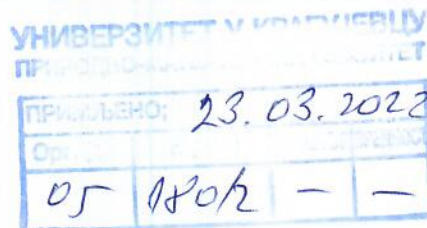




Институт за математику и информатику
23.03.2022.
Крагујевац



Наставно – научном већу
Природно – математичког факултета

Веће катедре Института за математику и информатику је на седници одржаној 23.03.2022. разматрало и **подржало** Извештај Комисије у саставу:

1. др Бојана Боровићанин
ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу
ужа научна област: Дискретна математика
2. др Владимир Филиповић
редовни професор Математичког факултета у Београду
ужа научна област: Рачунарство
3. др Тања Стојадиновић
доцент Математичког факултета у Београду
ужа научна област: Алгебра и математичка логика

који садржи позитивну оцену урађене докторске дисертације под називом **Мешовита метричка димензија графова** кандидата Милице Миливојевић Данас.

Веће катедре је упознато са достављеним мишљењем Руководиоца докторских академских студија Математике којим се прихвата наведени Извештаји и сагласно је да се Извештај проследи у даљу процедуру.

Молимо вас да наставите са даљом процедуром.


Управник Института
др Бојана Боровићанин

Наставно-научном већу
Природно-математичког факултета

Већу за природно-математичке науке
Универзитета у Крагујевцу

ИЗВЕШТАЈ КОМИСИЈЕ О ОЦЕНИ УРАЂЕНЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

На седници Наставно-научног већа, Природно-математичког факултета у Крагујевцу одржаној 10.11.2021. године (бр. 530/XI – 1) и на седници Већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу одржаној 15.12.2021. године (бр. IV – 01 – 974/11) одређени смо за чланове Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације кандидаткиње **Милице Миљивојевић Данас** под насловом

"Мешовита метричка димензија графова".

Кандидаткиња је поднела рукопис своје докторске дисертације Наставно-научном већу Природно-математичког факултета на оцену. Чланови Комисије су детаљно прегледали рукопис, проценили квалитет дисертације и указали кандидаткињи на потребне корекције. Кандидаткиња је усвојила све предлоге Комисије и уградила их је у финалну верзију чиме су се стекли сви услови да Комисија поднесе следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Опис докторске дисертације

Полазне основе докторске дисертације чине резултати досадашњих истраживања из графовских инваријанти као што су метричка димензија и метричка димензија грана графа. Метричку димензију су дефинисали 1975. године *Slater* и 1976. године *Harrary* и *Malter*, независно једни од других, док је метричка димензија грана графа дефинисана од стране Келенца са коауторима 2018. године. Појам мешовите метричке димензије увео је *Kelenc* са коауторима у раду из 2017. године, када су први пут проучавана својства ове графовске инваријанте. Докторска дисертација "**Мешовита метричка димензија графова**" припада области Дискретне математике.

Текст рукописа дисертације написан је на 93 стране и састоји се од Резимеа на српском и енглеском језику, Предговора, текста дисертације који је подељен у шест поглавља, одељка Литература који садржи списак од 68 референци и одељка Радови настали у изради ове дисертације који садржи 4 референце. У рукопису дисертације се налази 13 слика и 16 табела. Саставни део дисертације је и Биографија аутора.

Прво поглавље је прегледног карактера и представља теоријску основу истраживања.

Поглавље 1 - Увод. Конципирано је тако да обухвата основне појмове који се суштински надаље користе у овом раду, који су представљени кроз секције. У првој секцији дате су дефиниције основних појмова из теорије графова, док је у другој секцији уведена дефиниција проблема мешовите метричке димензије графова, као и дефиниције још три графовске инваријанте коришћене у раду. У трећој и четвртој секцији наведене су особине скупа мешовитог разрешења, као и особине неких других графовских инваријанти које су коришћене као мотивација за увођење, али и за доказивање оригиналних резултата ове дисертације. Веза између метричке димензије графа и његовог комплементарног графа је дата у секцији 1.5. Последња секција овог поглавља посвећена је метричким димензијама неких веома интересантних фамилија графова.

У поглављима 2, 3, 4 и 5 изложени су оригинални резултати докторске дисертације.

Поглавље 2 - Опште доње границе мешовите метричке димензије. У другом поглављу су изложени резултати који се односе на израчунавање неких нових, општих доњих граница за мешовиту метричку димензију графова. У првој секцији одређене су нове опште доње границе, док су у другој дати илустративни примери нових и старих доњих граница и тачне вредности мешовите метричке димензије за два скупа графова.

Поглавље 3 - Екстремални проблеми графова који укључују мешовиту метричку димензију. У трећем поглављу су дати резултати који се односе на екстремалне проблеме графова који укључују мешовиту метричку димензију. У првој секцији су наведени неки примери екстремалних проблема, као и нека природна уопштења тврђења из литературе, док су у другој и трећој секцији приказани резултати који обухватају решавање разлика између мешовите и метричке димензије грана, односно јаке и мешовите метричке димензије, редом. У последњој секцији приказана је детаљна анализа добијених резултата.

Поглавље 4 - Веза између неких метричких димензија графа и његовог комплементарног графа. У првој секцији представљене су *Nordhaus – Gaddum* границе мешовите метричке димензије, где су разматране све варијанте ових граница, \min/\max , збир или производ, како за произвољне графове, тако и за обострано повезане. У наредној секцији побољшана је доња граница за метричку димензију обострано повезаних графова, док су у секцији 4.3 дати резултати *Nordhaus – Gaddum* граница за метричку димензију грана графа. У последњој секцији приказана је детаљна анализа добијених резултата из овог поглавља.

Поглавље 5 - Класе графова где је добијена егзактна вредност мешовите метричке димензије. У овом поглављу дате су специјалне класе графова за које је добијена егзактна вредност мешовите метричке димензије. У првој, другој, трећој и четвртој секцији приказане су егзактне вредности за графове облика точка, торусе, комплетно раздвојене графове и графове цветних латица, редом. У последњој секцији приказана је детаљна анализа добијених резултата из овог поглавља.

Поглавље 6 - Закључак. У шестом поглављу приказан је преглед свих нових добијених резултата, а затим су назначени правци даљих научних истраживања, као и научни допринос ове дисертације.

2. Значај и допринос докторске дисертације са становишта актуелног стања у одређеној научној области.

Докторска дисертација "**Мешовита метричка димензија графова**", припада научној области Математика, односно ужој научној области Дискретна математика. Мешовита метричка димензија графова је недавно уведена графовска инваријанта и она се први пут јавља 2017. године у раду [Appl. Math. Comput. 314 (2017), 429-438]. Дати резултати из литературе представљали су добру основу за истраживање и добијање оригиналних научних резултата.

У овој дисертацији кандидаткиња Милица Миливојевић Данас обједињује два правца истраживања. Први правац обухвата истраживања која имају за циљ добијање нових добрих доњих граница датог проблема, применом метода и техника различитих области математике, као што су комбинаторика, оптимизација и екстремална теорија графова. Други правац истраживања се односи на ефективно коришћење приказаних добрих доњих граница у циљу добијања осталих оригиналних резултата дисертације.

У дисертацији су изложени оригинални резултати који се тичу екстремалних разлика између мешовите метричке димензије и метричке димензије грана, као и између јаке и мешовите метричке димензије. Добијене добре доње границе примењиване су за одређивање Nordhaus–Gaddum граница за збир и производ мешовите метричке димензије графа G и његовог комплементарног графа \bar{G} , како за произвољне, тако и за двоструко повезане графове. Поред (нових) резултата за мешовиту метричку димензију, дати су и резултати за метричку димензију грана, као и побољшана доња граница за метричку димензију у односу на ону из литературе.

У дисертацији су одређене егзактне вредности мешовите метричке димензије за 4 специјалне класе графова: графови облика точка, торус, комплетно раздвојени графови и графови цветних латица.

Све хипотезе од којих се полазило у истраживању у дисертацији, постављене су на основу до сада познатих резултата из мешовите метричке димензије. Заправо, основне хипотезе дисертације јесу да ова недавно уведена мешовита метричка димензија графова има неке битно другачије теоријске карактеристике од осталих проблема метричке димензије. Због тога из постојеће литературе није увек било могуће директно, а понекад ни индиректно, користити постојеће теоријске резултате, већ је било неопходно да се пронађу нова својства која карактеришу само ову графовску инваријанту.

У дисертацији су коришћене уобичајене математичке стратегије, тј. доказивање горње границе се састојало у одређивању конкретног допустивог решења чија је вредност функције циља оптимална, док се доказивање доње границе углавном састојало у примени закона контрапозиције. Проширујући ову основну стратегију, коришћене су области комбинаторике и оптимизације за добијање добрих општих и конкретних доњих граница мешовите метричке димензије графова. За одређивање општих Nordhaus – Gaddum граница коришћени су још и неки елементи екстремалне теорије графова.

3. Оцена да је урађена докторска дисертација резултат оригиналног научног рада кандидата у одговарајућој научној области

На основу увида у постојећа истраживања и научне доприносе из области Дискретне математике, Комисија сматра да је докторска дисертација Милице Миливојевић Данас оригинално научно дело чија тема није била предмет досадашњих истраживања. То је потврђено објављеним радовима у истакнутим међународним часописима са SCI листе, на основу резултата до којих је кандидаткиња дошла у дисертацији.

4. Преглед остварених резултата рада кандидата у одређеној научној области

Милица Миливојевић Данас до сада има објављена четири рада у истакнутим међународним часописима са SCI листе (категорије M22), једно саопштење са скупа националног значаја штампано у целини (категорије M63) и два саопштења са скупа националног значаја штампана у изводу (категорије M64). Напоменимо да су два рада, као и два саопштења са скупа националног значаја штампана у изводу, ван уже области докторске дисертације. Кандидаткиња има још један рад настао из ове дисертације који је у поступку рецензије.

Научни радови објављени у научним часописима међународног значаја (M20):

[1] Milivojević Danas, M., Kratica, J., Savić, A., Maksimović, Z. (2021) *Some new general lower bounds for mixed metric dimension of graphs*. FILOMAT, Vol 35, pp. 4275–4285. <https://doi.org/10.2298/FIL2113275M> [ISSN: 0354-5180; M22, IF2020=0.844, 197/330, oblast: Mathematics].

[2] Milivojević Danas, M. (2021) *Mixed metric dimension of flower snarks and wheels*. Open Math., Vol 19, pp. 629–640. <https://doi.org/10.1515/math-2021-0065> [ISSN: 2391-5455; M22, IF2020=0.963, 166/330, oblast: Mathematics].

[3] Milivojević, M., Pavlović, Lj (2017) *The variation of the Randić index with regard to minimum and maximum degree*. Discrete Applied Mathematics, Vol. 217, Part 2, pp. 286-293. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.09.010> [ISSN: 0166-218X; M22, IF2017 = 1.008, 120/252, oblast: Mathematics, Applied].

[4] Divnić, T., Milivojević, M., Pavlović, Lj (2014) *Extremal graphs for the geometric-arithmetic index with given minimum degree*. Discrete Applied Mathematics, Vol. 162, pp. 386-390. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.08.001> [ISSN: 0166-218X; M22, IF2014 = 0.862, 131/257, oblast: Mathematics, Applied].

Саопштења са скупа националног значаја штампана у целини (M63):

[5] Milivojević Danas, M., Maksimović, Z., Kratica, J., Savić, A. *Mixed metric dimension of complete split graphs*, XLVII Simpozijum o operacionim istraživanjima, Kraljevo, 20.-23.09, 2020 Zbornik radova, 101–104.

Саопштења са скупа националног значаја штампана у изводу (M64):

[6] Milivojević, M., Pavlović, Lj (2018) *On the geometric-arithmetic index*, 14th Serbian Mathematical Congress, Kragujevac, Serbia May 16-19, Knjiga apstrakata str. 126; M64.

[7] Milivojević Danas, M., Maksimović, Z., Savić, A., Kratica, J. (2018) *Problem optimalne funkcije $\{k\}$ -pakovanja za grafove cvetnih latica*, IX simpozijum "matematike i primene", Beograd, 30. novembar - 1. decembar, Knjiga apstrakata str. 28; M64.

5. Оцена о испуњености обима и квалитета у односу на пријављену тему

Планирани обим истраживачког рада, циљеви, методолошки приступ у остваривању истраживања, који су прецизирани у оквиру поступка предлагања теме докторске дисертације су реализовани.

6. Научни резултати докторске дисертације

Милица Миливојевић Данас има на основу резултата из докторске дисертације објављена два рада у истакнутим међународним часописима са SCI листе (категорије M22) и једно саопштење са скупа националног значаја штампано у целини (категорије M63). Кандидаткиња има још један рад настао из ове дисертације који је у поступку рецензије.

Научни радови објављени у научним часописима међународног значаја (M20):

[1] Milivojević Danas, M., Kratica, J., Savić, A., Maksimović, Z. (2021) *Some new general lower bounds for mixed metric dimension of graphs*. FILOMAT, Vol 35, pp. 4275–

4285. <https://doi.org/10.2298/FIL2113275M> [ISSN: 0354-5180; M22, IF2020=0.844, 197/330, oblast: Mathematics].

[2] **Milivojević Danas, M.** (2021) *Mixed metric dimension of flower snarks and wheels*. Open Math., Vol 19, pp. 629–640. <https://doi.org/10.1515/math-2021-0065> [ISSN: 2391-5455; M22, IF2020=0.963, 166/330, oblast: Mathematics].

Саопштења са скупа националног значаја штампана у целини (M63):

[3] **Milivojević Danas, M.**, Maksimović, Z., Kratica, J., Savić, A. *Mixed metric dimension of complete split graphs*, XLVII Simpozijum o operacionim istraživanjima, Kraljevo, 20.-23.09, 2020 Zbornik radova, 101–104.

7. Примењивост резултата у теорији и пракси

Најважнији теоријски (научни) резултати који представљају научни допринос ове дисертације су:

1. Две нове опште, теоријске доње границе мешовите метричке димензије које укључују степен чвора, односно дијаметар графа.
2. Нова општа доња граница мешовите метричке димензије која се добија решавањем проблема изборног репрезентативног скупа за крајеве свих грана графа.
3. Две теореме у вези максималне разлике између мешовите метричке димензије и метричке димензије грана, односно између јаке и мешовите метричке димензије графа.
4. Теорема у вези *Nordhaus – Gaddum* горње и доње границе за збир, односно производ мешовите метричке димензије произвољног графа и његовог комплемента, како за произвољне, тако и за обострано повезане графове.
5. Теорема у вези *Nordhaus – Gaddum* горње и доње границе за збир метричке димензије грана произвољног графа и његовог комплемента за произвољне повезане графове.
6. Теорема у вези *Nordhaus – Gaddum* горње и доње границе за збир, односно производ метричке димензије грана произвољног графа и његовог комплемента за обострано повезане графове.
7. *Nordhaus – Gaddum* доња граница метричке димензије произвољног графа и његовог комплемента, за обострано повезане графове дата у литератури, је побољшана, тако да уместо од константне вредности сада зависи од реда графа.
8. По први пут су приказане егзактне вредности мешовите метричке димензије за графове облика точка, торус графове, комплетно раздвојене и графове цветних латица.

Мешовита метричка димензија графа налази примену код проблема навигације робота (уљеза) у мрежама. У научним радовима из области метричких димензија се види могућа примена мешовите метричке димензије графова у хемији, али и примена у препознавању образаца и обради слика.

8. Начин презентовања резултата научној јавности

Научни резултати докторске дисертације презентовани су до сада у оквиру Семинара за рачунарство и примењену математику на Математичком институту САНУ, публиковани су у виду два рада у истакнутим међународним часописима (категорије M22). Део резултата је приказан и у трећем раду који се налази у поступку рецензије.

ЗАКЉУЧАК

Поднети рукопис дисертације кандидаткиње **Милице Миливојевић Данас** под насловом "**Мешовита метричка димензија графова**", представља оригинални рад из области Дискретне математике, под менторством **проф. др Јозефа Кратице**.

Приказани оригинални научни резултати, као што су нове опште доње границе мешовите метричке димензије, екстремални проблеми графова који укључују мешовиту метричку димензију, опште *Nordhaus – Gaddum* границе, као и егзактне вредности за неке класе графова су од велике користи код проблема мешовите метричке димензије и значајно мењају поглед на мешовиту метричку димензију графова, посматрајући у односу на досадашње резултате.

Квалитет научних резултата докторске дисертације верификован је публикавањем два рада у истакнутим међународним часописима (категорије M22) и једног рада који се налази у поступку рецензије. У једном од ових публикованих радова Милица Миливојевић Данас је једини аутор.

Сходно наведеном, мишељења смо да су испуњени сви научни, стручни и административни услови за прихватање наведене докторске дисертације, као оригиналног научног рада. У том смислу са задовољством предлажемо Наставно-научном већу Природно-математичког факултета и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу да Милице Миливојевић Данас одобре јавну одбрану докторске дисертације под наведеним насловом.

У Крагујевцу, 18.03.2022.

Комисија:

Бојана Боровићанин

др Бојана Боровићанин, **председник комисије**
ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу
ужа научна област: Дискретна математика

Владим Филиповић

др Владимир Филиповић
редовни професор Математичког факултета у Београду
ужа научна област: Рачунарство

Тања Стојадиновић

др Тања Стојадиновић
доцент Математичког факултета у Београду
ужа научна облас: Алгебра и математичка логика



Већу катедре Института за математику и информатику

Наставно-научном већу Природно-математичког факултета
Универзитета у Крагујевцу

Предмет: Мишљење руководиоца ДАС Математике о Извештају Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације кандидата **Милице Миљивојевић Данас** под насловом „**Мешовита метричка димензија графова**“ и под менторством проф. др Јозефа Кратице

На основу увида у садржај Извештаја о оцени докторске дисертације под насловом „**Мешовита метричка димензија графова**“ кандидата **Милице Миљивојевић Данас** који је написала Комисија у саставу:

1. др Бојана Боровићанин, ванредни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област Дискретна математика, председник Комисије
2. др Владимир Филиповић, редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду, ужа научна област Рачунарство, члан Комисије
3. др Тања Стојадиновић, доцент Математичког факултета Универзитета у Београду, ужа научна област Алгебра и математичка логика, члан Комисије

дајем **позитивно мишљење** на садржај Извештаја.

У Крагујевцу,

22.03.2022. године

Руководилац ДАС Математике

Емилија Нешовић
проф. др Емилија Нешовић
редовни професор Института за
математику и информатику

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

01.02.2022

05 37/1-2 - -

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
 ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
 ПРОДЕКАНУ ЗА НАСТАВУ

ОЦЕНА МЕНТОРА О ИЗВЕШТАЈУ О ПРОВЕРИ ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ
 ДИСЕРТАЦИЈЕ ОДНОСНО ДОКТОРСКОГ УМЕТНИЧКОГ ПРОЈЕКТА

НАЗИВ ДИСЕРТАЦИЈЕ	Мешовита метричка димензија графова	
Кандидат	Милица Миливојевић Данас	
Ментор	др Јозеф Кратица	
Датум пријема потпуног извештаја о провери оригиналности докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта	27. 01. 2022.	

1. Као ментор предложене дисертације изјављујем да је горе наведена докторска дисертација оригинално дело тј. да представља резултат рада докторанткиње Милице Миливојевић Данас.
2. Као ментор предложене дисертације изјављујем да су у горе наведеној докторској дисертацији поштована сва академска правила цитирања и навођења извора.
3. Софтвером за проверу оригиналности утврђено је да у дисертацији подударање текста износи 3%. Највећи део поклапања се односи на обавезне додатке дисертације као и тзв. општа места и податке (са сајта fedorakg.kg.ac.rs). Остали део поклапања се односи на списак литературе као и рудиментарне делове неких формула и табела. Напомињем да је преклапање у тим формулама и табелама искључиво синтаксног типа и то на фрагментима од неколико симбола. Имајући све то у виду, као ментор предложене дисертације изјављујем да се може констатовати да аутоматском претрагом није утврђено постојање плагијаризма. На основу тога, а у складу са Правилником о поступку провере на плагијаризам на Универзитету у Крагујевцу, изјављујем да извештај указује на оригиналност докторске дисертације, те се прописани поступак припреме за њену одбрану може наставити (позитивна оцена).

Датум

01.02.2022.

ПОТПИС МЕНТОРА

Јозеф Кратица