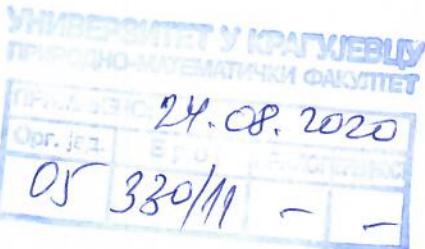


Истражују је сагласан.  
Софја Димитријевић



НАСТАВНО-НАУЧНОМ ВЕЋУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

ВЕЋУ ЗА ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ  
УНИВЕРЗИТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

ИЗВЕШТАЈ О НАУЧНОЈ ЗАСНОВАНОСТИ ТЕМЕ  
И ИСПУЊЕНОСТИ УСЛОВА КАНДИДАТА  
ЗА ИЗРАДУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

На седници Већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу одржаној 15.07.2020. године, одлуком број IV-01-466/16, а на предлог Наставно-научног већа Природно-математичког факултета, одлука број 270/XII-2 од 24.06.2020. одређени смо у Комисију за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата Невене Васовић и предложеног ментора за израду докторске дисертације под насловом

**Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа.**

На основу приложене документације, као и личног увида у рад кандидата, подносимо Наставно-научном већу Природно-математичког факултета и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу следећи

ИЗВЕШТАЈ

**1. Научни приступ проблему предложеног нацрта докторске дисертације и процена научног доприноса крајњег исхода рада**

Нумеричка анализа, још општије Нумеричка математика, се развијала у оквирима класичне математике, као и у радовима Њутна, Лагранжа, Ојлера и других, кад год би се неки проблем решавао приближним методима. У наше време она се издвојила у посебну грану математике. Ортогонални полиноми у великој мери прожимају Нумеричку анализу и Теорију апроксимација и они се по први пут јављају као именоци у верижним разломцима код анализе Гаусових квадратурних формул у другој половини 19. века. Њихова важна примена је, дакле, у конструкцији квадратурних формул максималног или скоро максималног степена алгебарске тачности за интеграле са позитивном мером. Једна од најважнијих класа ортогоналних полинома јесу ортогонални полиноми на реалној правој и њима припада област истраживања кандидата Невене Васовић. Како је теорија класичних ортогоналних полинома (Јакобијеви, Лагерови, Ермитови) у доброј мери развијена, шира класа полинома је и даље непознаница, као и разни аспекти примене таквих полинома.

Један од најважнијих проблема конструктивне теорије ортогоналних полинома јесте одређивање коефицијената трочлане рекурентне релације за некласичне тежинске функције, као и конструкција коефицијената ортогоналних полинома за модификоване мере, добијене најчешће производом оригиналне мере са позитивним рационалним фактором  $\frac{u(x)}{v(x)}$ , где су  $u(x)$  и  $v(x)$  полиноми. Први резултати у овој области долазе од Кристофела и његовог рада из 1858. који је разматрао случај са само полиномском модификацијом мере ( $v(x) = 1$ ) и изразио нове ортогоналне полиноме помножене са  $u(x)$ , у облику детерминанте, као линеарну комбинацију полазних ортогоналних полинома  $\pi_{n+i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, l$ . Сто година касније Уваров је решио случај када је  $v(x) \neq 1$ . Развоју конструктивне теорије ортогоналних полинома допринео је Волтер Гаучи, који је у својим радовима развио ефикасне алгоритме за нумеричко генерисање ортогоналних полинома, дао је анализу стабилности и неке нове примене, тако да је данас могућа конструкција многих нових класа ортогоналних полинома, као и њихова примена у различитим областима не само нумеричке математике, већ и у многим другим научним областима. Савремени развој конструктивне теорије ортогоналних полинома је у чврстој спрези са ажурирањем и унапређењем специјализованих софтверских пакета. Из тог разлога је планирано да се кандидат Невена Васовић у једном делу свог истраживања бави имплементацијом процедуре у софтверу Mathematica које се могу применити на неким проблемима конструкције теорије ортогоналних полинома. Планирано је да кандидат Невена Васовић у својој дисертацији истражује коефицијенте трочлане рекурентне релације, као и особине полинома који су ортогонални за неке полиномске модификације класичних мера. Биће учињен покушај да се ови проблеми интерпретирају и у симболичком облику. Важна примена ортогоналних полинома је у конструкцији квадратурних формул, па због тога један део докторске дисертације припада и овој области и односиће се одређивање ефикасног и нумерички стабилног алгоритма за конструкцију одговарајућих Гаусових квадратура, које се за различите мере интензивно истражују последњих педесетак година, посебно након Голуба и Велча (Mathematics of Computations, 1969). Интезивно се истражују и модификоване Гаусове квадратуре у разним правцима. Недавно, у раду Миловановића (Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math., 2018) дат је ефикасан нумерички алгоритам за конструкцију тзв. Гаус-Рис квадратурне формуле. Следећи овај рад, кандидат Невена Васовић планира да у свом истраживању одреди нумерички стабилан алгоритам за конструкцију генералисаних Гаус-Рисових квадратура, као и да нумерички конструише одговарајуће класе ортогоналних полинома у односу на производ Гегенбауерове и експоненцијалне тежине на интервалу  $[-1, 1]$ .

Процена крајњег исхода истраживања и рада на дисертацији је да ће се одредити коефицијенти трочлане рекурентне релације, као и да ће се добити нове особине полинома ортогоналних у односу на полиномске модификације класичних мера (Чебишевљевих мера прве и друге врсте), при чему ће ови проблеми бити третирани симболичким израчунавањима. Даље, очекује се и да ће се наћи нумерички стабилан алгоритам за конструкцију генералисаних Гаус-Рисових квадратура, као и за нумеричку конструкцију одговарајућих класа ортогоналних полинома.

Сва израчунавања биће изведена у софтверу Mathematica уз интезивно коришћење пакета OrthogonalPolynomials.

## 2. Образложение предмета, метода и циља који уверљиво упућује да је предложена тема од значаја за развој науке

Предмет истраживања јесу полиноми једне реалне променљиве ортогонални у односу на полиномске модификације Чебишевљевих мера прве и друге врсте, њихова симболичка израчунавања и диференцне особине. Поред овога, предмет дисертације јесте и одређивање стабилног нумеричког алгоритма за конструкцију параметара генералисаних Гаус-Рисових квадратурних формулa, као и нумеричка конструкција одговарајућих ортогоналних полинома.

Како је један од најважнијих проблема конструктивне теорије ортогоналних полинома одређивање коефицијената трочлане рекурентне релације за некласичне тежинске функције, због тога у овом истраживању биће учињен покушај имплементације процедуре у софтверском програму Mathematica које се могу применити на неким проблемима конструктивне теорије ортогоналних полинома. Планирано је да се имплементиране функције ослањају на функције пакета OrthogonalPolynomials који је описан у радовима Цветковића и Миловановића [Facta Univ. Ser. Math. Inform. **19** (2004)] и [Math. Balkanica **26** (2012)].

Испитивање особина ортогоналних полинома са модификованим тежинама врло је значајно за конструкцију одговарајућих квадратурних формулa. Овакав приступ у конструкцији квадратура проширује њихову област тачности са алгебарских на рационалне функције, са унапред дефинисаним половима.

У овој дисертацији кандидата Невене Васовић планирано је истраживање коефицијената трочлане рекурентне релације за полиноме ортогоналне у односу на меру

$$d\mu(x) = \frac{|\hat{T}_n(x)|^{2s}}{\sqrt{(1-x^2)}} dx, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

али када је степен  $n = 2$  и  $s > -1/2$  реалан број. Биће размотрене диференцно-диференцијалне особине ових полинома и електростатичка интерпретација њихових нула. Ови проблеми биће интерпретирани у симболичком облику. У раду [Results Math. **69** (2016)], Миловановић и његови сарадници су истраживали полиноме ортогоналне у односу на меру (1), али када је параметар  $s$  природан број. Специјалан случај мере (1) када је  $s = 1$  дат је у раду Гаучија и Лија [Aeq. Math. **46** (1993)]. Случај  $n = 1$  и  $s > -1/2$ , као и уопштења Гегенбауерове мере разматрана су у раду Лашченова из 1953 [Gos. Ped. Inst. Uč. Zap. **89** (1953), 167-189].

Предмет ове дисертације су и особине полинома који су ортогонални у односу на модификоване Чебишевљеве мере друге врсте

$$d\mu(x) = |\hat{U}_n(x)|^{2s} (1-x^2)^{1/2+s} dx, \quad n \geq 2, \quad (2)$$

али када је  $n = 2$  и  $s > -1/2$  реалан број. Резултати истраживања повезани су и са теоријом  $s$  –ортогоналних и  $\sigma$  –ортогоналних полинома. У раду Миловановића [J. Comput. Appl. Math. **127** (2001)] дат је метод који је заснован на интерпретацији  $s$  –ортогоналности преко имплицитно дефинисане стандардне ортогоналности.

Предмет истраживања кандидата Невене Васовић јесу и квадратуре Гаусовог типа, прецизније нумеричка конструкција генерализаних Гаус-Рисових квадратурних формулa и одговарајућих класа ортогоналних полинома на  $(-1,1)$  у односу на тежинску функцију

$$\omega(t; x) = \exp(-xt^2)(1 - t^2)^{(\lambda-1/2)}, \quad \lambda > -1/2, \quad (3)$$

када је  $x > 0$ . Рисове квадратурне формуле су разматране раније у радовима у области квантне хемије (нпр. M. Dupuis, J. Rys, H.F. King [J. Chem. Phys. **65** (1976), 111 - 116; J. Comput. Chem. **4** (1983), 154- 157], D.W. Schwenke [Comput. Phys. Comm. **185** (2014), 762 - 763] и B.D. Sh [Comput. Theor. Chem. **1074** (2015), 178 - 184]). У свом прегледном раду [J. Comput. Chem. **120** (2016)], Кинг је дао један нумерички интеграциони метод за одређивање коефицијената трочлане релације Рисових полинома.

**Циљ** овог рада и истраживања је да се добију нови резултати за поменуте проблеме, у симболичком или нумеричком облику, који би поред теоријског значаја могли да имају и примене у другим областима.

**Основне хипотезе** од којих се полази у овом истраживању постављене су на основу до сада познатих резултата у конструктивној теорији ортогоналних полинома. Неки од радова од којих се полази наведени су у делу где је описан предмет и циљ предложене теме. Електростатичка интерпретација нула класичних ортогоналних полинома (Јакобијевих, Лагерових, Ермитових) један су од најелегантнијих резултата у теорији специјалних функција. Почеки истраживања налазе се у радовима Стилтјеса из 1885. и Cerea [Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23** (1975)]. Новија истраживања у овој области могу се наћи у радовима Исмаила [Pacific J. Math. **193** (2000), 355-369], [Random Matrices and Their Applications **40** (2001), 225-244] и Марселана и осталих [Linear Algebra Appl. **260** (1997), 258-272]. У овом истраживању полази се од хипотезе да се ради о логаритамском потенцијалу.

У истраживању ће се користити разне **математичке методе истраживања**, специјално методе математичке, комплексне и нумеричке анализе, те још уже методе конструктивне теорије ортогоналних полинома и нумеричке интеграције. Оне ће делом бити имплементиране и проверене уз интезивно коришћење софтверског система Mathematica и у оквиру њега имплементираног пакета OrthogonalPolynomials, како у симболичким, тако и у нумеричким израчунавањима. За решевање проблема конструктивне теорије ортогоналних полинома биће коришћен Чебишевљев и модификован Чебишевљев алгоритам, које је у својим радовима осамдесетих година прошлог века описао W. Gautschi [SIAM J. Sci. Statist. Comput. **3** (1982) 282-317], а који су систематизовани у његовој књизи *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Clarendon Press, Oxford (2004).

### **3. Образложение теме за израду докторске дисертације омогућава закључак да је у питању оригинална идеја или оригинални начин анализирања проблема**

Класични ортогонални полиноми имају широку примену у многим областима науке и инжењерства. Насупрот њима полиноми ортогонални у односу на нестандардне тежине и мере имају много мање примећену примену. Разлог овоме су бројне тешкоће које прате њихово генерирање. У последње време са развојем конструктивне теорије ортогоналних полинома и специјализованих софтверских пакета реализованих у системима Matlab и Mathematica, који користе недавни прогрес у симболичком израчунавању и нумеричком рачунању у аритметици произвољне дужине, постигнут је напредак како у методама везаним за израчунавања некласичних ортогоналних полинома тако и у могућности нових примена.

Полиномске модификације Чебишевљевих мера прве и друге врсте, као и истраживање особина одговарајућих некласичних ортогоналних полинома по први пут се систематски раде у овој дисертацији.

Са друге стране, разне модификације Гаусових квадратура, као и саме Гаусове квадратуре за специфичне некласичне тежинске функције, се интензивно истражују последњих тридесетак година. У радовима из области квантне хемије током седамдесетих година прошлог века, за нумеричко израчунавање двоструких интеграла, којим се описује интеракција електрона, након редукције на једно-димензионалне интеграле, предложене су тзв. Рисове квадратурне формуле, које су биле предмет истраживања током низа година. Циљ је интеграција парних алгебарских полинома екстремно високог степена у односу на експоненцијалну тежинску функцију  $\exp(-x t^2)$  на интервалу  $[0,1]$ , где је  $x$  позитиван параметар. У свом скоријем истраживању Миловановић је дао ефикасан нумерички алгоритам за израчунавање параметара ових квадратура, интерпретирајући их као квадратуре Гаусовог типа. У истраживању које се предлаже по први пут ће се проучавати тзв. генералисане Гаус-Рисове квадратурне формуле у односу на производ поменуте експоненцијалне функције и ултрасферне Гегенбауерове тежинске функције, са посебним освртом на важне Чебишевљеве случајеве. У таквом концепту Гаус-Рисове квадратуре постају специјални (Лежандров) случај.

На основу свега наведеног Комисија закључује да је предложена тема „**Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа**“ кандидата Невене Васовић оригинална.

### **4. Усклађеност дефиниције предмета истраживања, основних поjmova, предложене хипотезе, извора података, метода анализе са критеријумима науке уз поштовање научних принципа у изради коначне верзије докторске дисертације**

Кандидат Невена Васовић ће у изради коначне верзије докторске дисертације обухватити све елементе савременог научно-истраживачког рада поштујући основне критеријуме математичке науке и научних принципа. Усклађеност свих сегмената истраживања, па и овог истраживања, у оквиру математике као егзактне науке се

подразумева, јер само на тај начин истраживање ће водити ка валидним научним резултатима. Добијени резултати ће бити верификовани у познатим научним часописима за нумеричку и примењену математику, као и изложени на научним скуповима.

## 5. Предложени ментор докторске дисертације

Институт за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу је за ментора ове дисертације предложио академика др Градимира Миловановића, редовног професора у пензији. Академик др Градимир Миловановић се бави истраживањем у научној области Нумеричка анализа и теорија апроксимација и има публиковане радове у водећим иrenomираним научним часописима и велики број саопштења на међународним и националним конференцијама. Професор Миловановић ће се бавити координацијом рада са кандидаткињом, давањем истраживачких идеја, усмеравању ка методама истраживања, праћењу статуса и квалитета урађеног истраживања.

Листа референци предложеног ментора којима се доказује испуњеност услова за менторство:

**G.V. Milovanović:** Generalized Gaussian quadratures for integrals with logarithmic singularity, Filomat 30 (2016), 1111 – 1126 (M22, ISSN 0354-5180, IF (2016)=0.695), DOI: 10.2298/FIL1604111M

Z. Xu, **G.V. Milovanović:** Efficient method for the computation of oscillatory Bessel transform and Bessel Hilbert transform, J. Comput. Appl. Math. 308 (2016), 117 – 137 (M21, ISSN 0377-0427, IF (2016)=1.357), <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.05.031>

**G.V. Milovanović:** Generalized weighted Birkhoff-Young quadratures with the maximal degree of exactness, Appl. Numer. Math. 116 (2017), 238 – 255 (M22, ISSN 0168-9274, IF (2017)=1.263), <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2016.06.012>.

W. Gautschi, **G.V. Milovanović:** Binet-type polynomials and their zeros, Electron. Trans. Numer. Anal. 50 (2018), 52 – 70 (M21, ISSN 1068–9613, IF (2018)=1.475), DOI: 10.1553/etna\_vol50s52 .

**G.V. Milovanović:** A note on extraction of orthogonal polynomials from generating function for reciprocal of odd numbers, Indian J. Pure Appl. Math. 50 (2019), 15 – 22 (M23, ISSN 0019-5588, IF (2019)=0.516), <https://doi.org/10.1007/s13226-019-0303-1>

## 6. Преглед научно-истраживачког рада кандидата

1. A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, **N. Vasović:** Recurrence relation and differential equation for a class of orthogonal polynomials, Results Math. 73 (2018), no. 1, 73:16 (M22, ISSN 1422-6383, IF(2018)=0.873) <https://doi.org/10.1007/s00025-018-0779-8>.

- 
2. A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, N. Vasović: *Differential Equation for a Class of Orthogonal Polynomials, Second International Conference, Mathematics Days in Sofia* July 10-14, 2017, Sofia, Bulgaria.

## ЗАКЉУЧАК

Кандидат Невена Васовић је студент докторских академских студија математике на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу. У досадашњем раду је показала изузетно интересовање за научно-истраживачки рад и висок степен одговорности и способности решавања постављених научних задатака, као и висок степен самосталности у решавању истих.

Досадашњи резултати научно-истраживачког рада кандидата везани за предложену тему докторске дисертације већ су објављени у једном раду категорије М22 (рад [1] у часопису међународног значаја, из библиографије кандидата), а два рада су у завршној фази припреме. Такође, кандидат Невена Васовић је један свој рад саопштила на међународној конференцији.

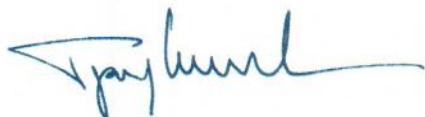
На основу анализе предложеног плана и програма истраживања, избора методологије и очекиваних резултата истраживања, Комисија сматра да предложена тема докторске дисертације кандидата Невене Васовић јесте актуелна и веома важна, како са теоријске тачке, тако и због примена. Планирано је истраживање некласичних ортогоналних полинома, одређивање коефицијената одговарајуће трочлане рекурентне релације, као и више диференцно-диференцијалних особина. Ови проблеми биће третирани у симболичком облику. За модификоване Гаус-Рисове квадратуре планирано је одређивање ефикасног нумеричког алгоритма за израчунавање параметара квадратура, као и нумеричко израчунавање одговарајућих класа ортогоналних полинома. Добијени теоријски резултати биће, такође, верификовани и у софтверу Mathematica, и биће од користи у многим гранама математике и технике, где се користи теорија ортогоналности, као и Гаусове и њима сродне квадратуре.

Комисија је мишљења да кандидат Невена Васовић испуњава све услове који су неопходни за пријаву теме за израду докторске дисертације и да ће успешно реализовати сва планирана истраживања. За ментора дисертације предлажемо академика др Градимира Миловановића, редовног професора у пензији.

Конечно, Комисија са задовољством предлаже Наставно-научном већу Природно-математичког факултета у Крагујевцу и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу да позитивно оцене испуњеност услова кандидата **Невене Васовић** и научну заснованост теме њене докторске дисертације и одобре јој израду докторске дисертације под називом „**Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа**”.

У Београду и Крагујевцу, 20. 8. 2020.

Комисија:



---

Академик др Градимир В. Миловановић, редовни професор у пензији, **ментор**  
Математички институт САНУ, Београд

Ужа научна област: Нумеричка анализа и теорија апроксимација

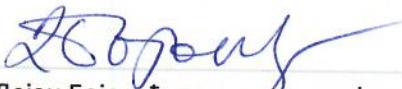


---

др Марија Станић, редовни професор, **председник Комисије**

Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу

Ужа научна област: Математичка анализа са применама



---

др Дејан Бојовић, ванредни професор, **члан Комисије**

Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу

Ужа научна област: Математичка анализа са применама