

*Извештај је сачињен.
Анастасија Томановић*

Наставно-научном већу Природно-математичког факултета и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу

На седници Наставно-научног већа Природно-математичког факултета у Крагујевцу одржаној 29.08.2018. године (број одлуке 520/XVI-1) и на седници Већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу одржаној 12.09.2018. године (број одлуке IV-01-653/16) одређени смо за чланове Комисије за оцену научне заснованости теме докторске дисертације под називом „Усредњене квадратурне формуле са варијантама и примене“ и испуњености услова кандидата Јелене Томановић. На основу приложене документације Комисија подноси следећи

Извештај о оцени научне заснованости теме и испуњености услова кандидата за израду докторске дисертације

1. Научни приступ проблему предложеног нацрта докторске дисертације и процена научног доприноса крајњег исхода рада

Нумеричка анализа, још општије Нумеричка математика, се на почетку развијала у оквирима Класичне математике, на пример у радовима Њутна, Лагранжа, Ојлера и других, кад год би се неки проблем решавао приближно. У наше време она се издвојила у посебну грану Математике. Приближна израчунавања воде ка тачним када се грешка смањује, чему све више доприноси интензиван развој рачунарске технике која доприноси решавању задатака Нумеричке математике. Посебан део Нумеричке анализе је Нумеричка интеграција којој припада тема ове докторске дисертације кандидата Јелене Томановић. Формуле за приближна израчунавања одређених интеграла су квадратурне формуле, а међу њима оне најефикасније, са максимално могућим степеном тачности су Гаусове квадратурне формуле или квадратуре. У последња два века оне се интензивно истражују. 1969. године је објављен метод за њихову ефикасну и нумерички стабилну конструкцију у раду Голуба и Велша (Mathematics of Computation). За практичну оцену грешке Гаусових квадратурних формула показало се да су од посебног значаја формуле које је увео шездесетих година прошлог века руски инжењер и математичар Кронрод, касније назване Гаус-Кронродовим квадратурним формулама. Овим формулама посвећена су многа истраживања у последњих 50-60 година. За те формуле које имају позитивне тежинске коефицијенте и реалне чворове конструисане су стабилне нумеричке процедуре конструкције, тако да је од посебног значаја питање егзистенције позитивних Гаус-Кронродових квадратура. Још раније је показано да у случају неограничених интервала и класичних тежинских функција такве формуле не постоје. У последње време је неегзистенција доказана и у случајевима интервала коначне дужине од стране аустријског математичара Першторфера и његових сарадника. Тако се јавља потреба за конструкцијом алтернатива Гаус-Кронродових квадратурних формула. Једна таква алтернатива је предложена у виду усредњених квадратурних формула Гаусовог типа, које су уведене у радовима Лорија и Спалевића, објављеним у часопису Mathematics of Computation. Посебно су од интереса са становишта једноставне нумеричке конструкције усредњене квадратуре које је увео Спалевић (Mathematics of Computation, 2007), јер захтевају готово исти нумерички напор за конструкцију као и стандардне Гаусове квадратурне формуле.

Кандидат Јелена Томановић планира у својој дисертацији испитивање унутрашњости уопштених усредњених Гаусових квадратура и њихових скраћених варијанти са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама. Питање унутрашњости (интерналности) је важно, јер је примена ових (као и других) квадратурних формула немогућа у случају не мале класе подинтегралних функција које нису дефинисане ван интервала интеграције. Истраживање је базирано како на класичним знањима Математике, тако и на савременим методама Теорије апроксимација, Нумеричке анализе, Нумеричке интеграције, посебно Теорије усредњених квадратура која се развија у последњем периоду. У једном сегменту свог истраживања и рада кандидат Јелена Томановић ће испитивати процену грешке израчунавања вишедимензионалних и хиперповршинских интеграла апроксимираних формулама

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПР...НО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА

П	17.10.2018
С	СТРЕПНОСТ
05	470/2 - -

које се конструишу узастопном применом Гаусових квадратура. За процену ће бити конструисане одговарајуће формуле узастопном применом Гаус-Кронродових и уопштених усредњених Гаусових квадратура.

Процена крајњег исхода истраживања и рада на овој дисертацији је да ће се добити услови под којима су уопштене усредњене Гаусове квадратуре и њихове скраћене варијанте са Бернштајн-Сегеевим тежинским функцијама унутрашње, као и да ће се кроз процену грешке показати прецизност израчунавања вишедимензионалних и хиперповршинских интеграла апроксимираних формулама које се конструишу узастопном применом Гаусових квадратура.

2. Образложење предмета, метода и циља који уверљиво упућују да је предложена тема од значаја за развој науке

Предмет истраживања је унутрашњост уопштених усредњених Гаусових квадратура и њихових скраћених варијанти са Бернштајн-Сегеевим тежинским функцијама и процена грешке израчунавања вишедимензионалних и хиперповршинских интеграла апроксимираних формулама које се конструишу узастопном применом Гаусових квадратура.

Немачки математичар Карл Фридрих Гаус је 1814. године увео интерполациону квадратурну формулу, са максимално могућим степеном прецизности, за приближну интеграцију, користећи резултате свог рада из 1812. године о хипергеометријским развојима. Та је квадратурна формула касније по њему добила назив Гаусова квадратурна формула и заузела је централно место у Нумеричкој интеграцији, развијана је у разним правцима и истраживана са разних аспеката Математике (Теорије апроксимација, Теорије мере, Функционалне анализе, итд.) и нумеричке конструкције применом разних софтвера. Проблематика истраживања Гаусових квадратура је веома актуелна и данас. 1969. године је предложен стабилан нумерички метод конструкције Гаусових квадратура од стране математичара Голуба и Велша. Њихов рад је публикован у познатом часопису АМС-а (Америчко Математичко Друштво) *Mathematics of Computation*. С друге стране веома интересантан проблем је оцена остатка у Гаусовим квадратурним формулама. Једну врло занимљиву методу предложио је 1964. године руски математичар и инжењер Кронрод, уводећи, касније назване по њему, Гаус-Кронродове квадратуре. Тако је настала Теорија Гаус-Кронродових квадратура, које су често називане квадратурима 20. века. У последње време се испоставило да Гаус-Кронродове квадратуре, са реалним чворовима и позитивним тежинским коефицијентима, које се могу ефикасно конструисати не постоје у многим случајевима, па су тражене њихове алтернативе. Једна од њих је предложена од проф. Спалевића 2007. године у виду усредњених оптималних гаусовских квадратурних формула. Испоставило се да ове формуле постоје у многим случајевима када не постоје Гаус-Кронродове формуле и да је њихова нумеричка конструкција веома једноставна и ефикасна. Када број чворова расте у овим формулама оне на коначним интервалима попримају особине Гаус-Кронродових квадратурних формула. Предности усредњених оптималних гаусовских квадратура доказиване су последњих година, у сарадњи и истраживању проф. Спалевића са познатим светским нумеричаром из САД Лотаром Рајхелом, као и млађим сарадницима са обе стране.

Циљ истраживања је да се код уопштених усредњених Гаусових квадратура и њихових скраћених варијанти са Бернштајн-Сегеевим тежинским функцијама испита унутрашњост, тј. под којим условима сви чворови ових формула припадају интервалу интеграције. Ово питање је значајно нпр. у ситуацијама када је подинтегрална функција дефинисана само на интервалу интеграције, јер тада квадратурна формула која није унутрашња, тј. која има чворове ван интервала интеграције, није примењива. Услови унутрашњости биће исказани кроз релације које задовољавају коефицијенти Бернштајн-Сегеевих тежинских функција. Такође ће бити испитано у којим случајевима се усредњене Гаусове квадратуре са Бернштајн-Сегеевим тежинским функцијама поклапају са Гаус-Кронродовим квадратурима са Бернштајн-Сегеевим тежинским функцијама (чијим проучавањем су се бавили Гаучи и Нотарис). Циљ истраживања је и да се процене грешке израчунавања вишедимензионалних и хиперповршинских интеграла апроксимираних формулама које се конструишу узастопном применом Гаусових квадратура. Прво ће бити конструисане одговарајуће формуле узастопном применом Гаус-Кронродових и уопштених усредњених Гаусових квадратура, а затим ће се за процену грешке узети апсолутна вредност разлике између формуле конструисане узастопном применом Гаус-Кронродових и/или уопштених усредњених Гаусових квадратура. Биће размотрени случајеви интеграла над n -

димензионалном коцком, симплексом, сфером и лоптом. Ефикасност описане процене грешке биће илустрована разним нумеричким примерима.

У истраживању се полази од хипотезе да уопштене усредњене Гаусове квадратуре и њихове скраћене варијанте са Бернштајн-Семеновим тежинским функцијама могу имати чворове ван интервала интеграције, али да се могу поставити услови изражени преко коефицијената Бернштајн-Семенових тежинских функција под којима су разматране формуле унутрашње. Како се формуле за приближно израчунавање вишедимензионалних и хиперповршинских интеграла могу конструисати узастопном применом Гаусових квадратурних формула, полази се од хипотезе да се на сличан начин могу конструисати формуле у којима уместо Гаусових користимо одговарајуће Гаус-Кронродове или уопштене усредњене Гаусове квадратуре. Како се апсолутна вредност разлике Гаусове и Гаус-Кронродове или уопштене усредњене Гаусове квадратуре може користити за процену грешке Гаусове квадратуре, полази се од хипотезе да се апсолутна вредност разлике формуле конструисане узастопном применом Гаусових квадратура и формуле конструисане узастопном применом одговарајућих Гаус-Кронродових или уопштених усредњених Гаусових квадратура може користити за процену грешке формуле конструисане узастопном применом Гаусових квадратура.

У истраживању ће се првенствено користити методе Нумеричке интеграције, које ће делом бити имплементирани у програмском систему MATLAB. Користиће се Голуб-Велшов метод нумерички стабилне конструкције Гаусових квадратура, Лоријева конструкција Гаус-Кронродових квадратура, Першторферова карактеризација позитивних квадратура и Спалевихева конструкција уопштених усредњених гаусових квадратура, као и трочлана рекурентна релација коју задовољавају ортогонални полиноми. Од значаја ће бити и методе Математичке анализе, као и аналитичке методе интеграције.

3. Образложење теме за израду докторске дисертације које омогућава закључак да је у питању оригинална идеја или оригиналан начин анализирања проблема

Унутрашњост уопштених усредњених гаусових квадратура и њихових скраћених варијанти са Бернштајн-Семеновим тежинским функцијама први пут се испитују у овом истраживању. Усредњене гаусовске квадратуре су нова класа квадратура која се истражује у последњих десетак година, оне су од практичног значаја јер се користе за оцену грешке у Гаусовим квадратурним формулама. Процена грешке израчунавања вишедимензионалних и хиперповршинских интеграла апроксимираних формулама које се конструишу узастопном применом Гаусових квадратура помоћу формула које се конструишу узастопном применом одговарајућих Гаус-Кронродових или уопштених усредњених Гаусових квадратура први пут се проучава у оквиру овог истраживања. Комисија закључује да је предложена тема „Усредњене квадратурне формуле са варијантама и примене“ кандидата Јелене Томановић оригинална.

4. Усклађеност дефиниције предмета истраживања, основних појмова, предложене хипотезе, извора података, метода анализе са критеријумима науке уз поштовање научних принципа у изради коначне верзије докторске дисертације

Кандидат Јелена Томановић ће у изради коначне верзије докторске дисертације обухватити све елементе савременог научно-истраживачког рада поштујући основне критеријуме математичке науке и научних принципа. Усклађеност свих сегмената истраживања, па и овог истраживања, у оквиру Математике као егзактне науке се подразумева, јер само на тај начин истраживање ће водити ка валидним научним резултатима. Добијени резултати ће бити верификовани у познатим светским научним часописима за нумеричку и примењене математике, као и изложени на неколико научних скупова.

5. Предложени ментор израде докторске дисертације

Институт за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу је за ментора ове дисертације предложио проф. др Миодрага Спалевиха, редовног

професора Машинског факултета Универзитета у Београду. Проф. др Миодраг Спалевић се бави истраживањима у научној области Нумеричка анализа, посебно у њеном делу Нумеричка интеграција, има публиковане радове у реномираним научним часописима и већи број саопштења на међународним и националним конференцијама.

6. Научна област дисертације

Предложена докторска дисертација припада научној области Математика, ужој научној области Нумеричка анализа.

7. Научна област чланова комисије

Чланови Комисије се баве истраживањима у области Нумеричке анализе и имају публиковане радове у реномираним научним часописима. Др Миодраг Спалевић је редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду, ужа научна област: Математика и рачунарство. Др Марија Станић је редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Математичка анализа са применама. Др Татјана Томовић је доцент Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Математичка анализа са применама.

8. Кратка биографија кандидата

Јелена Томановић рођена је 22.6.1987. у Београду. Завршила је Земунску гимназију као носилац дипломе „Вук Караџић“ и ученик генерације. Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, завршила је 2011. са просеком 9,08. Мастер академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Примењена математика, завршила је 2012. са просеком 10,00 одбранивши мастер рад „Multigrid метода за нумеричко решавање парцијалних диференцијалних једначина елиптичког типа“ под менторством проф. др Бошка Јовановића. Докторске академске студије на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу уписала је 2012. и положила све испите предвиђене планом и програмом са просечном оценом 10,00. Од 2012. до 2013. радила је као сарадник у настави, а од 2013. до данас ради као асистент на Катедри за математику Машинског факултета Универзитета у Београду.

9. Преглед научно-истраживачког рада кандидата

Кандидат Јелена Томановић је у досадашњем раду показала интересовање, самосталност и способност за научно-истраживачки рад у области Нумеричке анализе, а посебно Нумеричке интеграције. До сада има објављена или прихваћена за штампу 3 рада са SCI листе, један категорије M21 и два категорије M22, два саопштења са међународних скупова штампана у изводу M34 и једно саопштење са скупа националног значаја штампано у изводу M64, што укупно чини 6 библиографских јединица.

Библиографија кандидата:

Научни радови објављени у научним часописима међународног значаја (M20):

[1] D.Lj. Djukić, L. Reichel, M.M. Spalević, **J.D. Tomanović**, Internality of generalized averaged Gauss rules and their truncations for Bernstein-Segö weights, **Electron. Trans. Numer. Anal.** (ETNA) 45 (2016) 405-419. ISSN: 1068-9613; IF(2016)=0.925; M22.

[2] D.Lj. Djukić, L. Reichel, M.M. Spalević, **J.D. Tomanović**, Internality of generalized averaged Gaussian quadrature rules and truncated variants for modified Chebyshev measures of the second kind, **J. Comput. Appl. Math.** 345 (2019) 70-85. ISSN: 0377-0427, IF(2017)=1.632; M21.

[3] D.R. Jandrić, M.M. Spalević, **J.D. Tomanović**, Error Estimates for Certain Cubature Formulae, **FILOMAT**, прихваћено за штампу. ISSN: 2406-0933; IF(2016)=0.695; M22.

Саопштења на међународним скуповима штампана у изводу (M34):

[4] D.R. Jandrić, M.M. Spalević, **J.D. Tomanović**, Error Estimates for Certain Cubature Formulae, Approximation and Computation – Theory and Applications (**ACTA 2017**), Belgrade, Serbia, November 30 – December 2, 2017.

[5] D.R. Jandrić, M.M. Spalević, **J.D. Tomanović**, Error Estimates for Certain Cubature Rules, XIV Serbian Mathematical Congress (**14SMAK 2018**), Kragujevac, Serbia, May 16-19, 2018.

Саопштења са скупова националног значаја штампана у изводу (M64):

[6] D.R. Jandrić, M.M. Spalević, **J.D. Tomanović**, Error Estimates for Certain Cubature Rules, Constructive Theory of Orthogonality and Applications (**СТОА 2017**), Belgrade, Serbia, May 29, 2018.

ЗАКЉУЧАК

Кандидат Јелена Томановић је студент докторских академских студија математике на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу. У досадашњем раду је показала изузетно интересовање за научно-истраживачки рад и изузетно висок степен одговорности и способности решавања постављених јој научних задатака, висок степен самосталности у решавању истих.

Досадашњи резултати научно-истраживачког рада кандидата везани за предложену тему докторске дисертације објављени су у два рада категорије M22 (радови [1], [3] из библиографије кандидата), што Јелену Томановић препоручује као кандидата способног да одговори на њоме планиране задатке.

На основу анализе предложеног плана и програма истраживања, избора методологије и очекиваних резултата истраживања, Комисија сматра да предложена тема за докторску дисертацију Јелене Томановић јесте актуелна и веома важна. Планирано је истраживање интерналности уопштених усредњених Гаусовских квадратурних формула и њихових скраћених варијанти са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама, како би се омогућила њихова примена за класе интеграла који су дефинисани на интервалу интеграције. Планирано је и да се кроз процену грешке илуструје прецизност израчунавања вишедимензионалних и хиперповршинских интеграла апроксимираних формулама које се конструишу узастопном применом Гаусових квадратура помоћу формула које се конструишу узастопном применом одговарајућих Гаус-Кронродових или уопштених усредњених Гаусових квадратура. Сви теоријски резултати биће подржани нумеричким резултатима, добијеним у великом броју експеримената. Добијени резултати ће бити од користи у многим гранама науке и технике где се користе Гаусове квадратуре.

Комисија је мишљења да кандидат Јелена Томановић испуњава све услове који су неопходни за пријаву теме за израду докторске дисертације и да ће успешно реализовати сва планирана истраживања. **За ментора докторске дисертације предлагемо проф. др Миодрага Спалевића.**

Коначно, Комисија са задовољством предлаже Наставно-научном већу Природно-математичког факултета у Крагујевцу и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу да позитивно оцене подобност кандидата Јелене Томановић и научну заснованост теме њене докторске дисертације и одобре јој израду докторске дисертације под називом „**Усредњене квадратурне формуле са варијантама и примене**“.

Комисија:



Др Миодраг Спалевић, редовни професор, **ментор рада**
Машински факултет, Универзитет у Београду
Ужа научна област: Математика и рачунарство



Др Марија Станић, редовни професор, **председник комисије**
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Ужа научна област: Математичка анализа са применама



Др Татјана Томовић, доцент
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Ужа научна област: Математичка анализа са применама