. 2001. године, са просечном оценом у току студија 9.59.

На последипломске студије на Природно-математичком факултету у Нишу уписао се на смеру Нумеричка математика и оптимизација. Све планом и програмом предвиђене испите положио је са просечном оценом 10 и 14. 11. 2005. године одбранио магистарску тезу под називом ,,Фрактални скупови добијени интерполацијом у равни”.

Након завршетка основних студија, 19. 12. 2001. године изабран је за асистента-приправника на Катедри за математику Електронског факултета у Нишу, где и сада ради у звању асистент. Као сарадник Катедре за математику био је ангажован на извођењу рачунских вежби из предмета: Линеарна алгебра, Математичка анализа, Матаматика I, Математика II, Нумеричка анализа, Математички методи, Математика-одабрана поглавља, Вероватноћа и статистика и лабораторијских вежби из предмета Математика III.

У оквиру научно-истраживачког рада на Катедри за математику Електронског факултета у Нишу учествовао је у реализацији следећих пројеката:

- *Примењени ортогонални системи, конструктивне апроксимације и нумерички методи* (2002–2005);
- *Ортогонални системи и примене* (2006–2010).

Summary

Orthogonal polynomials, their construction, analysis and application, have an important role in the Applied mathematics. Nevertheless, the investigations in the Constructive theory of Orthogonal polynomials are still in an early development phase. The central concept is a three-term recurrence relation. Knowing its coefficients is of outmost importance. Once these are known, all other computational aspects regarding Orthogonal polynomials are easily available. Obtaining these coefficients is a fairly difficult task, thus, keeping up-to-date libraries on new developments is of high importance. The new era mighty computer packages are being built containing the readily-available results and also the tools for calculating the yet unknown parameters.

Orthogonal polynomials, as all other special functions, owe their origin and development to practice in our physical and the scientific world. As Mathematics develops and awareness in its application broadens, the new horizons open in different scientific fields. Such is the case with the Constructive theory of Orthogonal polynomials. The number of its applications is augmenting on daily bases as a result of new developments in the topic. Among applications with the far most importance and longest history is the one in Numerical integration. The underlying concept is orthogonal decomposition providing the least error with a prescribed computational effort. Thus the search for the most appropriate dense subspace of approximation.

This dissertation is a result of the research I was involved in under the supervision and guidance of academician Gradimir Milovanović. The research addressed the two key issues, mentioned earlier, related to the theory of Orthogonal polynomials on real line. The summary of the known and original results is given in a systematic overview through four chapters. The Bibliography contains 71 titles of scientific papers and books.

The first chapter is introductory. Contains basic definitions and properties of the theory of Orthogonal polynomials. In particular, a separate Section is devoted to Chebyshev polynomials of the first and second kind. In the final section two algorithms for the construction of the three-term recurrence coefficients are enclosed.

Modification algorithms are treated in the second chapter. Weight functions of the linear functional are transformed and the influence on the re-

currence coefficients is observed. The original algorithm for the quadratic Christoffel modification is presented along with its application.

Modification of Chebyshev's measures of the first and second kind is the topic of the third chapter. Research of these non-classic weights finalized in the established recurrence coefficients for an entirely new class of orthogonal polynomials.

The forth chapter is devoted to numerical integration. Necessary and sufficient conditions for the positive definiteness of certain class of linear functionals is presented. A standard L^2-approximation is also treated. As an example, the modification algorithm from the second chapter is applied to a polynomial L^2-approximation.

Results. Math. 69 (2016), 443–455

1422-6383/16/030443-13
published online January 28, 2016
DOI 10.1007/s00025-016-0529-8

Results in Mathematics

Orthogonal Polynomials for Modified Chebyshev Measure of the First Kind

Aleksandar S. Cvetković, Marjan M. Matejić, and
Gradimir V. Milovanović

Abstract. Given numbers $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, and the nth-degree monic Chebyshev polynomial of the first kind $\widehat{T}_n(x)$, the polynomial system "induced" by $\widehat{T}_n(x)$ is the system of orthogonal polynomials $\{p_k^{n,s}\}$ corresponding to the modified measure $\mathrm{d}\sigma^{n,s}(x) = \widehat{T}_n^{2s}(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$, where $\mathrm{d}\sigma(x) = 1/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ is the Chebyshev measure of the first kind. Here we are concerned with the problem of determining the coefficients in the three-term recurrence relation for the polynomials $p_k^{n,s}$. The desired coefficients are obtained analytically in a closed form.

Mathematics Subject Classification. Primary 33C45.

Keywords. Orthogonal polynomials, Chebyshev measure, Chebyshev polynomials, recurrence relation.

1. Introduction

Let $\mathrm{d}\sigma(x)$ be a positive measure on $\mathbb{R}$, with finite or unbounded support, having finite moments of all orders, and let $\{p_k\}$, $k \in \mathbb{N}_0$, be the corresponding (monic) orthogonal polynomials,

$$p_k(x) = p_k(x; \mathrm{d}\sigma), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

which satisfy the following three-term recurrence relation (cf. [5, p. 97])

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$
$$p_0(x) = 1, \quad p_{-1}(x) = 0,$$

The work was supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development.

International Journal of Computer Mathematics
Vol. 88, No. 14, September 2011, 3012–3025

Rational algorithm for quadratic Christoffel modification and applications to the constrained L^2-approximation

A.S. Cvetković[a], G.V. Milovanović[b]* and M.M. Matejić[c]

[a]*Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, P.O. Box 224, 18000 Niš, Serbia;* [b]*Faculty of Computer Sciences, Megatrend University Belgrade, Bulevar umetnosti 29, 11070 Novi Beograd, Serbia;* [c]*Faculty of Electronic Engineering, University of Niš, P.O. Box 73, 18000 Niš, Serbia*

(Received 10 May 2010; final version received 17 February 2011)

In this paper, we consider a rational algorithm for modification of a positive measure by quadratic factor, $d\hat{\sigma}(t) = (t-z)^2\, d\sigma(t)$, where it is allowed z to be in $\mathrm{supp}(d\sigma)$. Also, we present an application of modified algorithm to the measures $d\hat{\sigma}(t) = T_2^2(t)\, d\sigma(t)$ and $d\sigma'(t) = t^2 T_2^2(t)\, d\sigma(t)$, where $T_2(t) = t^2 - \frac{1}{2}$ is the second degree monic Chebyshev polynomial of the first kind and $d\sigma(t) = \sqrt{1-t^2}\, dt$, $t \in [-1, 1]$, is the Chebyshev measure of the second kind. Also, we present an application to the constrained L^2-polynomial approximation.

Keywords: orthogonal polynomials; Chebyshev polynomials; positive measure; Christoffel algorithm; three-term recurrence relation; constrained L^2-approximation

2010 AMS Subject Classifications: 33C45; 33C47; 41A10; 41A29; 65F25

1. Introduction

Let $d\sigma$ be a positive measure on $\mathbb{R}$ with an infinite support such that polynomials are integrable and let $\{p_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, be a sequence of the corresponding monic orthogonal polynomials,

$$p_n(t) = p_n(d\sigma; t), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

It is known that they satisfy a three-term recurrence relation of the form

$$\begin{aligned} p_{n+1}(t) &= (t-\alpha_n)p_n(t) - \beta_n p_{n-1}(t), \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ p_0(t) &= 1, \quad p_{-1}(t) = 0, \end{aligned}$$

where $\alpha_n = \alpha_n(d\sigma) \in \mathbb{R}$, $\beta_n = \beta_n(d\sigma) > 0$, and by convention, $\beta_0 = \beta_0(d\sigma) = \sigma(\mathbb{R})$.

*Corresponding author. Email: gvm@megatrend.edu.rs

ISSN 0020-7160 print/ISSN 1029-0265 online

DOI: 10.1080/00207160.2011.565335
http://www.informaworld.com

STUDIA UNIV. "BABEŞ–BOLYAI", MATHEMATICA, Volume LI, Number 4, December 2006

ON POSITIVE DEFINITENESS OF SOME LINEAR FUNCTIONALS

G.V. MILOVANOVIĆ, A.S. CVETKOVIĆ AND M.M. MATEJIĆ

Dedicated to Professor Gheorghe Coman at his 70^{th} anniversary

Abstract. In this paper we investigate the positive definiteness of linear functionals $\mathcal{L}$ defined on the space of all algebraic polynomials $\mathcal{P}$ by
$$\mathcal{L}(p) = \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k p(z_k), \quad p \in \mathcal{P}.$$

1. Introduction

Let $\mathcal{P}$ be the space of all algebraic polynomials. In this paper we investigate linear functionals $\mathcal{L}$ defined by

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k p(z_k), \quad p \in \mathcal{P}. \tag{1}$$

In general, we investigate functionals for which $w_k, z_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, but with the following restrictions. First, we assume that $w_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. This condition is rather natural, since, assuming $w_k = 0$, for some $k \in \mathbb{N}$, simply produces a linear functional where summation is performed over $\mathbb{N}\backslash\{k\}$. Additionally, we will not loose any generality if we assume that $z_i \neq z_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, since, for example, we may skip summation over j and use $w_i' = w_i + w_j$ at point z_i.

For the set of nodes z_i, $i \in \mathbb{N}$, we introduce the notation $\mathcal{Z} = \{z_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Second we are going to assume that

$$\lim_{k\to+\infty} z_k = 0 \tag{2}$$

Received by the editors: 15.08.2006.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 54C50, 32A05.
Key words and phrases. linear functionals, algebraic polynomials.

FACTA UNIVERSITATIS (NIŠ)
SER. MATH. INFORM. 21 (2006), 13–21

REMARK ON ORTHOGONAL POLYNOMIALS INDUCED BY THE MODIFIED CHEBYSHEV MEASURE OF THE SECOND KIND*

G. V. Milovanović, A. S. Cvetković, M. M. Matejić

Abstract. In this note we introduce a system of polynomials $\{\widehat{P}_k\}$ orthogonal with respect to the modified Chebyshev measure of the second kind,

$$\mathrm{d}\widehat{\lambda}(t) = \frac{t + \frac{1}{2}c + \frac{1}{c}}{t + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2c}} \sqrt{1 - t^2}\, \mathrm{d}t, \quad t \in [-1, 1],$$

where c is a positive real number, and determine the coefficients in the corresponding three-term recurrence relation for these polynomials in an analytical form.

1. Introduction

In this note we investigate polynomials orthogonal with respect to the moment functional

$$\mathcal{L}(P) = \int_{-1}^{1} P(t) \frac{t + \frac{1}{2}c + \frac{1}{c}}{t + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2c}} \sqrt{1 - t^2}\, \mathrm{d}t, \quad P \in \mathcal{P}, \tag{1.1}$$

where $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. The special case $c = 1$ has been considered in [4]. To make it more clear, Figure 1 displays graph of the rational part of the weight for $c = \sqrt{2}$. As c tends to 1, the singularity of the rational part tends

Received January 18, 2006
2000 *Mathematics Subject Classification.* 33C45, 33C47.
*The authors were supported in part by the Serbian Ministry of Science and Environmental Protection (Project: Orthogonal Systems and Applications, grant number #144004) and the Swiss National Science Foundation (SCOPES Joint Research Project No. IB7320–111079 "New Methods for Quadrature").

ОБРАЗАЦ 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а МАРЈАН МАТЕЈИЋ

број уписа

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом РАЗВОЈ РАЦИОНАЛНИХ АЛГОРИТАМА ЗА КОНСТРУКЦИЈУ ОРТОГОНАЛНИХ ПОЛИНОМА ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Крагујевцу, 20.06.2016. год.

Марјан Матејић

ОБРАЗАЦ 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Марјан Матејић

Број уписа

Студијски програм

Наслов рада Развој рац. алгоритама за конструкцију орт. полинома једне променљиве

Ментор Академик др Градимир Миловановић

Потписани Марјан Матејић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Крагујевцу.

Потпис аутора

У Крагујевцу, 20.06.2016. год.

Марјан Матејић

ОБРАЗАЦ 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Крагујевцу унесе моју докторску дисертацију под насловом:

РАЗВОЈ РАЦИОНАЛНИХ АЛГОРИТАМА ЗА КОНСТРУКЦИЈУ ОРТОГОНАЛНИХ ПОЛИНОМА ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Крагујевцу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, чији је кратак опис дат је на обрасцу број 4.).

Потпис аутора

У Крагујевцу, 20.06.2016.год.

Марјан Матејић

ОБРАЗАЦ 4.

1. ***Ауторство -***
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. ***Ауторство – некомерцијално.***
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. ***Ауторство - некомерцијално – без прераде.***
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. ***Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима.***
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. ***Ауторство – без прераде.***
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. ***Ауторство - делити под истим условима.***
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.