

Извештај је сагласан.  
Слађана Шимић-Ријекић



НАСТАВНО-НАУЧНОМ ВЕЋУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

ВЕЋУ ЗА ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ  
УНИВЕРЗИТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

На седници Наставно-научног већа Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу одржаној 10.10.2018. године (број одлуке: 680/VII-1) предложени смо, а на седници Већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу одржаној 14.11.2018. године (број одлуке: IV-01-895/9) изабрани смо за чланове Комисије за доношење извештаја о оцени научне заснованости теме докторске дисертације под називом „Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског” и испуњености услова кандидата **Милице Грбовић** и предложеног ментора, за израду докторске дисертације под наведеним насловом.

На основу увида у достављени материјал, Комисија подноси следећи

## ИЗВЕШТАЈ

### 1. Научни приступ проблему предложеног нацрта докторске дисертације и процена научног доприноса крајњег исхода рада

Теорија Риманових и семи-Риманових многострукости и њихових подмногострукости је једна од најинтересантнијих области истраживања у диференцијалној геометрији. Подмногострукост  $(M, g, S(TM))$  семи-Риманове многострукости  $(\bar{M}, \bar{g})$  се назива светлосном многострукошћу, ако је светлосна многострукост у односу на дегенеративну меруку  $g$  индуковану метриком  $\bar{g}$  и  $S(TM)$  је недегенеративна скрин дистрибуција комплементарна радикалној дистрибуцији  $Rad(TM)$  у тангентном снопу  $TM$ . Другим речима, важи декомпозиција  $TM = Rad(TM) + S(TM)$ . Технику употребе скрин дистрибуције први су увели K.L. Duggal и A. Bejancu 1991. године у циљу проучавања индуковане геометрије светлосних хиперповрши. Велики допринос светлосној геометрији у својим радовима такође су дали D.H. Jin и B. Sahin у периоду 1996-2010. године. Међутим, постојале су извесне тешкоће у почетним истраживањима светлосних подмногострукости из следећих разлога: (1) индуковани објекти на светлосној подмногострукости  $M$  зависили су од њене скрин дистрибуције која у општем случају није јединствена; (2) индукована конекција  $\nabla$  на  $M$  није била јединствена метричка конекција, већ је зависила од индуковане метрике  $g$  и избора скрин дистрибуције; (3) индуковани Ричијев тензор на  $M$  није био симетричан тензор, па у општем случају није имао исто геометријско значење као Ричијев тензор у Римановој геометрији; (4) с обзиром на дегенеративност метрике  $g$ , скаларну кривину на  $M$  није било могуће добро дефинисати. Један од начина да се ове тешкоће превазиђу, било је увођење канонских једначина за нул криве и канонских скрин дистрибуција светлосних хиперповрши, које су у својом радовима увели K.L. Duggal, A. Bejancu, D.H. Jin и B. Sahin, чиме је створена темељна основа за настанак светлосне геометрије.

Диференцијална геометрија подмногострукости у простору Минковског је област геометрије која је последњих година дала нове, значајне резултате у истраживањима, посебно у геометрији светлосних површи које су модел коначног, Кошијевог и Крускаловог хоризонта у општој теорији релативности. Кључна разлика између дегенеративних и недегенеративних подмногострукости се огледа чињеници да нормални сноп дегенеративних подмногострукости сече њихов тангентни сноп. Најједноставније дегенеративне подмногострукости у простору Минковског су нул криве.



Познато је да су ректификационе, нормалне и оскулаторне криве у еуклидском простору  $E^3$  одређене условом да њихов вектор положаја лежи у ректификационој, нормалној, или оскулаторној равни криве респективно. Ове криве су детаљно проучене у еуклидском простору. Такође, В.У. Chen и F. Dillen су 2005. године открили да постоји веза између ректификационих кривих и Дарбуовог вектора, који има важну улогу у механици, кинематици, као и при дефинисању кривих константне прецесије. Стога је од интереса наставити истраживања таквих кривих у простору Минковског.

Манхајмове криве у еуклидском простору  $E^3$  је увео L. P. Eisenhart 1960. године. Ове криве у просторима Минковског још увек нису у потпуности истражене. Наиме, не постоје карактеризације нул Картанових и псеудо нул Манхајмових кривих у 3-димензионалном простору Минковског. С друге стране, у 4-димензионалном еуклидском простору уопштене Манхајмове криве су увели H. Matsuda и S. Yogozi 2009. године. У простор-времену Минковског, до сада су проучаване само уопштене не-нул Манхајмове криве чији Френеов репер садржи не-нул векторе.

Бишов репер или релативно паралелан адаптирани репер, увео је R.L. Bishop 1975. године као репер који има својство минималне ротације. Такав репер садржи тангентно векторско поље криве и два нормална векторска поља, чији су изводи по природном параметру  $s$  колинеарни са тангентним векторским пољем криве. Бишов репер у еуклидском случају се може добити ротацијом Френеовог репера у нормалној равни криве за одговарајући угао. У 3-димензионалном простору Минковског, Бишов репер за не-нул криве су дефинисали M. Özdemir и A.A. Ergin 2008. године. Међутим, постоји отворено питање да ли такав репер постоји за псеудо нул криве и нул Картанове криве, јер њихов Френеов и Картанов репер респективно садрже по два нул вектора, тако да се не може применити ротација у нормалној равни криве као у еуклидском случају. Стога би било од великог научног значаја за теорију псеудо нул и нул Картанових кривих утврдити да ли такав репер постоји, због његове велике примене у бројним класификацијама кривих.

Баклундова трансформација је позната као пресликавање између две псеудосферне површи које задовољава одређене геометријске услове. Она има важну улогу у теорији солитона и интеграбилних система. Ову трансформацију између две еуклидске криве су увели A. Calini и T. Ivey 1998. године. Баклундове трансформације у простору Минковског  $E_1^3$  су истражили H. Simsek и M. Özdemir 2016. године. Међутим, у случају када покретни репер криве садржи два нул вектора, није једноставно дефинисати одговарајућу Баклундову трансформацију. Стога би било од научног значаја испитати каквог су облика те трансформације у случају псеудо нул и нул Картанових кривих.

У теорији флуида, једначину вртложног филамена увео је R.S. Da Rios 1906. године као модел кретања 1-димензионалног вртложног филамента у некомпресованом 3-димензионалном флуиду. Вектор положаја 1-димензионалног вртложног филамента може се идентификовати са кривом која еволвира у складу са једначином вртложног филамента и која је параметризована параметром дужине лука  $s$  у сваком тренутку  $t$ . Крива која еволвира генерише површ која се назива Хасимото површ, а вектор брзине те криве у еуклидском простору  $E^3$  има правац бинормале криве. У 3-димензионалном простору Минковског  $E_1^3$ , једначину вртложног филамента за не-нул криве су добили G. Muniraja и G. Lakshmanan 2010. године. Једначина вртложног филамента у простору Минковског  $E_1^3$  за псеудо нул и нул Картанове криве још увек није добијена, па би њено добијање допринело развоју теорије флуида у простору Минковског.

Увијене површи у еуклидском простору  $E^3$  увео је A. Gray 1998. године. Оне настају када профилна равна крива ротира око тачке у својој равни, при чему раван криве ротира око праве која лежи у тој равни. Због тога се увијене површи такође називају и двоструко ротационим површима. У 3-димензионалном простору Минковског, увијене површи чија профилна крива лежи у недегенеративној и дегенеративној равни, дефинисали су и класификовали W. Goemans и I. Van de Woestyne 2013. године. Они су доказали да ако профилна крива лежи у светлосној равни, тада су двоструко ротационе површи светлосне равни или светлосни конуси. Међутим, постоји отворени проблем да се дефинишу двоструко ротационе површи у простору Минковског  $E_1^3$  чија профилна крива лежи у светлосној равни, али тако да оне буду просторне или временске површи.

## 2. Образложење предмета, метода и циља који уверљиво упућује да је предложена



## тема од значаја за развој науке

### 2.1. Предмет, циљеви и хипотезе дисертације

Предмет предложене докторске дисертације биће неке специјалне врсте кривих, репера и површи у 3-димензионалном и 4-димензионалном простору Минковског. У дисертацији ће бити испитана веза између ректификационих и нормалних кривих у простору Минковског  $E_1^3$ . Треба истаћи да поменута веза између поменутих кривих још увек није истражена у еуклидском простору, тако да ће добијени резултати у предложеној дисертацији представљати прве резултате у тој области. У специјалне врсте кривих спадају Манхајмове криве. Један од циљева дисертације ће бити добијање карактеризације уопштених нул и парцијално нул Манхајмових кривих у простор-времену Минковског у терминима њихових кривина. Познато је да осим Фрепе-Сереовог репера регуларне криве у Еуклидском простору  $E^3$ , постоји и релативно паралелан адаптирани репер (РПАР), који има својство минималне ротације и који је увео R.L. Bishop 1975. године. У овој дисертацији ће бити доказано да Бишовов репер постоји и у случају псеудо нул кривих и нул Картанових кривих. Штавише, биће доказано да се нормални Бишовови вектори за псеудо нул криву могу добити хиперболичком ротацијом вектора главне нормале око просторне осе и ротацијом вектора бинормале око две светлосне и једне просторне осе. Од посебног је интереса у теорији нул Картанових кривих, нова особина доказана у предложеној дисертацији, која се огледа у томе да једино нул Картанова кубна крива има два Бишопова репера, од којих се један поклапа са њеним Картановим репером. У класичној диференцијалној геометрији, Баклундова трансформација је позната као пресликавање између две псеудосферне површи које задовољава одређене геометријске услове. Један од циљева дисертације биће одређивање потребних и довољних услова да одговарајуће пресликавање две нул Картанове криве или две псеудо нул криве, буде Баклундова трансформација тих кривих. Користећи Da Rios-ову једначину вртложног филамента, која се заснива на локалној индукцијској апроксимацији, у дисертацији ће бити изведена одговарајућа једначина вртложног филамента који ће бити идентификован са псеудо-нул кривом и нул Картановом кривом у 3-димензионалном простору Минковског. Такође ће бити доказано да псеудо нул и нул Картанове криве, које еволвирају у складу са једначином вртложног филамента, генеришу просторне, временске и светлосне Хасимото површи.

Циљ дисертације ће такође бити дефинисање двоструко ротационих површи чија профилна крива лежи у светлосној равни, тако да су те површи просторне, временске, или светлосне. Такве површи ће представљати увијене површи друге врсте. Осим тога, биће класификоване све равне и минималне такве површи, као и површи са константном Гаусовом и средњом кривином у односу на изабрани светлосни трансверзални сноп. На крају докторске дисертације ће бити доказано да су светлосне површи друге врсте светлосни конуси, светлосне бинормалне површи чија је базна крива псеудо нул крива и светлосне преносне површи са нул преносима чија базна крива лежи на нул конусу. Основне хипотезе од којих ће се полазити у дисертацији су следеће:

- особине ректификационих кривих се могу употребити за добијање релација између ректификационих и нормалних кривих;
- особине уопштених нул Манхајмових кривих и уопштених парцијално нул Манхајмових кривих су одређене каузалним карактером равни одређене првом и другом бинормалом криве;
- Бишовов репер псеудо нул и нул Картанове криве се не може добити ротацијом око осе нормалне на раван која садржи нормална векторска поља криве;
- једначина вртложног филамента псеудо нул и нул Картанове криве се заснива на локалној индукцијској апроксимацији;
- псеудо нул и нул Картановој кривој, која задовољава једначину вртложног филамента, може се придружити Хасимото површ;
- увијене површи друге врсте чија базна крива лежи у светлосној равни могу бити недегенеративне.

### 2.2. Методе које ће се у истраживању примењивати

У дисертацији ће се користити методе нормалног пројектовања на просторну и вре-



менску раван, као и метода пројектовања на светлосну раван. Пројектовање на светлосну раван зависи од избора скрин дистрибуције у тој равни. Осим тога, користиће се метода разлагања вектора у односу на ортонормирану и псеудо ортонормирану базу, одређивање трансверзалног снопа у односу на дати радикални сноп, разлагање тангентног снопа на радикални, скрин и трансверзални сноп, одређивање параметарске једначине криве ако је позната њена пројекција на раван која задовољава одговарајуће геометријске услове. Такође ће се у истраживању примењивати одређивање параметарске једначине увијене површи друге врсте у односу на изабрани трансверзални сноп, као и метода ротације за дати хиперболички угао око просторне, временске или светлосне осе. Коначно, у истраживању ће се примењивати локална индукцијска апроксимација, на основу које се могу занемарити чланови вишег реда у Тејлоровом развоју вектора брзине вртложног филамента.

### 2.3. Оквирни садржај докторске дисертације

Предложена докторска дисертација садржаће следећа поглавља:

1. Увод
2. Специјалне врсте кривих у просторима Минковског
3. Специјалне врсте репера у простору Минковског
4. Специјалне врсте површи у простору Минковског
5. Литература

У уводном делу докторске дисертације, биће дефинисани основни појмови у простору Минковског. Затим ће бити наведени сви до сада познати резултати који се односе на нормалне, ректификационе, Манхајмове и уопштене Манхајмове криве у еуклидском простору и простору Минковског. Такође ће бити приказани познати резултати који се односе на Баклундову трансформацију и једначину вртложног филамента, Бишовов репер и увијене површи у еуклидском простору и простору Минковског. У другом поглављу ће бити изложени нови, добијени резултати који се односе на специјалне врсте кривих у простору Минковског, као што су нул и псеудо нул Манхајмове криве, уопштене нул и парцијално нул Манхајмове криве у простор-времену Минковског и Баклундова трансформација псеудо нул и нул Картанове криве. У трећем поглављу ће бити описани нови, добијени резултати који се односе на специјалне врсте репера у простору Минковског. Прецизније, биће описано добијање Бишововог репера за псеудо нул криве и нул Картанове криве. У четвртном поглављу ће бити приказани нови резултати који се односе на увијене површи друге врсте (тј. двоструко ротационе површи) у 3-простору Минковског. Такође ће бити изложена њихова класификација. На крају предложене дисертације биће дат списак коришћене литературе.

### 3. Образложење теме за израду докторске дисертације које омогућава закључак да је у питању оригинална идеја или оригиналан начин анализирања проблема

На основу чињеница изложених у тачкама 1 и 2, Комисија закључује да је предложена тема докторске дисертације под називом „Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског” кандидата Милице Грбовић оригинална идеја.

### 4. Усклађеност дефиниције предмета истраживања, основних појмова, предложене хипотезе, извора података, метода анализе са критеријумима науке уз поштовање научних принципа у изради коначне верзије докторске дисертације

Кандидат Милица Грбовић ће у изради коначне верзије докторске дисертације обухватити све елементе савременог научно-истраживачког рада, поштујући и придржавајући се основних критеријума математике као науке и научних принципа, почев од предмета истраживања, основних појмова, полазних хипотеза, циљева и метода истраживања. Усклађеност свих сегмената научног истраживања са критеријумима математике као егзактне науке се подразумева, јер ће само на тај начин истраживање довести до валидних научних резултата. Добијени резултати ће бити верификовани у познатим међународним часописима из области диференцијалне геометрије и математичке физике и изложени на научним скуповима.



## 5. Предложени ментор израде докторске дисертације

Институт за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу је за ментора ове дисертације предложио проф. др Емилију Нешовић, ванредног професора Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу. Проф. др Емилија Нешовић се активно бави истраживањима у ужој научној области Геометрија, посебно у области Диференцијалне геометрије семи-Риманових многострукости. Има публиковане радове у репомираним научним часописима и већи број саопштења на међународним и националним научним скуповима.

## 6. Научна област дисертације

Предложена докторска дисертација припада научној области Математика, ужој научној области Геометрија, прецизније области Диференцијалне геометрије семи-Риманових многострукости.

## 7. Научна област чланова Комисије

Чланови комисије се активно баве истраживањима у ужој научној области Геометрија, прецизније у области Диференцијалне геометрије Риманових и семи-Риманових многострукости и имају публиковане радове у репомираним међународним и домаћим научним часописима. Проф. др Мирослава Петровић-Торгашев је редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област Геометрија. Проф. др Мирјана Ђорић је редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду, ужа научна област Геометрија. Проф. др Емилија Нешовић је ванредни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област Геометрија.

## 8. Кратка биографија кандидата

Милица Грбовић је рођена 23. фебруара 1984. године у Крагујевцу. Основну школу „Свети Сава” завршила је као ученик генерације и носилац Вукове дипломе. „Прву крагујевачку гимназију” завршила је 2003. године као носилац Вукове дипломе. Током основног и гимназијског школовања учествовала је на разним такмичењима из математике до републичког нивоа и из физике до савезног нивоа. Природно-математички факултет у Крагујевцу, смер математика и информатика, уписала је 2003. године. Дипломирала је на истом факултету 27.03.2009. године са просечном оценом 9,46. Докторске академске студије математике на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу уписала је школске 2016/17 године, где је положила све испите предвиђене планом и програмом са просечном оценом 10,00.

У звање истраживача-приправника за ужу научну област Математика на Природно-математичком факултету у Крагујевцу изабрана је 20.01.2010. године, а у звање истраживача-сарадника за исту ужу научну област изабрана је 01.03.2013. године. У звање асистента за ужу научну област Геометрија изабрана је 27.08.2014. године на истом факултету. Од 2008. године активан је предавач у оквиру „Математичке радионице младих” на Природно-математичком факултету, активан је члан Друштва математичара Србије, а од 2016. године је секретар Подружнице Крагујевац у Друштву математичара Србије. Од 2011. године до данас је стални члан пројекта „Геометрија, образовање и визуелизација са применама” (број пројекта 174012) Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, чији је руководилац проф. др Зоран Ракић.

## 9. Преглед научно-истраживачког рада кандидата

Кандидат Милица Грбовић је у досадашњем раду показала интересовање, самосталност и способност за научно-истраживачки рад у области Диференцијалне геометрије семи-Риманових многострукости. До сада има 8 објављених научних радова, од чега 1 рад у часопису категорије М21, 1 рад у часопису категорије М22, 3 рада у часописима категорије М23 и три рада у часописима категорије М51. Има два саопштења на међународним научним скуповима штампана у изводу (М34), што укупно чини 10 библиографских јединица.



### Научни радови објављени у научним часописима међународног значаја (M20)

1. M. Grbović, E. Nešović, *On the Bishop frames of pseudo null and null Cartan curves in Minkowski 3-space*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 461 (2018), 219-233. (ISSN 0022-247X, IF(2017)=1,138), M21.
2. M. Grbović, E. Nešović, *On Backlund transformation and vortex filament equation for null Cartan curve in Minkowski 3-space*, Math. Phys. Anal. Geom. Vol. 19 No. 4 (2016), 1-15. (ISSN 1385-0172, IF(2015)=0,787), M22.
3. M. Grbović, E. Nešović, *Some relations between rectifying and normal curves in Minkowski 3-space*, Math. Commun. Vol. 17, No. 2, (2012), 655-664. (ISSN 1331-0623, IF(2012)=0,447), M23.
4. M. Grbović, K. Ilarslan, E. Nešović, *On generalized null Mannheim curves in Minkowski space-time*, Publications de l' Institut Mathematique, Nouvelle serie, tome 99(113) (2016), 77-98. (ISSN 0350-1302, IF(2014)=0,270), M23.
5. M. Grbović, E. Nešović, *Backlund transformation and vortex filament equation for pseudo null curves in Minkowski 3-space*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 13, No. 6 (2016), 1650077 (14 pages) (ISSN 0219-8878, IF(2016)=1,068), M23.

### Научни радови објављени у научним часописима националног значаја (M50)

6. M. Grbović, K. Ilarslan, E. Nešović, *On null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space*, J. Geom. Vol. 105, No. 1 (2014), 177-183. (ISSN 0047-2468), M51.
7. M. Grbović, E. Nešović, A. Pantić, *On the second kind twisted surfaces in Minkowski 3-space*, International Electronic Journal of Geometry, Vol. 8, No. 2 (2015), 9-20. (ISSN 1307-5624), M51.
8. M. Grbović, E. Nešović, *On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time*, Novi Sad J. Math., Vol. 46 No. 1 (2016), 159-170. (ISSN 1450-5444), M51.

### Саопштења на међународним научним скуповима штампана у изводу (M34)

9. M. Grbović, *On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time*, XVIII Geometrical Seminar, Vrnjačka Banja, May 25-28, 2014.
10. M. Grbović, E. Nešović, *On generalized Bishop frame of null Cartan curve in Minkowski 3-space*, XIV Serbian Mathematical Congress, Kragujevac, May 16-19, 2018.

## З А К Л Ј У Ч А К

Кандидат Милица Грбовић, дипломирани математичар-информатичар, студент је докторских академских студија математике на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу. У досадашњем раду је показала велико интересовање за научно-истраживачки рад и висок степен одговорности и способности решавања отворених геометријских проблема. Досадашњи резултати научно-истраживачког рада кандидата везани за предложену тему докторске дисертације објављени су у једном часопису категорије M21, у једном часопису категорије M22 и у три часописа категорије M23.

Комисија сматра да кандидат Милица Грбовић испуњава све услове који су неопходни за пријаву теме за израду докторске дисертације и да је предложена тема докторске дисертације „Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског” оригинална и значајна са научне тачке гледишта.

На основу свега изложеног, Комисија предлаже Наставно-научном већу Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу да прихвати предложену тему докторске дисертације под називом „Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског” и кандидату Милице Грбовић одобри рад на њеној изради, као и да се за ментора док-

торске дисертације именује проф. др Емилија Нешовић, ванредни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу.

#### КОМИСИЈА

М. Петровић - Торгашев  
Проф. др Мирослава Петровић-Торгашев,  
редовни професор  
Природно-математички факултет  
Универзитет у Крагујевцу  
**председник Комисије**  
ужа научна област: Геометрија

Мирјана Ђорџић  
Проф. др Мирјана Ђорџић, редовни професор  
Математички факултет  
Универзитет у Београду  
**члан Комисије**  
ужа научна област: Геометрија

Емилија Нешовић  
Проф. др Емилија Нешовић, ванредни професор  
Природно-математички факултет  
Универзитет у Крагујевцу  
**предложени ментор**  
ужа научна област: Геометрија