УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милица Грбовић

НЕКЕ СПЕЦИЈАЛНЕ ВРСТЕ КРИВИХ, РЕПЕРА И ПОВРШИ У ПРОСТОРИМА МИНКОВСКОГ

Докторска дисертација

Ментор: проф. др Емилија Нешовић

Крагујевац, 2020.

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF SCIENCE

Milica Grbović

SOME SPECIAL TYPES OF CURVES, FRAMES AND SURFACES IN MINKOWSKI SPACES

Doctoral dissertation

Advisor: prof. Emilija Nešović, PhD

Kragujevac, 2020.

Идентификациона страница докторске дисертације
I. Аутор
Име и презиме: Милица Грбовић
Датум и место рођења: 23. фебруар 1984. године, Крагујевац
Садашње запослење: асистент на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу
II. Докторска дисертација
Наслов: Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског
Број страница: 122
Број слика: 8
Број библиографских података: 82
Установа и место где је рад израђен: Природно-математички факултет, Крагујевац
Научна област (УДК): Геометрија диференцијабилних многострукости и њихових подмногострукости (514.76)
Ментор: др Емилија Нешовић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
III. Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 27. септембар 2018. године
Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: IV-01-18/15 од 23.01.2019. године
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата: 1. др Емилија Нешовић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу 2. др Мирослава Петровић-Торгашев, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу (председник комисије) 3. др Мирјана Ђорић, редовни професор, Математички факултет, Универзитет у Београду
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: 1. др Мирослава Петровић-Торгашев, редовни професор у пензији, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу (председник комисије) 2. др Мића Станковић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу 3. др Мирјана Ђорић, редовни професор, Математички факултет, Универзитет у Београду
Датум одбране дисертације:

Садржај

Листа слика

Сажетак

Теорија Риманових и семи-Риманових подмногострукости је једна од најинтересантнијих области у класичној и савременој диференцијалној геометрији. Поред тога, диференцијална геометрија подмногострукости у просторима Минковског је област истраживања која је последњем периоду дала многе нове резултате, нарочито у теорији светлосних подмногострукости.

У овој докторској дисертацији представљене су неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског. Добијене су експлицитне параметарске једначине просторних ректификационих кривих у простору Минковског $\mathbb{E}_1^3$ чија је пројекција на просторну, временску или светлосну раван нормална крива. Такође су дате експлицитне параметарске једначине просторних нормалних кривих у истом простору чија је пројекција на светлосну раван у односу на изабрану скрин дистрибуцију ректификациона W-крива.

Доказано је да не постоје нул Манхајмове криве у простору Минковског $\mathbb{R}_1^3$. Такође је доказано да су једине псеудо нул Манхајмове криве псеудо нул кружнице и псеудо нул праве линије. Појам Манхајмових кривих је даље уопштен увођењем уопштених нул Манхајмових кривих у простор-времену Минковског. Дата је карактеризација таквих кривих и њихових уопштених придружених кривих у терминима њихових функција кривине. Посебно, добијене су релације између репера поменутих парова кривих. Такође су дефинисане уопштене псеудо нул Манхајмове криве и уопштене парцијално нул Манхајмове криве у простор-времену Минковског $\mathbb{R}_1^4$. Доказано је да не постоје негеодезијске уопштене парцијално нул Манхајмове криве разматрањем могућности да су њима придружене криве просторне, временске, нул Картанове, парцијално нул, или псеудо нул Френеове криве.

Уведена је Баклундова трансформација псеудо нул и нул Картанове криве у простору Минковског $\mathbb{R}_1^3$ као трансформација која пресликава псеудо нул или нул Картанову хелису у псеудо нул или нул Картанову хелису конгруентну полазној хелиси. Наведени су довољни услови за трансформацију двеју нул Картанових или псеудо нул кривих, при којима те криве имају једнаке и константне торзије. Помоћу Да Риосове једначине вртложног влакна која се заснива на локалној индукцијској апроксимацији, изведена је једначина вртложног влакна нул Картанове криве и одређена еволуциона једначина њене торзије. Такође је добијена једначина вртложног влакна псеудо нул криве и доказано да је еволуциона једначина њене торзије Бургерова једначина.

У дисертацији су дефинисани Бишопови репери псеудо нул криве и доказано је да се нормални Бишопови вектори N_1 и N_2 могу добити применом хиперболичке ротације, односно композиције три ротације око две светлосне и једне просторне осе на Френеове векторе N и B редом. Такође је дефинисан Бишопов репер нул Картанове криве и доказано да од свих нул Картанових кривих, једино нул Картанова кубна крива има два Бишопова репера, од којих се један поклапа са њеним Картановим репером.

На крају дисертације је уведен појам увијених површи друге врсте у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$. Класификоване су све недегенеративне увијене површи друге врсте као равне, минималне, или са константном Гаусовом или средњом кривином у односу на изабрани светлосни трансверзални векторски сноп. Такође је доказано да су светлосне увијене површи друге врсте у односу на изабрани светлосни трансверзални векторски сноп светлосни конуси, светлосне бинормалне површи са псеудо нул директрисом и светлосне преносне површи са нул преносима чија директриса лежи на светлосном конусу.

Кључне речи

Простор Минковског, Манхајмова крива, ректификациона крива, нормална крива, Бишопов репер, Баклундова трансформација криве, вртложно влакно, увијена површ друге врсте

Abstract

The theory of Riemannian and semi-Riemannian submanifolds is one of the most interesting areas in classical and modern differential geometry. Besides, differential geometry of submanifolds in Minkowski spaces is the reasearch area that recently has given many new results in investigations, in particular in the theory of lightlike submanifolds.

In this thesis, we present some special types of curves, frames and surfaces in Minkowski spaces. We obtain explicit parameter equations of the spacelike rectifying curves in Minkowski space $\mathbb{R}^3_1$ whose projection onto spacelike, timelike and lightlike plane is a normal curve. We also obtain explicit parameter equations of the spacelike normal curves in the same space whose projection onto lightlike plane with respect to a chosen screen distribution, is a rectifying W-curve.

In this thesis it is proved that there are no null Mannheim curves in Minkowski space $\mathbb{R}^3_1$. It is also proved that the only pseudo null Mannheim curves in Minkowski space $\mathbb{R}^3_1$ are pseudo null straight lines and pseudo null circles. The notion of Mannheim curves is further generalized by introducing the generalized null Mannheim curves in Minkowski space-time. Such curves and their generalized Mannheim mate curves are characterized in terms of their curvature functions. In particular, the relations between their frames are obtained. In this thesis we also define the generalized partially null Mannheim curves and the generalized pseudo null Mannheim curves in Minkowski space-time $\mathbb{R}^4_1$. We prove that there are no non-geodesic generalized partially null Mannheim curves, by considering the cases when the corresponding mate curve is spacelike, timelike, null Cartan, partially null, or pseudo null Frenet curve.

We introduce Bäcklund transformation of pseudo null and null Cartan curve in Minkowski space $\mathbb{R}^3_1$ as the transformation which maps pseudo null or null Cartan helix to another pseudo null or null Cartan helix, congruent to the given one. We give the sufficient conditions for a transformation between two null Cartan curves, or two pseudo null curves, such that these curves have equal constant torsions. By using the Da Rios vortex filament equation based on localized induction approximation, we derive the vortex filament equation for a null Cartan curve and obtain evolution equation for its torsion. We also obtain the vortex filament equation for a pseudo null curve and prove that the evolution equation for its torsion is the viscous Burger's equation.

In this thesis the Bishop frames of the pseudo null curves are derived and it is shown that the normal Bishop vectors N_1 and N_2 can be obtained by applying the hyperbolic rotation and the composition of three rotations about two lightlike and one spacelike axis to the Frenet vectors N and B respectively. We also derive the Bishop frame of a null Cartan curve and show that among all null Cartan curves in $\mathbb{R}^3_1$, only the null Cartan cubic has two Bishop frames, one of which coincides with its Cartan frame.

Finally, we introduce the notion of the second kind twisted surfaces in Minkowski space $\mathbb{R}^3_1$. We classify all non-degenerate second kind twisted surfaces in terms of flat, minimal, constant Gaussian and constant mean curvature surfaces, with respect to a chosen lightlike transversal vector bundle. We also prove that a lightlike second kind twisted surfaces with respect to a chosen lightlike transversal vector bundle, are the lightcones, the lightlike binormal surfaces over pseudo null base curve and the lightlike ruled surfaces with null rulings whose base curve lies on lightcone.

Key words

Minkowski space, Mannheim curve, rectifying curve, normal curve, Bishop frame, Bäcklund transformation of curve, vortex filament, twisted surface of the second kind

Предговор

Израда ове докторске дисертације реализована је на Природно–математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, под менторством проф. др Емилије Нешовић, ванредног професора Природно–математичког факултета Универзитета у Крагујевцу. Резултати истраживања објављени су у оквиру рада на пројекту „Геометрија, образовање и визуелизација са применама" (#174012), који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Диференцијална геометрија многострукости у простору Минковског је област геометрије која је последњих година дала нове резултате у истраживањима, нарочито у геометрији светлосних (дегенеративних) многострукости. Светлосне многострукости су модели коначног, Кошијевог и Крускаловог хоризонта који се проучавају у теорији релативности. Геометријске особине просторних и временских многострукости у просторима Минковског су аналогне особинама Римановtх многострукости. Међутим, светлосне многострукости имају нове особине које се не могу срести у недегенеративном случају. Најзначајнија разлика између дегенеративних и недегенеративних многострукости огледа се у чињеници да нормални споп дегенеративних многострукости сече њихов тангентни сноп.

Тема докторске дисертације су неке специјалне врсте кривих, репера и површи у 3-димензионалном и 4-димензионалном простору Минковског. Дисертација је подељена на четири главе, а свака глава је подељена на поглавља. Прва глава је уводног карактера и обухвата материју чије је познавање неопходно за представљање оригиналних резултата који су објављени у референцама [37]- [40] и [42]- [45].

У поглављу 1.1 дати су основни појмови у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$. Поглавље 1.2 посвећено је семи-Римановим многострукостима са нагласком на кривама као једнодимензионалним многострукостима. У поглављу 1.3 говоримо о разлагању тангентног снопа светлосних подмногострукости. У поглављима 1.4 и 1.5 дат је преглед одговарајућих Френеових и Картанових репера кривих у просторима Минковског $\mathbb{R}^3_1$ и $\mathbb{R}^4_1$. Елементарна геометрија површи у простору Минковског изложена је у поглављу 1.6, док су неке карактеристичне класе површи разматране у поглављу 1.7. Поглавље 1.8 посвећено је нормалним и ректификационим кривама у еуклидском простору и простору Минковског. О Манхајмовим паровима кривих у еуклидском простору и у простору Минковског, говоримо у поглављу 1.9. Баклундове трансформације кривих и једначина вртложног влакна у еуклидском простору и простору Минковског изложени су у поглављу 1.10.

У поглављу 1.11 дата је дефиниција Бишоповог репера (релативно паралелног адаптираног репера) кривих у еуклидском простору и у простору Минковског. Последње поглавље 1.12 посвећено је увијеним површима и њиховим параметризацијама.

У другој глави изложени су оригинални резултати докторске дисертације који се односе на неке специјалне врсте кривих у просторима Минковског $\mathbb{R}^3_1$ и $\mathbb{R}^4_1$. У поглављу 2.1 дат је приказ резултата из рада [45], где се говори о ректификационим и нормалним кривама у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$. Прецизније, дате су везе између просторне ректификационе криве и њене орогоналне пројекције на неку просторну или временску раван, при чему се захтева да тако пројектована крива буде нормална крива, и обрнуто. Садржај поглавља 2.2 обухвата резултате објављене у раду [38] и односи се на нул и псеудо нул Манхајмове криве у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$. Доказано је да нул Манхајмове криве у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ не постоје, док псеудо нул Манхајмове криве постоје само као специјалан случај. У поглављима 2.3 и 2.4 су приказани оригинални резултати радова [37] и [42]. Дефинисане су уопштене нул, уопштене псеудо нул и уопштене парцијално нул Манхајмове криве и добијене су везе између репера кривих које чине пар уопштених Манхајмових кривих. У поглављима 2.5 и 2.6 изложени су оригинални резултати радова [40] и [39] редом који се односе на Баклундове трансформације псеудо нул и нул Картанових кривих. Применом Да Риосове једначине вртложног влакна, добијен је вектор брзине вртложног влакна псеудо нул криве и нул Картанове криве, као и еволуционе једначине кривине и торзије поменутих кривих.

Трећа глава представља преглед оригиналних резултата докторске дисертације који су публиковани у раду [43]. У овој глави уведен је Бишопов репер $\{T_1, N_1, N_2\}$ псеудо нул и нул Картанове криве у тродимензионалном простору Минковског. За Бишопов репер $\{T_1, N_1, N_2\}$ псеудо нул криве важи да су векторска поља $N_1{}'$ и $N_2{}'$ колинеарна са тангентним векторским пољем T_1 тог репера, док код Бишоповог репера $\{T_1, N_1, N_2\}$ нул Картанове криве имамо колинеарност векторских поља $N_1{}'$ и $N_2{}'$ са векторским пољем N_2 тог репера. Одређене су везе између Бишоповог и Френеовог репера псеудо нул криве, односно између Бишоповог и нул Картановог репера нул Картанове криве и наведене су геометријске интерпретације тих веза.

У четвртој глави дати су оригинални резултати докторске дисертације објављени у раду [44]. У њој се говори о специјалним врстама површи у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$, које представљају уопштење ротационих површи и које се називају двоструко ротационе површи, или увијене површи друге врсте. Дате су параметризације поменутих површи, а затим је извршена класификација светлосних и недегенеративних увијених површи друге врсте.

* * *

Користим прилику да изразим искрену и неизмерну захвалност свом ментору проф. др Емилији Нешовић на указаном ми поверењу и мотивацији да се бавим диференцијалном геометријом многострукости у просторима Минковског, и пријатељској подршци током докторских студија и током израде ове докторске дисертације.

Са задовољством се захваљујем и члановима комисије проф. др Мирослави Петровић-Торгашев, проф. др Мирјани Ђорић и проф. др Мићи Станковић на конструктивним примедбама, предлозима и идејама којима су допринели побољшању радне верзије ове дисертације.

Март 2020. године Аутор

1 Увод

Прва глава је уводног карактера. У њој су дате дефиниције основних појмова из семи-Риманове геометрије који су били неопходни за доказивање оригиналних резултата дисертације, а који су наведени у другој, трећој и четвртој глави. Као што је наговештено у Предговору, у поглављима 1.1-1.12 прве главе дата је дефиниција семи-Риманове многострукости и уведен је појам каузалног карактера те многострукости, као и одговарајућих потпростора. Детаљно су описане Френеове и Картанове формуле просторних, временских и нул кривих у просторима Минковског $\mathbb{R}^3_1$ и $\mathbb{R}^4_1$. Такође су описани репери криве у еуклидском простору и просторима Минковског са својством минималне ротације (Бишопови репери), као и неке специјалне класе кривих и површи у тим просторима. Садржај поглавља 1.1 заснива се на референцама [58], [62], [69].

1.1 Основни појмови у простору Минковског

Дефиниција 1.1. *Симетрична билинеарна форма* на коначно-димензионалном реалном векторском простору V је $\mathbb{R}$-билинеарна функција $B : V \times V \to \mathbb{R}$ таква да је $B(u, v) = B(v, u)$, за $u, v \in V$.

Дефиниција 1.2. Симетрична билинеарна форма $B : V \times V \to \mathbb{R}$ је:

(1) *позитивно (негативно) дефинитна*, ако је $B(v, v) > 0$ ($B(v, v) < 0$) за свако $v \neq 0$;

(2) *позитивно (негативно) семи-дефинитна*, ако је $B(v, v) \geq 0$ ($B(v, v) \leq 0$) за свако $v \in V$;

(3) *недегенеративна*, ако из релације $B(u, v) = 0$ за свако $u \in V$ следи $v = 0$.

Дефиниција 1.3. *Индекс* симетричне билинеарне форме $B : V \times V \to \mathbb{R}$ на реалном векторском простору V означава димензију највећег подпростора $W \subset V$ на коме је $B|_W$ негативно дефинитна.

Дефиниција 1.4. *Скаларни производ* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на коначно-димензионалном реалном векторском простору V је недегенеративна симетрична билинеарна форма. Ако је скаларни производ позитивно и негативно дефинитан, тада је он *индефинитан*.

Дефиниција 1.5. *Простор Минковског* $\mathbb{R}^3_1$ је реалан тродимензионални векторски простор $\mathbb{R}^3$ снабдевен индефинитним скаларним производом индекса 1, таквим да је

$$\langle v, u \rangle = -v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3$$

за свака два вектора $v = (v_1, v_2, v_3)$ и $u = (u_1, u_2, u_3)$ простора $\mathbb{R}^3_1$.

Како вредност скаларног производа $\langle v, v \rangle$ у Дефиницији 1.5 може бити позитивна, негативна, или једнака нули, имамо следећа три *каузална карактера* вектора.

Дефиниција 1.6. Произвољан вектор $v \neq 0$ простора $\mathbb{R}^3_1$ је *просторни*, *временски* или *нул*, ако је редом $\langle v, v \rangle > 0$, $\langle v, v \rangle < 0$ или $\langle v, v \rangle = 0$. Посебно, вектор $v = 0$ је просторни вектор.

Дефиниција 1.7. *Светлосни конус* у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ је квадрика

$$\mathcal{C} = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3_1 | -v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0\} \backslash \{(0, 0, 0)\}.$$

Просторни вектори се налазе изван светлосног конуса, док су временски вектори унутар овог конуса и чине *временски конус*

$$\mathcal{T} = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3_1 | -v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < 0\}.$$

Како скаларни производ $\langle v, v \rangle$ може бити негативан реалан број, *норма* вектора у простору $\mathbb{R}^3_1$ је дата изразом

$$\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}.$$

Норма светлосних вектора једнака је нули, а јединични (нормирани) вектори су вектори за које важи $||v|| = 1$.

Став 1.1. *Ако је $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ортонормирана база простора $\mathbb{R}^3_1$, m број временских вектора у тој бази и V максималан потпростор простора $\mathbb{R}^3_1$ на коме је скаларни производ негативно дефинитан, тада је $m = dim(V)$.*

Постојање каузалног карактера вектора повлачи и постојање каузалног карактера потпростора $U \subset \mathbb{R}^3_1$ који одређујемо на основу особина скаларног производа $\langle \ , \ \rangle|_U$ индукованог на U.

Дефиниција 1.8. Нека је U потпростор простора $\mathbb{R}^3_1$. Тада је U *просторни*, *временски* или *светлосни (нул, дегенеративан) потпростор*, ако је редом метрика $\langle \ , \ \rangle|_U$ позитивно дефинитна, недегенеративна и индекса 1 или дегенеративна.

Просторни и временски потпростори се називају *недегенеративним* потпросторима. Напоменимо да је каузални карактер потпростора $Lin\{v\}$ генерисаног вектором $v \in \mathbb{R}^3_1$, уједно и каузални карактер вектора v.

Дефиниција 1.9. Вектори u и v у простору $\mathbb{R}^3$ су *ортогонални*, ако је $\langle u, v\rangle = 0$.

Интересантна особина светлосних вектора, а притом јој не постоји еквивалент у еуклидском простору, је да је сваки светлосни вектор ортогоналан на исти вектор. Без обзира на поменуту различитост, ортогонални комплемент $U^\perp$ потпростора U у $\mathbb{R}^3_1$ дефинише се на исти начин као у еуклидском случају, тј.

$$U^\perp = \left\{x \in \mathbb{R}^3_1 | \langle x, U\rangle = 0\right\}.$$

Став 1.2. *Ако је $\langle\ ,\ \rangle$ скаларни производ дефинисан на n-димензионалном векторском простору V, а U потпростор тог простора, тада је:*

(1) $dim(U^\perp) = n - dim(U)$.

(2) $(U^\perp)^\perp = U$.

(3) Ако је U недегенеративан потпростор, тада је и ортогонални комплемент $U^\perp$ недегенеративан потпростор.

(4) $V = U \oplus U^\perp$ ако и само ако је скаларни производ $\langle\ ,\ \rangle|_U$ недегенеративан.

Каузални карактер потпростора одређује каузални карактер одговарајућег ортогоналног комплемента на следећи начин.

Став 1.3. *Нека је U потпростор простора $\mathbb{R}^3_1$. Тада је:*

(1) U просторни потпростор ако и само ако је $U^\perp$ временски потпростор;

(2) U временски потпростор ако и само ако је $U^\perp$ просторни потпростор;

(3) U светлосни потпростор ако и само ако је $U^\perp$ светлосни потпростор.

Последица 1.1. *Ако је v просторни (респективно временски, нул) вектор, тада је $v^\perp = Lin\{v\}^\perp$ временски (респективно просторни, нул) потпростор.*

Став 1.4. *У простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ важе следећа тврђења:*

(1) два нул вектора су ортогонална ако и само ако припадају истој правој на светлосном конусу.

(2) ако су u и v временски и нул вектор, тада они нису међусобно ортогонални.

(3) не постоје два међусобно ортогонална временска вектора.

(4) за светлосни потпростор U важи $dim(U \cap U^\perp) = 1$.

Следећа три става описују неке карактеристике временских и светлосних потпростора.

Став 1.5. *Ако је V раван у простору $\mathbb{R}^3_1$, тада су следећи услови еквивалентни:*
(1) V је временска раван;
(2) V садржи два линеарно независна светлосна вектора;
(3) V садржи временски вектор.

Став 1.6. *Ако је V потпростор од $\mathbb{R}^3_1$, тада су следећи услови еквивалентни:*
(1) V је светлосни потпростор;
(2) V не садржи временски вектор, а садржи светлосни вектор;
(3) $V \cap \mathcal{C} = L \backslash \{(0,0,0)\}$ и $dim(L) = 1$, где је $\mathcal{C}$ светлосни конус.

Векторски и мешовити производ вектора у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ имају широку примену. Наводимо дефиниције тих производа, које су аналогне њиховим дефиницијама у еуклидском случају.

Дефиниција 1.10. *Векторски производ* вектора u и v простора $\mathbb{R}^3_1$ је јединствени вектор $u \times v$ такав да за свако $w \in \mathbb{R}^3_1$ важи једнакост

$$\langle u \times v, w \rangle = det(u, v, w).$$

Векторски производ вектора u и v се израчунава по формули

$$u \times v = \begin{vmatrix} -\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

где је $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ и $\{e_1, e_2, e_3\}$ стандардна база простора $\mathbb{R}^3_1$.

Став 1.7. *Ако су u и v вектори простора Минковског $\mathbb{R}^3_1$, тада је:*
(1) $u \times v = -v \times u$;
(2) вектор $u \times v$ је ортогоналан на векторима u и v;
(3) $u \times v = \vec{0}$ ако и само ако су u и v колинеарни;
(4) $\langle u \times v, u \times v \rangle = \langle u, v \rangle^2 - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$.

Дефиниција 1.11. *Мешовити производ* вектора u, w и v у простору $\mathbb{R}^3_1$ гласи

$$[u, v, w] = \langle u \times v, w \rangle = det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Изометрије у семи-Римановој геометрији су врло важне геометријске трансформације. Оне се уводе следећом дефиницијом.

Дефиниција 1.12. Линеарна трансформација $f : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ је *изометрија*, ако чува скаларни производ вектора, тј. ако је

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle,$$

за $u, v \in \mathbb{R}^3_1$.

Изометријска трансформација у простору Минковског се такође назива и *Лоренцовом трансформацијом*, а скуп свих матрица ових трансформација са стандардном операцијом множења матрица чини *Лоренцову групу*.

Ротације у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ су изометрије које сваку тачку на оси ротације пресликавају у исту тачку. С обзиром да оса ротације може бити просторна, временска или нул, имамо различите облике матрица ротације. Нека је $\{e_1, e_2, e_3\}$ стандардна база простора $\mathbb{R}^3_1$.

(1) Ако је оса ротације p *временска права*, тада је $p = Lin\{e_1\}$, па је матрица просторне ротације (ротације у просторној равни нормалној на осу p) за угао φ облика

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

(2) Ако је оса ротације p *просторна права*, тада је $p = Lin\{e_3\}$ или $p = Lin\{e_2\}$, па матрице временских ротација (ротација у временским равнима нормалним на осу p) за угао φ гласе

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \end{bmatrix}.$$

(3) Ако је оса ротације p *светлосна права*, тада је $p = Lin\{e_1 + e_2\}$. Матрица светлосне ротације око светлосне осе p за угао φ гласи

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\varphi^2}{2} & -\frac{\varphi^2}{2} & \varphi \\ \frac{\varphi^2}{2} & 1 - \frac{\varphi^2}{2} & \varphi \\ \varphi & -\varphi & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2 Семи - Риманове многострукости

Дефиниција 1.13. *Метрички тензор* g на глаткој многострукости M је симетрично недегенеративно $(0, 2)$-тензорско поље на M константног индекса.

Дефиниција 1.14. *Семи-Риманова многострукост* је глатка многострукост M снабдевена метричким тензором g.

Дефиниција 1.15. *Индекс* ν семи-Риманове многострукости представља индекс скаларног производа g_p на тангентном простору $T_p(M)$ многострукости M, при чему је $0 \leq \nu \leq dim\, M$.

Семи-Риманове многострукости се често називају и псеудо-Риманове многострукости.

Посебно, ако је $\nu = 0$ многострукост M је *Риманова многострукост*. Ако је $\nu = 1$ и $dim\, M \geq 2$, многострукост M се назива *Лоренцова многострукост*. Многострукост $\mathbb{R}^n$ снабдевена метричким тензором константног индекса ν назива се *семи-еуклидски простор* и означава са $\mathbb{R}^n_\nu$. *Простор Минковског* $\mathbb{R}^n_1$ димензије n је n-димензионални семи-еуклидски простор индекса 1.

Криве у простору Минковског посматрамо као једнодимензионалне многострукости тог простора.

Дефиниција 1.16. *Крива* α на семи-Римановој многострукости M је глатко пресликавање $\alpha : I \to M$, при чему је I отворени интервал реалне праве.

Крива α је *регуларна* ако је $\alpha'(t) \neq 0$ за свако $t \in I$. *Вектор брзине* криве α је вектор $\alpha'(t)$, тангентан на криву у тачки $\alpha(t)$.

Дефиниција 1.17. Крива $\alpha : I \to M$ на семи-Римановој многострукости M је локално *просторна*, *временска* или *нул (светлосна, изотропна)*, ако су сви њени вектори брзине редом просторни, временски или нул.

Крива α не мора имати исти каузални карактер на читавом домену I.

Дефиниција 1.18. Ако је $\alpha : I \to M$ не-нул крива на семи-Римановој многострукости M, тада функцију

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du$$

називамо *функцијом дужине лука* криве α.

Како је код не-нул криве $s'(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0$, криву α можемо параметризовати функцијом дужине лука $s = s(t)$.

Дефиниција 1.19. Не-нул крива α је *природно параметризована*, ако је параметризована дужином лука s. Дужина лука s се назива природним параметром.

Ако је крива α природно параметризована, тада је њен вектор брзине у свакој тачки јединични, тј. $\|\alpha'(s)\| = 1$.

Нул криве се не могу параметризовати функцијом дужине лука као не-нул криве, јер је њихов тангентни вектор нул вектор. За такве криве имамо посебну функцију којом се оне могу параметризовати, а коју је увео W.B. Bonnor ([13]).

Дефиниција 1.20. Ако је $\alpha : I \to M$ нул крива на семи-Римановој многострукости M, тада функцију

$$s = s(t) = \int_0^t \langle \alpha''(u), \alpha''(u) \rangle^{\frac{1}{4}} du$$

називамо *функцијом псеудо дужине лука* криве α.

За нул криву α кажемо да је параметризована параметром *псеудо дужине лука* s, ако је $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 1$. Поменута нул крива се назива *нул Картановом кривом*.

Дефиниција 1.21. Нека је α крива на семи-Римановој многострукости и v диференцијабилно векторско поље дуж те криве. За векторско поље v кажемо да је *паралелно* дуж криве α, ако је $\nabla_{\alpha'} v = 0$.

Дефиниција 1.22. Крива α назива се *геодезијском кривом*, ако је векторско поље α' паралелно дуж α, односно ако је $\nabla_{\alpha'} \alpha' = \lambda \alpha'$ за неку глатку функцију λ дуж α. Специјално, не-нул крива α може се природно параметризовати тако да је $\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$.

Геодезијска крива има исти каузални карактер у свакој својој тачки, јер је $\langle \alpha', \alpha' \rangle = constant$.

1.3 Тангентни сноп светлосних подмногострукости

Тангентни сноп светлосних подмногострукости се битно разликује од тангентног снопа недегенеративних подмногострукости. У овом поглављу наводимо разлике између поменутих снопова.

Нека је (M, g) светлосна хиперповрш $(m+2)$-димензионалне семи-Риманове многострукости $(\bar{M}, \bar{g})$ константног индекса $q \in \{1, \ldots, m+1\}$, где је g дегенеративна метрика на M, а $\bar{g}$ недегенеративна метрика на $\bar{M}$. Како је метрика на M дегенеративна, постоји векторско поље $\xi \neq 0$ на M тако да је

$$g(\xi, X) = 0,$$

за свако $X \in \Gamma(TM)$, где је $\Gamma(TM)$ простор глатких пресека од TM.

Радикални или *нул простор* простора T_xM у тачки $x \in M$ је потпростор дефинисан са

$$Rad\, T_xM = \{\xi \in T_xM \mid g(\xi, X) = 0, \quad \forall X \in T_xM\}.$$

Тада је

$$Rad\, T_xM = T_xM \cap T_xM^{\perp}.$$

Како је код хиперповрши $dim(T_xM^{\perp}) = 1$, на основу претходне релације следи да је $Rad\, T_xM = T_xM^{\perp}$. Радикални простор се такође назива *радикална (нул) дистрибуција* на M. Како простори T_xM и $T_xM^{\perp}$ имају нетривијалан пресек, њихова сума није једнака тангентном снопу $T\bar{M}$, што значи да се произвољан вектор снопа $T\bar{M}$ не може јединствено записати као збир тангентне и нормалне компоненте. Као последица ове чињенице, стандардне формуле за другу фундаменталну форму и Гаус-Вајгартенове формуле које важе у недегенеративном случају, не важе за светлосне хиперповрши. Да би се превазишао овај недостатак, К. Дагл и А. Бежанку су у књизи [8] увели геометријски метод којим се тангентни сноп може разложити на три векторска снопа, од којих су два светлосна и један недегенеративан. Нека је $S(TM)$ векторски сноп комплементаран радикалном простору $Rad\, TM$ на TM, тако да је

$$T\,M = Rad\, TM \oplus S(TM).$$

Векторски сноп $S(TM)$ се назива *скрин (преградна) дистрибуција* на M. Како је дистрибуција $S(TM)$ недегенеративна, њен ортогонални комплемент $S(TM)^{\perp}$ је такође недегенеративна дистрибуција. Према томе, важи следећа декомпозиција

$$T\bar{M}|_M = S(TM) \oplus_{orth} S(TM)^{\perp}.$$

где је $\oplus$ ортогонална сума снопова. Међутим, претходна декомпозиција није јединствена, јер зависи од избора скрин дистрибуције $S(TM)$. На основу следеће теореме, за сваки избор скрин дистрибуције $S(TM)$ постоји јединствени *светлосни трансверзални векторски сноп* $ltr(TM)$ на $T\bar{M}|_M$.

Теорема 1.1. *([26]) Нека је (M, g) светлосна хиперповрш семи-Риманове многострукости $(\bar{M}, \bar{g})$ тако да је $S(TM)^{\perp} = Rad\,TM \oplus ltr(TM)$. Претпоставимо да је $V \in \Gamma^{\infty}(\mathcal{U}, ltr(TM))$ ненула пресек локално дефинисан на отвореном скупу $\mathcal{U} \subset \bar{M}$. Тада за сваки ненула пресек ξ радикалног простора $Rad\,TM$ на координатној околини $\mathcal{U} \subset M$ важи:*

(1) $\bar{g}(\xi, V) \neq 0$;

(2) Ако је $N_V \in \Gamma^{\infty}(\mathcal{U}, S(TM^{\perp})^{\perp})$ облика

$$N_V = \frac{1}{\bar{g}(\xi, V)}\{V - \frac{\bar{g}(V, V)}{2\bar{g}(\xi, V)}\xi\},$$

тада је светлосни трансверзални сноп $ltr(TM)$ јединствени векторски сноп над M ранга 1 тако да на свакој околини $\mathcal{U} \subset M$ постоји јединствено векторско поље $N_V \in \Gamma(ltr(TM)|_{\mathcal{U}})$ које задовољава услове

$$\bar{g}(N_V, N_V) = 0, \quad \bar{g}(\xi, N_V) = 1;$$

(3) Тангентни сноп $T\bar{M}$ се може разложити на следећа три снопа:

$$T\bar{M}|_M = Rad\,TM \oplus S(TM) \oplus ltr(TM) = TM \oplus ltr(TM).$$

Поменута својства тангентног снопа светлосних хиперповрши се могу упоредити са својствима тангентног снопа недегенеративних кривих.

У том циљу, нека је α недегенеративна (просторна или временска) крива на семи-Римановој многострукости M. Ако је TM тангентни сноп многострукости M и $T\alpha \subset TM$ тангентни сноп криве α, нормални сноп криве α је дефинисан са

$$T\alpha^{\perp} = \{U \in TM | \langle U, V \rangle = 0, \forall V \in T\alpha\}.$$

Тада се тангентни сноп многострукости M може разложити на следећи начин

$$TM = T\alpha \oplus_{orth} T\alpha^{\perp}, \quad T\alpha \cap T\alpha^{\perp} = \emptyset,$$

где је $\oplus_{orth}$ ортогонална сума снопова.

Нека је сада β нул крива на семи-Римановој многострукости. Тада је $T\beta^{\perp}$ светлосни потпростор, при чему је

$$T\beta \cap T\beta^{\perp} = T\beta,$$

па је у овом случају

$$TM \neq T\beta \oplus_{orth} T\beta^{\perp}.$$

Другим речима, произвољан вектор $w \in T_pM$, у тачки p нул криве β на семи-Римановој многострукости M, се не може јединствено разложити на тангентну и нормалну компоненту у односу на нул криву β. Међутим, тангентни сноп семи-Риманове многострукости T_pM у односу на нул криву се може разложити на три комплементарна векторска снопа који нису међусобно ортогонални. Наиме, постоји векторски сноп $S(T\beta^{\perp})$ комплементаран $T\beta$ у $T\beta^{\perp}$. Тако добијамо следећу декомпозицију

$$T\beta^{\perp} = T\beta \oplus S(T\beta^{\perp}),$$

где је $\oplus$ сума снопова и $S(T\beta^{\perp})$ *преградни (скрин) векторски сноп* нул криве β на многострукости M. Како је M паракомпактна многострукост, овај векторски сноп увек постоји и он је просторни сноп. Стога дуж нул криве β имамо следећу декомпозицију

$$TM|_{\beta} = S(T\beta^{\perp}) \oplus_{orth} S(T\beta^{\perp})^{\perp},$$

где је $S(T\beta^{\perp})^{\perp}$ ортогонални комплемент векторског снопа $S(T\beta^{\perp})$ у $TM|_{\beta}$. Векторски сноп $S(T\beta^{\perp})^{\perp}$ је ранга 2 и садржи $T\beta$. Напоменимо да последња декомпозиција није јединствена, што је директна последица чињенице да преградни векторски сноп $S(T\beta^{\perp})$ није јединствен. За изабрани векторски сноп $S(T\beta^{\perp})$ нул криве β, постоји јединствени нул векторски сноп који се назива *трансверзални векторски сноп* и означава са $ntr(\beta)$, чије су особине дате у следећој теореми.

Теорема 1.2. *([26]) Нека је β нул крива на семи-Римановој многострукости M, а $S(T\beta^{\perp})$ њен преградни векторски сноп.*

(i) Тада постоји јединствени нул трансверзални векторски сноп $ntr(\beta) = E$ над β, ранга 1, такав да на свакој координатној околини $\mathcal{U} \subset \beta$ постоји јединствени нул трансверзални вектор $N \in \Gamma(E|_{\mathcal{U}})$ такав да важе релације

$$\langle \beta', N\rangle = 1, \quad \langle N, N\rangle = \langle N, u\rangle = 0, \ \ \forall u \in \Gamma(S(T\beta^{\perp})|_{\mathcal{U}}),$$

при чему је $\Gamma(E|_{\mathcal{U}})$ простор глатких пресека од $E|_{\mathcal{U}}$.

(ii) Тангентни сноп $TM|_{\beta}$ се може разложити на три дисјунктна векторска снопа

$$TM\ |_{\beta} = T\beta \oplus tr(\beta) = (T\beta \oplus ntr(\beta)) \oplus_{orth} S(T\beta^{\perp}),$$

где су $tr(\beta) = ntr(\beta) \oplus_{orth} S(T\beta^{\perp})$ и $ntr(\beta)$ редом трансверзални и нул трансверзални векторски сноп дуж криве β у односу на преградни векторски сноп $S(T\beta^{\perp})$.

1.4 Френеов и Картанов репер у простору $\mathbb{R}^3_1$

У еуклидском простору $\mathbb{R}^3$, дуж регуларне природно параметризоване криве $\alpha(s)$ са вектором убрзања $\alpha''(s) \neq 0$, дефинисан је покретни ортонормирани Френеов репер $\{T, N, B\}$. Он садржи јединични тангентни вектор $T(s) = \alpha'(s)$, јединични вектор главне нормале $N(s) = \alpha''(s)/\|\alpha''(s)\|$ и јединични вектор бинормале $B(s) = T(s) \times N(s)$. Одговарајуће *Френе-Сереове формуле* регуларне природно параметризоване криве α гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Функције $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ и $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ се редом називају *прва* и *друга Френеова кривина* криве α, односно *кривина* и *торзија*.

У простору Минковског у зависности од каузалног карактера криве, постоје различити адаптирани репери дуж криве. У наставку наводимо одговарајуће Френеове формуле кривих у 3-димензионалном простору Минковског које су дате у референцама [67], [79].

Случај 1. α је просторна крива.

Претпоставимо да је $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$. У зависности од каузалног карактера вектора $\alpha''(s)$, разликујемо следећа три подслучаја:

Случај 1.1. $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle > 0$.

Тада је $\alpha''(s)$ просторни вектор, па се вектор главне нормале $N(s)$ добија његовим нормирањем, а вектор бинормале $B(s)$ је јединствени јединични временски вектор који је ортогоналан на просторну раван $\{T(s), N(s)\}$ у свакој тачки $\alpha(s)$ криве α, такав да је Френеов репер $\{T, N, B\}$ исте оријентације као простор $\mathbb{R}^3_1$. У овом подслучају, Френеове формуле криве α гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Случај 1.2. $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle < 0$.

Како је $\alpha''(s)$ временски вектор, вектор главне нормале $N(s)$ добија се његовим нормирањем, док је вектор бинормале $B(s)$ јединствени јединични просторни вектор који је ортогоналан на временску раван $\{T(s), N(s)\}$ у свакој тачки $\alpha(s)$ криве α, тако да је Френеов репер $\{T, N, B\}$ исте оријентације као простор $\mathbb{R}_1^3$. Одговарајуће Френеове формуле су облика

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Случај 1.3. $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 0$.

Како бисмо искључили могућност да је крива права линија, или да постоје тачке инфлексије, претпоставимо да је $\alpha''(s) \neq 0$. Тада је вектор главне нормале $N(s) = \alpha''(s)$ нул вектор. У овом подслучају, крива α назива се *псеудо нул крива*. Вектор бинормале $B(s)$ је јединствени нул вектор ортогоналан на $T(s)$ у свакој тачки $\alpha(s)$ криве α, такав да је $\langle N(s), B(s) \rangle = 1$. Према томе, Френеове формуле псеудо нул криве α гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

при чему је прва кривина $\kappa_1(s) = 0$ ако је α права линија, или $\kappa_1(s) = 1$ у осталим случајевима.

Случај 2. α је временска крива.

Претпоставимо да је $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -1$. Тада је $T(s) = \alpha'(s)$ јединични тангентни временски вектор. Вектор $\alpha''(s)$ је ортогоналан на $T(s)$, па вектор главне нормале $N(s)$ добијамо нормирањем просторног вектора $\alpha''(s)$. Вектор бинормале $B(s)$ је јединствени једнинични просторни вектор који је ортогоналан на временску раван $\{T(s), N(s)\}$ у свакој тачки $\alpha(s)$ криве α, такав да су репер $\{T, N, B\}$ и простор $\mathbb{R}_1^3$ исто оријентисани. На тај начин, Френеове формуле временске криве α су облика

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Случај 3. α је нул крива.

Претпоставимо да је $\alpha''(s) \neq 0$ и нека је $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 1$, за свако s. Овако параметризована нул крива се назива *нул Картанова крива*. Тада је $T(s) = \alpha'(s)$. Вектор $N(s)$ се дефинише као јединични вектор који одговара вектору α''. Вектор бинормале $B(s)$ представља јединствени нул вектор који је ортогоналан на $N(s)$ у свакој тачки $\alpha(s)$ криве α, такав да је

$\langle T(s), B(s)\rangle = 1$. Репер који смо уочили назива се *Картанов репер*. Формуле нул Картанове криве α у односу на Картанов репер гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\kappa_1 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

при чему је прва кривина $\kappa_1(s) = 0$ ако је α права линија, или $\kappa_1(s) = 1$ у осталим случајевима. Друга кривина $\kappa_2(s)$ је произвољна функција. Нул Картанова крива чија је друга кривина $\kappa_2(s) = 0$, назива се *нул Картанова кубна крива*. За њу је карактеристично да не лежи у равни.

1.5 Френеов и Картанов репер у простору $\mathbb{R}^4_1$

Природно параметризованој кривој $\alpha(s)$ у еуклидском простору $\mathbb{R}^4$ може се придружити одговарајући Френеов репер, при чему се он састоји од четири ортонормирана векторска поља $\{T, N, B_1, B_2\}$. Прва два векторска поља дефинисана су као у тродимензионалном случају, док су B_1 и B_2 јединична векторска поља прве и друге бинормале. Векторско поље B_1 је нормална компонента векторског поља N'. Векторско поље B_2 је јединствено јединично векторско поље које је ортогонално на тродимензионални потпростор $\{T, N, B_1\}$ и такво да је оријентација репера $\{T, N, B_1, B_2\}$ иста као оријентација простора $\mathbb{R}^4$. Френеове формуле криве α у овом простору гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Функције $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s)$ се редом називају *прва, друга и трећа Френеова кривина* криве α. У зависности од каузалног карактера криве, постоје различити адаптирани репери на тој кривој, који су дати у референцама [26], [67], [79].

Случај 1. α је просторна крива.

Претпоставимо да је крива α јединичне брзине, тј. $\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = 1$. Тада је $T(s) = \alpha'(s)$ јединични тангентни вектор криве α, а вектор главне нормале $N(s)$ је колинеаран са вектором $\alpha''(s)$. Зависно од каузалног карактера овог вектора разликујемо следеће подслучајеве:

1.1. $\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle > 0$.

Тада вектор главне нормале $N(s)$ добијамо нормирањем вектора $\alpha''(s)$. Вектор прве бинормале $B_1(s)$ има правац нормалне компоненте $C^\perp$ вектора $N'(s)$ и он може бити просторни, временски или нул. Према томе, разликујемо три подслучаја:

1.1.1. $\langle C^\perp, C^\perp \rangle > 0$.

Вектор $B_1(s)$ добијамо нормирањем нормалне компоненте $C^\perp$. Како су прва три вектора просторни, вектор B_2 биће јединствени јединични временски вектор ортогоналан на тродимензионални потпростор $\{T, N, B_1\}$ такав да је оријентација репера $\{T, N, B_1, B_2\}$ иста као оријентација простора $\mathbb{R}^4_1$. Тада су одговарајуће Френеове формуле облика

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

1.1.2. $\langle C^\perp, C^\perp \rangle < 0$.

Вектор $B_1(s)$ је јединични временски вектор колинеаран са $C^\perp$, а вектор $B_2(s)$ је јединствени јединични просторни вектор ортогоналан на тродимензионални потпростор $\{T,N,B_1\}$ такав да је оријентација репера $\{T,N,B_1,B_2\}$ иста као оријентација простора $\mathbb{R}^4_1$. Овде су одговарајуће Френеове формуле дате релацијом

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

1.1.3. $\langle C^\perp, C^\perp \rangle = 0$.

Вектор $B_1(s)$ је нул вектор колинеаран са нормалном компонентом $C^\perp$, а вектор $B_2(s)$ је јединствени нул вектор ортогоналан на раван $\{T, N\}$ такав да је $\langle B_1, B_2 \rangle = 1$. Френеове формуле сада су облика

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & -\kappa_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Крива α са нул првом и другом бинормалом се назива *парцијално нул крива* и она лежи у светлосном тродимензионалном потпростору простора $\mathbb{R}^4_1$.

1.2. $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle < 0$.

Вектор главне нормале $N(s)$ је временски вектор који добијамо нормирањем вектора $\alpha''(s)$. Јединични вектор прве бинормале $B_1(s)$ је просторни вектор колинеаран са нормалном компонентом $C^{\perp}$. Вектор друге бинормале $B_2(s)$ је јединствени јединични просторни вектор ортогоналан на потпростор $\{T, N, B_1\}$ и такав да је оријентација Френеовог репера $\{T, N, B_1, B_2\}$ иста као и оријентација простора $\mathbb{R}^4_1$. Френеове формуле гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

1.3. $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 0$.

Крива α са нул главном нормалом се назива *псеудо нул крива*. Ако је $\alpha''(s) \neq 0$, вектор главне нормале $N(s) = \alpha''(s)$. Тада је $B_1(s)$ јединични просторни вектор колинеаран са $N'(s)$, а вектор $B_2(s)$ је јединствени нул вектор ортогоналан на потпростор $\{T, B_1\}$, при чему је $\langle N, B_2 \rangle = 1$. Тада су Френеове формуле у матричном облику ([12])

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_3 & 0 & -\kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где је прва кривина $\kappa_1(s)$ једнака нули ако је α права линија, или јединици у осталим случајевима.

Случај 2. α је временска крива.

Аналогно као у првом случају, $T(s) = \alpha'(s)$ је јединични тангентни временски вектор. Јединични вектор $\alpha''(s)/\|\alpha''(s)\|$ је вектор главне нормале $N(s)$. Вектор прве бинормале $B_1(s)$ је јединични просторни вектор у правцу нормалне компоненте вектора $N'(s)$. Вектор $B_2(s)$ је јединствени јединични просторни вектор ортогоналан на временски потпростор $\{T, N, B_1\}$ и такав да је оријентација репера $\{T, N, B_1, B_2\}$ иста као оријентација простора $\mathbb{R}^4_1$. Одговарајуће Френеове формуле су облика

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Случај 3. α је нул крива.

Нул крива која није нул права линија се може параметризовати параметром псеудо лука s тако да је $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 1$. Тада је α нул Картанова крива са тангентним вектором $T(s) = \alpha'(s)$ и вектором главне нормале $N(s) = \alpha''(s)$. Вектор прве бинормале $B_1(s)$ је нул вектор ортогоналан на $N(s)$ и колинеаран са тангентном компонентом вектора $N'(s)$. Вектор друге бинормале $B_2(s)$ је јединствени просторни јединични вектор ортогоналан на тродимензионални потпростор $\{T, N, B_1\}$ и такав да оријентација репера $\{T, N, B_1, B_2\}$ одговара оријентацији простора $\mathbb{R}^4_1$. Картанове формуле нул Картанове криве α гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ -\kappa_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

при чему је прва кривина $\kappa_1(s) = 0$ ако је α права линија, или $\kappa_1(s) = 1$ у осталим случајевима. Псеудо-ортонормирани репер $\{T, N, B_1, B_2\}$ се назива *Картановим репером* нул Картанове криве α.

1.6 Површи у простору Минковског

У овом поглављу приказана је диференцијална геометрија површи у простору Минковског која је изложена у у референцама [62, 79], а која је коришћена за добијање оригиналних резултата у четвртој глави.

Нека је $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ семи-Риманова површ у n-димензионалном простору Минковског $\mathbb{R}^n_1$ са индефинитном метриком сигнатуре $(-, +, \dots, +)$. Ако је (u, v) координтани систем на M, означимо компоненте метричког тензора са

$$E = g_{11} = \langle \partial_u, \partial_u \rangle, \quad F = g_{12} = g_{21} = \langle \partial_u, \partial_v \rangle,$$
$$G = g_{22} = \langle \partial_v, \partial_v \rangle.$$

Како је индукована метрика на семи-Римановој површи M недегенеративна, важи

$$EG - F^2 \neq 0.$$

Функције g^{ij} се уводе тако да задовољавају релацију

$$\sum_{i=1}^{2} g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{за } i = j, \\ 0, & \text{за } i \neq j. \end{cases}$$

Тада је Лапласијан површи M дефинисан са

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{|g|}\left(g^{11}\frac{\partial}{\partial u}+g^{12}\frac{\partial}{\partial v}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{|g|}\left(g^{21}\frac{\partial}{\partial u}+g^{22}\frac{\partial}{\partial v}\right)\right)\right],$$

где је $|g| = |det(g_{ij})| = |EG - F^2| \neq 0$.

Нека је M глатка повезана површ са рубом $\partial M \neq \emptyset$ и $x : M \to \mathbb{R}^3_1$ имерзија, тј. диференцијабилно пресликавање такво да је диференцијал тог пресликавања $dx_p : T_pM \to \mathbb{R}^3_1$ ињективно пресликавање. Тангентну раван T_pM идентификујемо са скупом $(dx)_p(T_pM)$.

Тада метрика $x^*(\langle\, , \rangle_p)$ задовољава релацију

$$x^*(\langle\, , \rangle_p)(u, v) = \langle dx_p(u), dx_p(v)\rangle, \quad u, v \in T_pM,$$

одакле следи да је $x\colon (M, x^*\langle\, , \rangle) \to (\mathbb{R}^3_1, \langle\, , \rangle)$ *изометрична имерзија*. Метрика $x^*\langle\, , \rangle$ може бити позитивно дефинитна, недегенеративна и индекса 1, или дегенеративна.

Дефиниција 1.23. Нека је M површ у простору $\mathbb{R}^3_1$. Имерзија $x : M \to \mathbb{R}^3_1$ је *просторна* (респективно, *временска*, *светлосна*) ако су све тангентне равни $(T_pM, x^*(\langle\, , \rangle_p))$ просторне (респективно, временске, светлосне). Површ је *недегенеративна* ако је просторна или временска. Светлосна површ се назива *дегенеративна површ*.

Наводимо дефиниције основних површи у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$.

Дефиниција 1.24. *Псеудосфера* са центром у координатном почетку и полупречника $r > 0$ у простору $\mathbb{R}^3_1$ је временска површ

$$\mathbb{S}^2_1 = \{p \in \mathbb{R}^3_1 \,|\, \langle p, p\rangle = r^2\}.$$

Дефиниција 1.25. *Псеудохиперболички простор* са центром у координатном почетку и полупречника $r > 0$ у простору $\mathbb{R}^3_1$ је просторна површ

$$\mathbb{H}^2_0 = \{p \in \mathbb{R}^3_1 \,|\, \langle p, p\rangle = -r^2\}.$$

Дефиниција 1.26. *Светлосни (нул) конус* у простору $\mathbb{R}^3_1$ са теменом у тачки $m \neq 0$ је светлосна површ

$$\mathbb{C}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3_1 \,|\, \langle p - m, p - m\rangle = 0\}.$$

Произвољна површ не мора имати исти каузални карактер у свим тачкама. Ако је имерзија просторна, тада важи следеће тврђење.

Теорема 1.3. *([62]) Претпоставимо да је* $x : M \to \mathbb{R}^3_1$ *просторна имерзија површи* M *и* $\pi : M \to \mathbb{R}^2$ *пројекција дата са* $\pi(x,y,z) = (x,y)$.

(1) Пројекција π *је локално дифеоморфизам;*

(2) Ако је M *компактна површ и* $x|_{\partial M}$ *дифеоморфизам руба* ∂M *у равну затворену криву без тачака самопресека, тада је* $x(M)$ *граф са равним доменом одређеним сликом* $x(\partial M)$.

Нека је $x : M \to \mathbb{R}^3_1$ просторна или временска имерзија површи M. Означимо са ∇^0 Леви-Чивита конексију простора $\mathbb{R}^3_1$ и са $T(M)$ простор тангентних векторских поља на M. Тада за $X, Y \in T(M)$ имамо следећу декомпозицију

$$\nabla^0_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \tag{1.1}$$

где је $\nabla_X Y$ тангентна компонента и $h(X,Y)$ нормална компонента од $\nabla^0_X Y$ у односу на M, ∇ Леви - Чивитина конексија индукована на M и h друга фундаментална форма на M. Уколико уместо тангентног вектора Y уочимо вектор ξ нормалан на M, тада важи следећа декомпозиција

$$\nabla^0_X \xi = -A_\xi(X) + (\nabla^0_X \xi)^\perp, \tag{1.2}$$

при чему су $-A_\xi(X)$ и $(\nabla^0_X \xi)^\perp$ редом тангентна и нормална компонента од $\nabla^0_X \xi$. Оператор A_ξ се назива *Вајнгартеново пресликавање* или *оператор облика* површи M. Једнакост (1.1) се назива *Гаусова формула*, а једнакост (1.2) *Вајнгартенова формула*.

За нормално векторско поље ξ на M се каже да је *паралелно*, ако је $(\nabla^0 \xi)^\perp \equiv 0$.

Уочимо векторе $Y \in T(M)$ и $\xi \in T(M)^\perp$ и њихов скаларни производ $\langle Y, \xi \rangle = 0$. Коваријантним диференцирањем претходног скаларног производа у правцу вектора $X \in T(M)$, добијамо

$$\langle \nabla^0_X Y, \xi \rangle + \langle Y, \nabla^0_X \xi \rangle = 0,$$

одакле, примењујући Гаусову и Вајнгартенову формулу, налазимо да је

$$\langle \nabla_X Y + h(X,Y), \xi \rangle = -\langle Y, -A_\xi(X) + (\nabla^0_X \xi)^\perp \rangle,$$

$$\underbrace{\langle \nabla_X Y, \xi \rangle}_{=0} + \langle h(X,Y), \xi \rangle = \langle Y, A_\xi(X) \rangle - \underbrace{\langle Y, (\nabla^0_X \xi)^\perp \rangle}_{=0}.$$

Отуда је

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle h(X,Y), \xi \rangle. \tag{1.3}$$

Примењујући претходну једнакост, као и симетричност друге фундаменталне форме, добијамо следећи идентитет

$$\langle A_\xi(X), Y\rangle = \langle X, A_\xi(Y)\rangle.$$

Дакле, оператор облика A_ξ је самоадјунгован у односу на метрику површи M.

Може се показати да је M *тотално геодезијска површ* ако и само ако је друга фундаментална форма $h \equiv 0$, односно ако и само ако је за свако нормално векторско поље ξ на M испуњено $A_\xi = 0$.

Нека је N локално јединично нормално векторско поље на M. Тада је

$$\langle N, N\rangle = \epsilon = \begin{cases} -1, & \text{ако је } M \text{ просторна површ;} \\ \ \ 1, & \text{ако је } M \text{ временска површ.} \end{cases}$$

У наставку ћемо користити ознаку $\xi = N$. Како је скаларни производ $\langle N, N\rangle$ константан, имамо да је

$$\langle \nabla^0_X N, N\rangle = 0,$$

одакле следи да је $\nabla^0_X N$ тангентно на M. Помоћу Вајнгартенове формуле (1.2) добијамо да је

$$-\nabla^0_X N = A_N(X). \tag{1.4}$$

Дефиниција 1.27. *Вајнгартенов ендоморфизам* у тачки $p \in M$ је дефинисан са

$$A_p \ : T_pM \to T_pM, \quad A_p = (A_N(X))_p.$$

Користећи релацију (1.4) налазимо да је

$$A_p(v) = -\nabla^0_v N = -(dN)_p(v), \ \ v \in T_pM.$$

Уведимо ознаку $A_N(X) = AX$.

Како су вектори $h(X, Y)$ и N колинеарни, на основу једнакости (1.1) и (1.3) добијамо да је

$$h(X, Y) = \epsilon\langle h(X, Y), N\rangle N = \epsilon\langle AX, Y\rangle N. \tag{1.5}$$

Отуда једнакост (1.1) гласи

$$\nabla^0_X Y = \nabla_X Y + \epsilon\langle AX, Y\rangle N.$$

Пре него што уведемо *средњу* и *Гаусову кривину површи* у простору $\mathbb{R}^3_1$, подсетимо се њихових дефиниција у еуклидском простору. Као што је познато, Вајнгартеново пресликавање површи у $\mathbb{R}^3$ је дијагонализабилно, тако да су главне кривине површи сопствене вредности тог пресликавања. *Гаусова кривина површи* је производ, а *средња кривина* аритметичка средина главних кривина површи.

Међутим, када је метрика индефинитна, Вајнгартеново пресликавање није дијагонализабилно у општем случају. С обзиром на поменуту особину, главне кривине за просторну површ су добро дефинисане, што није случај и за временску површ. Због тога постоји другачији приступ у дефинисању средње кривине, који важи за оба каузална карактера површи. Да бисмо објаснили тај приступ, наводимо најпре дефиницију *векторског поља средње кривине*.

Дефиниција 1.28. Нека је M површ и $x : M \to \mathbb{R}^3_1$ недегенеративна имерзија. Тада је *векторско поље средње кривине* дефинисано са

$$\vec{H} = \frac{1}{2} trag(h).$$

Дефиниција 1.29. *Функција средње кривине* H дефинисана је релацијом $\vec{H} = HN$, односно

$$H = \epsilon \langle \vec{H}, N \rangle.$$

Векторско поље средње кривине је ортогонално на M. Изразимо $\vec{H}$ и H преко вектора локалне тангентне базе. Нека је $\{e_1, e_2\}$ ортонормирана тангентна база на M, при чему је вектор e_1 просторни и $\langle e_2, e_2 \rangle = -\epsilon$. Применом релације (1.5), добијамо

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{1}{2} trag(h) = \frac{1}{2}(h(e_1, e_1) - \epsilon h(e_2, e_2)) \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon \langle Ae_1, e_1 \rangle - \langle Ae_2, e_2 \rangle) N \\
&= \frac{\epsilon}{2}(\langle Ae_1, e_1 \rangle - \epsilon \langle Ae_2, e_2 \rangle) N.
\end{aligned}$$

У односу на базу $\{e_1, e_2\}$, матрица оператора облика гласи

$$A = \begin{bmatrix} \langle Ae_1, e_1 \rangle & \langle Ae_2, e_1 \rangle \\ -\epsilon \langle Ae_1, e_2 \rangle & -\epsilon \langle Ae_2, e_2 \rangle \end{bmatrix},$$

одакле је

$$tragA = \langle Ae_1, e_1 \rangle - \epsilon \langle Ae_2, e_2 \rangle.$$

Према томе,

$$\vec{H} = \left(\frac{\epsilon}{2} trag(A)\right) N.$$

Одавде налазимо да функција средње кривине површи гласи

$$H = \epsilon\langle \vec{H}, N\rangle = \frac{\epsilon}{2}(\langle Ae_1, e_1\rangle - \epsilon\langle Ae_2, e_2\rangle) = \frac{\epsilon}{2} trag(A).$$

Последица 1.2. *Средња кривина недегенеративне површи у простору Минковског* $\mathbb{R}^3_1$ *је дата формулом*

$$H = \frac{\epsilon}{2} trag(A). \tag{1.6}$$

Дефинисаћемо *Гаусову кривину недегенеративне површи* ([69]). У том циљу, користићемо тензор кривине R^0 простора Минковског и тензор кривине R површи M. За $X, Y, Z \in T(M)$, тензор R^0 је дефинисан са

$$R^0(X,Y)Z = \nabla^0_X \nabla^0_Y Z - \nabla^0_Y \nabla^0_X Z - \nabla^0_{[X,Y]} Z.$$

Користећи претходну дефиницију, чињеницу да је $R^0 = 0$, Гаусову једнакост (1.1), Вајнгартенову једнакост (1.2) и једнакост (1.5), налазимо да је

$$\begin{aligned} \nabla^0_X \nabla^0_Y Z &= \nabla^0_X(\nabla_Y Z) + \nabla^0_X h(Y,Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + h(X, \nabla_Y Z) - \epsilon\langle AY, Z\rangle AX + \epsilon\langle AY, Z\rangle N \\ &= \underbrace{\nabla_X \nabla_Y Z - \epsilon\langle AY, Z\rangle AX}_{\in T(M)} + \underbrace{h(X, \nabla_Y Z) + \epsilon\langle AY, Z\rangle N.}_{\in T(M)^\perp} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Аналогно добијамо да је

$$\nabla^0_Y \nabla^0_X Z = \underbrace{\nabla_Y \nabla_X Z - \epsilon\langle AX, Z\rangle AY}_{\in T(M)} + \underbrace{h(Y, \nabla_X Z) + \epsilon\langle AX, Z\rangle N.}_{\in T(M)^\perp} \tag{1.8}$$

Применом једнакости (1.1) и (1.5), следи да је

$$\nabla^0_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \epsilon\langle A[X,Y], Z\rangle N. \tag{1.9}$$

Како је тензор кривине површи M дефинисан релацијом

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

и $R^0 = 0$, користећи тангентан део у релацијама (1.7), (1.8) и (1.9), налазимо да је

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \epsilon\langle AY, Z\rangle AX - \epsilon\langle AX, Z\rangle AY \\ &= \epsilon(\langle AY, Z\rangle AX - \langle AX, Z\rangle AY). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ричијев тензор $Ric(X,Y)$ површи M у простору $\mathbb{R}^3_1$, за $X,Y \in T(M)$ дат је изразом

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{2} \langle e_i, e_i\rangle \langle R(e_i, X)Y, e_i\rangle.$$

Полазећи од ове дефиниције и применом релација (1.10), $\langle e_1, e_1\rangle = 1$ и $\langle e_1, e_1\rangle = -\epsilon$, добијамо

$$\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= \langle R(e_1, X)Y, e_1\rangle - \epsilon\langle R(e_2, X)Y, e_2\rangle \\
&= \epsilon\langle\langle AX, Y\rangle Ae_1 - \langle Ae_1, Y\rangle AX, e_1\rangle \\
&- \langle\langle AX, Y\rangle Ae_2 - \langle Ae_2, Y\rangle AX, e_2\rangle \\
&= \epsilon\langle AX, Y\rangle\langle Ae_1, e_1\rangle - \epsilon\langle Ae_1, Y\rangle\langle AX, e_1\rangle \\
&- \langle AX, Y\rangle\langle Ae_2, e_2\rangle + \langle Ae_2, Y\rangle\langle AX, e_2\rangle \\
&= \epsilon\langle AX, Y\rangle\left(\langle Ae_1, e_1\rangle - \epsilon\langle Ae_2, e_2\rangle\right) \\
&- \epsilon\langle Ae_1, Y\rangle\langle AX, e_1\rangle + \langle Ae_2, Y\rangle\langle AX, e_2\rangle.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

На основу особине самоадјунгованости оператора облика, имамо да је

$$\begin{aligned}
&- \epsilon\langle Ae_1, Y\rangle\langle AX, e_1\rangle + \langle Ae_2, Y\rangle\langle AX, e_2\rangle \\
&= -\epsilon\langle e_1, AY\rangle\langle AX, e_1\rangle + \langle e_2, AY\rangle\langle AX, e_2\rangle \\
&= -\epsilon\langle AX, \langle e_1, AY\rangle e_1 - \epsilon\langle e_2, AY\rangle e_2\rangle \\
&= -\epsilon\langle AX, AY\rangle.
\end{aligned}$$

Заменом последње релације у релацији (1.11) и користећи Последицу 1.2, следи да је Ричијев тензор дат изразом

$$Ric(X,Y) = 2H\langle AX, Y\rangle - \epsilon\langle AX, AY\rangle. \tag{1.12}$$

На тај начин, помоћу релације (1.12) и особине самоадјунгованости оператора облика A, добијамо да је *скаларна кривина* ρ површи M облика

$$\begin{aligned}
\rho &= trag(Ric) = Ric(e_1, e_1) - \epsilon Ric(e_2, e_2) \\
&= 2H\langle Ae_1, e_1\rangle - \epsilon\langle Ae_1, Ae_1\rangle - 2\epsilon H\langle Ae_2, e_2\rangle + \langle Ae_2, Ae_2\rangle \\
&= 2H(\langle Ae_1, e_1\rangle - \epsilon\langle Ae_2, e_2\rangle) - \epsilon(\langle Ae_1, Ae_1\rangle - \epsilon\langle Ae_2, Ae_2\rangle) \\
&= 2H(\langle Ae_1, e_1\rangle - \epsilon\langle Ae_2, e_2\rangle) - \epsilon(\langle A^2e_1, e_1\rangle - \epsilon\langle A^2e_2, e_2\rangle) \\
&= \epsilon((tragA)^2 - trag(A^2)) = 4\epsilon H^2 - \epsilon\, trag(A^2) \\
&= 2\epsilon\, det(A).
\end{aligned}$$

Коначно, како је Гаусова кривина недегенеративне површи једнака половини скаларне кривине те површи, доказана је следећа последица.

Последица 1.3. *Ако је A Вајнгартеново пресликавање на недегенеративној површи у $\mathbb{R}^3_1$, тада је Гаусова кривина те површи дата изразом*

$$K = \epsilon\, det(A). \tag{1.13}$$

Доказаћемо да је у простору $\mathbb{R}^3_1$, Гаусова кривина K недегенеративне површи једнака секционој кривини $K(e_1, e_2)$ тангентне равни $\{e_1, e_2\}$ те површи дефинисане са

$$K(e_1, e_2) = \frac{\langle R(e_1, e_2)e_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle\langle e_2, e_2\rangle - \langle e_1, e_2\rangle^2}.$$

Применом релације (1.10) добијамо да је

$$\begin{aligned} K(e_1, e_2) &= \frac{\epsilon(\langle Ae_1, e_1\rangle\langle Ae_2, e_2\rangle - \langle Ae_1, e_2\rangle\langle Ae_2, e_1\rangle)}{-\epsilon} \\ &= -(\langle Ae_1, e_1\rangle\langle Ae_2, e_2\rangle - \langle Ae_1, e_2\rangle^2) = \epsilon\, det(A). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Према томе, на основу релација (1.13) и (1.14), следи да је Гаусова кривина K површи једнака секционој кривини $K(e_1, e_2)$.

Ако је оператор облика A површи дијагонализабилан, имамо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.30. Нека је $x : M \to \mathbb{R}^3_1$ недегенеративна имерзија и $p \in M$. Ако је Вајнгартеново пресликавање A_p дијагонализабилно, тада сопствене вредности од A_p називамо *главним кривинама* у тачки p и означавамо их са $k_1(p)$ и $k_2(p)$.

Помоћу релација (1.6) и (1.13) добијамо следеће тврђење.

Последица 1.4. *Нека је оператор облика A_p дијагонализабилан на недегенеративној површи у простору $\mathbb{R}^3_1$. Тада су средња и Гаусова кривина површи облика*

$$H(p) = \epsilon\frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}, \quad K(p) = \epsilon\, k_1(p)k_2(p).$$

У референцама [21], [62], [69] описано је израчунавање средње и Гаусове кривине недегенеративних површи помоћу њихове локалне параметризације

$$x : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_1, \ \ x = x(u, v),$$

где је x недегенеративна имерзија. Нека је $B = \{x_u, x_v\}$ локална база тангентне равни у свакој тачки површи $x(U)$. У односу на ову базу, матрица прве фундаменталне форме гласи

$$I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix},$$

где коефицијенте прве фундаменталне форме израчунавамо помоћу формула

$$E = \langle x_u, x_u \rangle, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle, \quad G = \langle x_v, x_v \rangle.$$

Уведимо ознаку $W = EG - F^2$. Ако је $W > 0$ површ је просторна, а ако је $W < 0$ посматрана површ је временска. Јединично нормално векторско поље површи је дато са

$$\vec{N} = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}, \tag{1.15}$$

при чему је $\epsilon = \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle$. Тада је

$$\|x_u \times x_v\| = \sqrt{|\langle x_u \times x_v, x_u \times x_v \rangle|} = \sqrt{-\epsilon(EG - F^2)} = \sqrt{-\epsilon W}.$$

Матрица друге фундаменталне форме h у односу на базу B је облика

$$h = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix},$$

где се коефицијенти L, M и N друге фундаменталне форме израчунавају коришћењем израза

$$\begin{aligned} L &= -\langle Ax_u, x_u \rangle = -\langle \vec{N}_u, x_u \rangle = \langle \vec{N}, x_{uu} \rangle, \\ M &= -\langle Ax_u, x_v \rangle = -\langle \vec{N}_v, x_u \rangle = -\langle x_v, \vec{N}_u \rangle = \langle \vec{N}, x_{uv} \rangle, \\ N &= -\langle Ax_v, x_v \rangle = -\langle \vec{N}_v, x_v \rangle = \langle \vec{N}, x_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Тада је матрица Вајнгартеновог пресликавања облика

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

Стога, средња и Гаусова кривина површи гласе

$$H = \epsilon \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)}, \tag{1.16}$$

$$K = \epsilon \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{1.17}$$

Користећи изразе за израчунавање коефицијената друге фундаменталне форме и релацију (1.15), добијамо

$$\begin{aligned} L &= \langle \vec{N}, x_{uu} \rangle = \frac{[x_u, x_v, x_{uu}]}{\sqrt{-\epsilon W}}, \\ M &= \langle \vec{N}, x_{uv} \rangle = \frac{[x_u, x_v, x_{uv}]}{\sqrt{-\epsilon W}}, \\ N &= \langle \vec{N}, x_{vv} \rangle = \frac{[x_u, x_v, x_{vv}]}{\sqrt{-\epsilon W}}. \end{aligned}$$

Заменом коефицијената L, M, N у релацијама (1.16) и (1.17), добијамо следеће формуле за средњу и Гаусову кривину:

$$H = -\frac{[x_u, x_v, x_{uu}]G - 2[x_u, x_v, x_{uv}]F + [x_u, x_v, x_{vv}]E}{2(-\epsilon W)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K = -\frac{[x_u, x_v, x_{uu}][x_u, x_v, x_{vv}] - [x_u, x_v, x_{uv}]^2}{W^2}.$$

1.7 Карактеристичне класе површи

У овом поглављу наводимо дефиницију транслаторне, преносне и ротационе површи у простору Минковског ([9],[79]). Напоменимо да су преносне површи додатно описане у четвртој глави, где су изложени оригинални резултати дисертације у односу на те врсте површи у простору $\mathbb{R}^3_1$.

Дефиниција 1.31. *Транслаторна површ* M у простору Минковског $\mathbb{R}^n_1$ је површ дата имерзијом

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n_1 : (x, y) \to \alpha(x) + \beta(y),$$

при чему су $\alpha(x) = (x, 0, f_3(x), \dots, f_n(x))$ и $\beta(y) = (0, y, g_3(y), \dots, g_n(y))$ регуларне криве простора $\mathbb{R}^n_1$ које се називају *генератори површи* M и које задовољавају услов $\alpha'(x) \times \beta'(y) \neq 0$.

Дефиниција 1.32. *Преносна површ* M у простору Минковског $\mathbb{R}^n_1$ је површ са параметризацијом

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s),$$

где су α и β произвољне регуларне криве простора $\mathbb{R}^n_1$. Крива α се назива *базна крива* или *генератриса*, а крива β *директриса*. *Преноси* преносне површи су праве линије $x(s_0, t) = \alpha(s_0) + t\beta(s_0)$.

Параметризација *уопштеног конуса* у простору $\mathbb{R}^n_1$ гласи

$$x(s, t) = v + tc(s),$$

где је $v \in \mathbb{R}^n_1$ фиксирани вектор, а $c(s)$ је крива простора $\mathbb{R}^n_1$.

Тангентна развојна површ је преносна површ са преносима у правцу тангентног вектора базне криве. Њена параметризација је облика

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\alpha'(s).$$

Специјалне преносне површи, које нису уопштени конуси, цилиндри, или тангентне развојне површи, називају се *скролови.* Преноси скролова су праве линије које имају правац главне нормале или бинормале његове базне криве.

Дефиниција 1.33. Нека је $\alpha : I \to \pi$, крива у равни π у простору $\mathbb{R}^3_1$ и l права у истој равни која не сече криву α. Недегенеративна површ која настаје ротацијом криве α око праве l назива се *ротациона површ.* Крива α је *профилна крива* површи, а права l је *оса ротације*.

Оса ротације може бити просторна, временска или нул, па зато разликујемо три врсте ротационих површи ([9]):

1.*случај:* Оса ротације је просторна права. Нека оса ротације l има правац z-осе и претпоставимо да крива α лежи у координатној равни yOz или xOz. Тада крива α има параметарску једначину

$$\alpha(s) = (0, f(s), g(s)), \quad \text{или} \quad \alpha(s) = (f(s), 0, g(s)),$$

где су f и g глатке функције, а f је позитивна функција. За овакав избор осе ротације и равни π, параметризација ротационе површи гласи

$$x(s,t) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(s) \\ g(s) \end{bmatrix}.$$

Ако је $\alpha(s) = (f(s), 0, g(s))$, имамо да параметризација ротационе површи гласи

$$x(s,t) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s) \\ 0 \\ g(s) \end{bmatrix},$$

при чему је $0 \leq t \leq 2\pi$.

2.*случај:* Оса ротације је временска права. Нека оса ротације l има правац x-осе и претпоставимо да крива α лежи у координатној равни xOy. Тада криву α можемо параметризовати са

$$\alpha(s) = (f(s), g(s), 0),$$

где су f и g глатке функције, а g позитивна функција. Параметризација ротационе површи у овом случају, у матричном облику, гласи

$$x(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \\ 0 \end{bmatrix},$$

за $0 \leq t \leq 2\pi$.

3.случај: Оса ротације је нул права. Нека оса ротације l има правац нул вектора $(1,1,0)$. Како је површ недегенеративна, можемо за профилну криву узети криву $\alpha(s) = (f(s), g(s), 0)$, $s \in I$, која лежи у координатној равни xOy при чему је је $f(s) \neq g(s), \forall s \in I$. Параметризација ротационе површи је облика

$$x(s,t) = \begin{bmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1-\frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1.8 Нормалне и ректификационе криве у просторима $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^3_1$

У свакој тачки регуларне природно параметризоване криве α са Френеовим репером $\{T, N, B\}$ могу се уочити три међусобно ортогоналне равни $\{T, N\}$, $\{T, B\}$, $\{N, B\}$. Ове равни се редом називају *оскулаторна, ректификациона* и *нормална* раван. Познато је да је крива у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$ равна, ако њен вектор положаја лежи у оскулаторној равни у свакој тачки криве. Такође, крива лежи на сфери ако њен вектор положаја лежи у нормалној равни у свакој тачки криве. B. Y. Chen је у свом раду [18] одговорио на питање коју особину имају криве чији вектор положаја увек лежи у ректификационој равни криве.

На основу B. Y. Chen-ове дефиниције, вектор положаја *ректификационе криве* се може написати у облику

$$\alpha(s) = a(s)T(s) + b(s)B(s),$$

при чему су $a(s)$ и $b(s)$ произвољне диференцијабилне функције. Теореме које следе дају потребан и довољан услов да еуклидска крива, или недегенеративна крива у простору $\mathbb{R}^3_1$, буде ректификациона.

Теорема 1.4. *([18]) Природно параметризована крива $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ са кривином $\kappa(s) > 0$ и торзијом $\tau(s) \neq 0$ конгруентна је ректификационој кривој ако и само ако је*

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_0 s + c_1,$$

при чему $c_0 \in \mathbb{R}_0$ и $c_1 \in \mathbb{R}$.

Аналогно тврђење важи у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$.

Теорема 1.5. *([50]) Нека је $\alpha(s)$ просторна или временска крива јединичне брзине у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$, са просторном или временском ректификационом равни и кривином $\kappa(s) > 0$. Тада је крива α конгруентна ректификационој кривој ако и само ако важи*

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_0 s + c_1,$$

где $c_0 \in \mathbb{R}_0$ и $c_1 \in \mathbb{R}$.

У следећим двема теоремама дата је експлицитна параметарска једначина ректификационе криве у еуклидском простору и простору Минковског.

Теорема 1.6. *([18]) Крива $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ са кривином $\kappa(s) > 0$ је ректификациона ако и само ако је њена параметарска једначина облика*

$$\alpha(s) = \frac{a}{\cos s} x(s),$$

где је a позитивна реална константа и $x(s)$ сферна крива јединичне брзине.

Теорема 1.7. *([50]) Нека је $\alpha(s)$ недегенеративна крива јединичне брзине у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$. Тада важе следећа тврђења:*

(i) α је ректификациона крива са просторном ректификационом равни ако и само ако је параметарска једначина криве α облика

$$\alpha(t) = \frac{a}{\cos t} x(t),$$

где је $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ и $x(t)$ просторна крива јединичне брзине која лежи на псеудосфери $\mathbb{S}^2_1(1)$;

(ii) α је просторна (временска) ректификациона крива са временском ректификационом равни и просторним (временским) вектором положаја ако и само ако параметарска једначина криве α гласи

$$\alpha(t) = \frac{a}{\sinh t} x(t),$$

где је $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ и $x(t)$ временска (просторна) крива јединичне брзине која лежи на псеудосфери $\mathbb{S}^2_1(1)$ (псеудохиперболичком простору $\mathbb{H}^2_0(1)$);

(iii) α је просторна (временска) ректификациона крива са светлосном ректификационом равни и временским (просторним) вектором положаја ако и само ако је параметарска једначина криве α облика

$$\alpha(t) = \frac{a}{\cosh t} x(t),$$

при чему је $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ и $x(t)$ просторна (временска) крива јединичне брзине која лежи на псеудохиперболичком простору $\mathbb{H}^2_0(1)$ (псеудосфери $\mathbb{S}^2_1(1)$).

B. Y. Chen је доказао да постоји релација између геодезијских кривих на конусу и ректификационих кривих.

Теорема 1.8. *([19]) Крива на конусу C са теменом у координатном почетку у простору $\mathbb{R}^3$ је геодезијска линија ако и само ако је ректификациона крива или отворени део преноса.*

Регуларна крива α у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ чији вектор положаја увек лежи у нормалној равни те криве, назива се *нормалном кривом*. Вектор положаја ове криве, параметризовене природним параметром s, се може написати у облику

$$\alpha(s) = a(s)N(s) + b(s)B(s),$$

где су $a(s)$ и $b(s)$ произвољне диференцијабилне функције. Познато је да је регуларна крива α са торзијом $\tau(s) \neq 0$ нормална крива ако и само ако је сферна. Према томе, потребан и довољан услов да крива у еуклидском простору буде нормална може се исказати на следећи начин.

Теорема 1.9. *Регуларна природно параметризована крива α у простору $\mathbb{R}^3$ са кривином $\kappa(s) > 0$ и торзијом $\tau(s) \neq 0$ је нормална ако и само ако је*

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0.$$

За равне криве важи следеће тврђење.

Теорема 1.10. *([80]) Регуларна природно параметризована крива α у простору $\mathbb{R}^3$ са кривином $\kappa(s) > 0$ и торзијом $\tau(s) = 0$ је нормална ако и само ако је $\kappa(s) = constant$.*

Међутим, у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ у зависности од каузалног карактера вектора положаја просторне или временске нормалне криве и њене главне нормале, она ће лежати на псеудосфери или на псеудохиперболичком простору.

Теорема 1.11. *([55]) Нека је $\alpha(s)$ просторна нормална природно параметризована крива у простору $\mathbb{R}^3_1$, са кривинама $\kappa_1(s) > 0$ и $\kappa_2(s) \neq 0$, не-нул вектором главне нормале $N(s)$ и не-нул вектором положаја, тако да је $\epsilon = \langle N, N \rangle$. Тада је:*

(i) Вектор положаја $\alpha(s)$ просторни ако и само ако крива $\alpha(s)$ лежи на псеудосфери $\mathbb{S}^2_1(c, r)$ и важи

$$\frac{1}{\kappa_1(s)} = \pm\sqrt{c_1^2 + \epsilon r^2}\cosh(\int \kappa_2(s)ds) + c_1 \sinh(\int \kappa_2(s)ds), c_1 \in \mathbb{R};$$

(ii) Вектор положаја $\alpha(s)$ временски ако и само ако крива $\alpha(s)$ лежи на псеудохиперболичком простору $\mathbb{H}_0^2(c,r)$ и важи

$$\frac{1}{\kappa_1(s)} = \pm\sqrt{c_1^2 - \epsilon r^2}\cosh(\int \kappa_2(s)ds) + c_1 \sinh(\int \kappa_2(s)ds), c_1 \in \mathbb{R}.$$

Следеће теореме дају карактеризацију псеудо нул нормалних кривих које леже на површима у простору Минковског.

Теорема 1.12. *([55]) Нека је α природно параметризована псеудо нул крива у простору $\mathbb{R}_1^3$. Тада α лежи на псеудосфери $\mathbb{S}_1^2(c,r)$ ако и само ако је α равна нормална крива са једначином*

$$\alpha - c = -\frac{r^2}{2}N - B.$$

Теорема 1.13. *([55]) Нека је α природно параметризована крива псеудо нул крива у простору $\mathbb{R}_1^3$. Тада α лежи на светлосном конусу $\mathcal{C}(c)$ са теменом у тачки c ако и само ако је α конгруентна нормалној кривој са једначином $\alpha(s) = -B(s)$.*

Карактеризације ректификационих и нормалних кривих су изложене у референцама [18], [50], [51], [52], [53], [54] и [80].

1.9 Манхајмове криве у еуклидском простору и простору Минковског

У еуклидском простору и простору Минковског постоје парови кривих које задовољавају одређени геометријски услов. Најпознатији примери таквих кривих су Бертранове криве, Манхајмове криве, крива и њена сферна слика, еволута и инволута, итд. У овом поглављу наводимо дефиницију и особине Манхајмових кривих у еуклидском простору и простору Минковског.

У простору $\mathbb{R}^3$ регуларна глатка крива α назива се *Манхајмовом кривом*, ако постоји регуларна глатка крива α^* и бијекција $\Phi : \alpha \to \alpha^*$ таква да су у одговрајућим тачкама кривих главне нормале криве α паралелне бинормалама криве α^* ([27]). Крива α^* се назива *придружена Манхајмова крива* криве α, док је $\{\alpha, \alpha^*\}$ *Манхајмов пар* кривих.

У простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ Манхајмове криве се дефинишу аналогно. Познато је да је α Манхајмова крива у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$, ако и само ако њена кривина κ и торзија τ задовољавају једнакост

$$\kappa = a(\kappa^2 + \tau^2),$$

при чему је a позитивна константа ([27]). Параметарска једначина Манхајмове криве α у простору $\mathbb{R}^3$ гласи ([27])

$$\alpha(t) = \left(\int h(t)\sin(t)dt, \int h(t)\cos(t)dt, \int h(t)g(t)dt \right),$$

где је $g : I \to \mathbb{R}$ произвољна глатка функција, док је функција $h(t)$ облика

$$h(t) = \frac{(1+g^2+g'^2)^3 + (1+g^2)^3(g+g'')^2}{(1+g^2)^{3/2}(1+g^2+g'^2)^{5/2}}.$$

У следећој теореми је дат услов који испуњавају кривина и торзија придружене Манхајмове криве.

Теорема 1.14. *([61]) Нека је α Манхајмова крива у простору $\mathbb{R}^3$ параметризована природним параметром s. Крива $\alpha_1(s_1)$ параметризована природним параметром s_1 је придружена Манхајмова крива криве α ако и само ако кривина $\kappa_1(s_1)$ и торзија $\tau_1(s_1)$ криве α_1 задовољавају једнакост*

$$\frac{d\tau_1}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{a}(1 + a^2\tau_1^2),$$

где је $a \neq 0$ реална константа.

За Манхајмову просторну или временску криву у тродимензионалном простору Минковског, чији Френеов репер $\{T, N, B\}$ садржи два просторна и један временски вектор, важи тврђење аналогно претходном ([61]).

Теорема 1.15. *([61]) Нека је α просторна или временска Манхајмова крива у тродимензионалном простору Минковског параметризована природним параметром s, са Френеовим репером $\{T, N, B\}$ и $a \in \mathbb{R}_0$ ненула константа. Тада:*

(i) Ако су T и N просторни, а B временски вектор, потребан и довољан услов да постоји придружена Манхајмова крива криве α гласи

$$\frac{d\tau_1}{ds_1} = -\frac{\kappa_1}{a}(1 + a^2\tau_1^2);$$

(ii) Ако су T и B просторни, а N временски вектор, потребан и довољан услов да постоји придружена Манхајмова крива криве α је облика

$$\frac{d\tau_1}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{a}(a^2\tau_1^2 - 1);$$

(iii) Ако је T временски, а N и B просторни вектори, потребан и довољан услов да постоји придружена Манхајмова крива криве α дат је једначином

$$\frac{d\tau_1}{ds_1} = \frac{\kappa_1}{a}(1 - a^2\tau_1^2).$$

1.10 Баклундова трансформација криве и једначина вртложног влакна у просторима $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^3_1$

A.V. Bäcklund је у својим радовима [3], [4] доказао да фокалне површи Σ и Σ' при линијској конгруенцији $f : \Sigma \to \Sigma'$ имају једнаке и константне негативне Гаусове кривине $K = K'$, ако су одсечци на заједничким тангентама тих површи константне дужине и ако је угао између нормала тих површи у одговрајућим тачкама константан. Линијска конгруенција $f : \Sigma \to \Sigma'$ се у овом случају назива *Баклундова трансформација поврси* Σ, а површ Σ *псеудосферна површ*. Баклундова трансформација $f : \Sigma \to \Sigma'$ пресликава асимптотске линије површи Σ на асимптотске линије површи Σ', при чему су торзије тих линија једнаке и константне. Познато је да угао φ између асомптотских праваца псеудосферне површи задовољава синус-Гордонову једначину облика

$$\varphi_{tt} - \varphi_{ss} + \sin\varphi = 0,$$

као и да постоји $1 - 1$ кореспонденција између решења синус-Гордонове једначине и псеудосферних површи са Гаусовом кривином $K = -1$. С обзиром да Баклундова трансформација псеудосферних површи чува торзију асимптотских линија на тим површима, може се дефинисати рестрикција Баклундове трансформације која произвољну регуларну криву α константне торзије $\tau(s) \neq 0$ у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$ пресликава на регуларну криву $\bar{\alpha}$ такву да је $\tau(s) = \bar{\tau}(s) = constant$ ([16]). Наводимо карактеристичне теореме за Баклундову трансформацију кривих у еуклидском простору.

Теорема 1.16. *([16]) Нека је $\alpha(s)$ природно параметризована глатка крива константне торзије $\tau(s) \neq 0$ у простору $\mathbb{R}^3$ са Френеовим репером $\{T, N, B\}$*

и кривином $\kappa(s)$. Ако је за произвољну и реалну константу $c_0 \neq 0$ функција $\phi(s)$ решење диференцијалне једначине

$$\frac{d\phi}{ds} = c_0 \sin\phi - \kappa,$$

тада је

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \frac{2c_0}{c_0^2 + \tau^2}(\cos\phi\, T + \sin\phi\, N)$$

природно параметризована крива константне торзије τ.

Напоменимо да кривине $\bar{\kappa}$ и κ кривих $\bar{\alpha}$ и α редом из претходне теореме нису константне, већ задовољавају релацију ([16])

$$\bar{\kappa} = \kappa - 2c_0 \sin\phi.$$

Према томе, ако је дата крива константне торзије τ, могуће је одредити параметарску једначину криве чија је торзија константна и једнака торзији τ. С друге стране, у следећој теореми су наведени довољни услови да при трансформацији f кривих α и $\bar{\alpha}$ у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ поменуте криве имају једнаке и константне торзије.

Теорема 1.17. *([66]) Нека је f трансформација кривих α и $\bar{\alpha}$ у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ тако да је $\bar{\alpha}(s) = f(\alpha(s))$, где је s параметар дужине лука криве α, при чему у одговарајућим тачкама кривих важе следећи услови:*

(1) Права која садржи одговарајуће тачке је пресек оскулаторних равни кривих, тако да дуж одређена тачкама $\alpha(s)$ и $\bar{\alpha}(s)$ има константну дужину r;

(2) Вектор $\bar{\alpha}(s) - \alpha(s)$ образује подударан угао са тангентним векторима посматраних кривих;

(3) Бинормале кривих заклапају константан угао $\theta \neq 0$.

Тада за торзије кривих α и $\bar{\alpha}$ важи $\tau = \bar{\tau} = \dfrac{\sin\theta}{r} = constant$.

Да Риос је у свом раду [22] из 1906. године открио модел кретања једнодимензионалног вртложног влакна у нестишљивом идеалном тродимензионалном флуиду (флуиду без вискозности, тј. унутрашњег трења). Вртложно влакно је идентификовано са глатком кривом $x(s,t)$ без тачака самопресека, параметризованом параметром s за свако t, где је t параметар времена. Да Риос је одредио брзину вртложног влакна користећи једначину вртложног влакна

$$x_t = x_s \times x_{ss},$$

и локалну индукцијску апроксимацију. Он је доказао да се вртложно влакно креће у правцу бинормале $B(s,t)$ криве $x(s,t)$, односно да је $x_t = \kappa B$.

С друге стране, вртложно влакно се такође може посматрати као динамички систем просторних кривих у тродимензионалном простору Минковског ([28]). Познато је да крива $x(s,t)$ у простору $\mathbb{R}^3$ која еволвира у складу са једначином вртложног влакна, генерише Хашимото површ ([75]). Равне криве у простору $\mathbb{R}^3$, које генеришу Хашимото површ, су круг и еластична крива (крива чија је кривина у свакој тачки пропорционална растојању до фиксиране праве - директрисе). Криве које нису равне, а које генеришу поменуту површ су хелиса и просторна еластична крива ([56]). У простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ просторна крива $x(s,t)$ са ненул главном нормалом која еволвира у складу са једначином вртложног влакна $x_t = x_s \times x_{ss}$, генерише недегенеративну (просторну или временску) Хашимото површ ([28]).

1.11 Бишопов репер у еуклидском простору и простору Минковског

Покретни ортонормирани репер који је добро дефинисан у тачкама криве у којима је њена прва кривина једнака нули, дефинисао је Л.Р. Бишоп 1975. године ([11]). *Бишопов репер* $\{T, N_1, N_2\}$ чини тангентно векторско поље T и два нормална векторска поља N_1 и N_2 која се добијају ротацијом векторских поља N и B око тангентног векторског поља T, за одговарајући угао θ. Угао ротације θ је изабран тако да су изводи векторских поља N_1 и N_2 по природном параметру s у свакој тачки криве колинеарни са T. Због ове особине, нормална векторска поља N_1 и N_2 се називају *релативно паралелним векторским пољима*. С обзиром да векторска поља N_1' и N_2' не ротирају, јер су колинеарна са T, Бишопов репер се назива *репер са својством минималне ротације*.

За разлику од Френеовог репера, Бишопов репер није јединствен. Наиме, важи следећа теорема.

Теорема 1.18. *([11]) Ако је $\{T, N_1, N_2\}$ Бишопов репер регуларне криве у простору $\mathbb{R}^3$, тада је сваки репер облика $\{T, aN_1 + bN_2, cN_1 + dN_2\}$, где је*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ортогонална матрица са константним елементима, такође Бишопов репер те криве.

Једначине Бишоповог репера гласе ([11])

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s) = \kappa(s)\cos\theta(s)$ и $\kappa_2(s) = \kappa(s)\sin\theta(s)$ *прва* и *друга Бишопова кривина* редом и $\theta(s) = \int \tau(s)\,ds$ угао ротације.

Матрица ротације помоћу које се од Френеовог репера добија Бишопов репер је облика ([72])

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta(s) & -\sin\theta(s) \\ 0 & \sin\theta(s) & \cos\theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

У простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ у зависности од каузалног карактера криве, постоје различити Бишопови репери дуж те криве. У наставку наводимо одговарајуће једначине Бишопових репера недегенеративних кривих у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ и матрице ротација којима се Френеов репер пресликава у Бишопов репер посматране криве, а које су дате у референци [72].

Случај 1. α је просторна крива. Разликујемо следећа два подслучаја:

Случај 1.1. $N_1(s)$ је временски, а $N_2(s)$ просторни вектор.

Једначине Бишоповог репера гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s) = \kappa(s)\cosh\theta(s)$ и $\kappa_2(s) = \kappa(s)\sinh\theta(s)$ *прва* и *друга Бишопова кривина* редом, а угао ротације је једнак $\theta(s) = -\int \tau(s)\,ds$.

Матрица ротације којом се Френеов репер пресликава у Бишопов репер гласи

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\theta(s) & -\sinh\theta(s) \\ 0 & -\sinh\theta(s) & \cosh\theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Случај 1.2. $N_1(s)$ је просторни, а $N_2(s)$ временски вектор.

Једначине Бишоповог репера ове криве су облика

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s) = \kappa(s)\cosh\theta(s)$ и $\kappa_2(s) = \kappa(s)\sinh\theta(s)$ *прва* и *друга Бишопова кривина* редом, а угао ротације је једнак $\theta(s) = \int \tau(s)\,ds$. Одговарајућа матрица ротације је облика

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\theta(s) & -\sinh\theta(s) \\ 0 & -\sinh\theta(s) & \cosh\theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Случај 2. α је временска крива.

У овом случају, једначине Бишоповог репера гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

где су $\kappa_1(s) = \kappa(s)\cos\theta(s)$ и $\kappa_2(s) = \kappa(s)\sin\theta(s)$ редом *прва* и *друга Бишопова кривина* и $\theta(s) = \int \tau(s)\,ds$ угао ротације.

Матрица ротације у овом случају гласи

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta(s) & \sin\theta(s) \\ 0 & -\sin\theta(s) & \cos\theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Аналогно, у еуклидском простору $\mathbb{R}^4$ покретни ортонормирани *Бишопов репер* $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ садржи тангентно векторско поље T и три нормална векторска поља N_1, N_2 и N_3 која се добијају ротацијом векторских поља N, B_1 и B_2 Френеовог репера $\{T, N, B_1, B_2\}$. Тако да векторска поља N_1', N_2' и N_3' минимално ротирају. Углови ротација φ, θ и ψ су Ојлерови углови и они су изабрани тако да векторска поља N_1', N_2' и N_3' минимално ротирају у хиперравнима $N_1^\perp$, $N_2^\perp$ и $N_3^\perp$ редом. Прецизније, векторска поља N_1', N_2' и N_3' су у свакој тачки криве колинеарна са T.

Једначине Бишоповог репера у простору $\mathbb{R}^4$ су облика ([29])

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar\kappa_1 & \bar\kappa_2 & \bar\kappa_3 \\ -\bar\kappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar\kappa_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar\kappa_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix},$$

где су

$$\bar\kappa_1(s) = \kappa_1(s)\cos\theta(s)\cos\psi(s),$$

$$\bar\kappa_2(s) = \kappa_1(s)(-\cos\theta(s)\sin\psi(s) + \sin\varphi(s)\sin\theta(s)\cos\psi(s)),$$

$$\bar{\kappa}_3(s) = \kappa_1(s)(\sin\theta(s)\sin\psi(s) + \cos\varphi(s)\sin\theta(s)\cos\psi(s)),$$

прва, *друга* и *трећа Бишопова кривина* редом. Ојлерови углови ротација гласе

$$\theta(s) = \int \frac{\kappa_3(s)}{\sqrt{\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)}} ds,$$

$$\psi(s) = \int \left(-\kappa_2(s) - \kappa_3(s) \frac{\sqrt{\kappa_3^2(s) - \theta'^2(s)}}{\sqrt{\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)}} \right) ds,$$

$$\varphi(s) = -\int \frac{\sqrt{\kappa_3^2(s) - \theta'^2(s)}}{\cos\theta(s)} ds.$$

Релација између Френеовог и Бишоповог репера је дата формулама ([35])

$$\begin{aligned}
T(s) &= T(s)\\
N(s) &= \cos\theta(s)\cos\psi(s)N_1(s) + (\cos\varphi(s)\sin\psi(s) + \sin\varphi(s)\sin\theta(s)\\
&\quad \cos\psi(s))N_2(s) + (\sin\varphi(s)\sin\psi(s) + \cos\varphi(s)\sin\theta(s)\cos\psi(s))N_3(s)\\
B1(s) &= \cos\theta(s)\sin\psi(s)N_1(s) + (\cos\varphi(s)\cos\psi(s) + \sin\varphi(s)\sin\theta(s)\\
&\quad \sin\psi(s))N_2(s) + (\sin\varphi(s)\cos\psi(s) + \cos\varphi(s)\sin\theta(s)\sin\psi(s))N_3(s)\\
B2(s) &= \sin\theta(s)N_1(s) + \sin\varphi(s)\cos\theta(s)N_2(s) + \cos\varphi(s)\cos\theta(s)N_3(s).
\end{aligned}$$

У простору Минковског $\mathbb{R}^4_1$ за просторне и временске криве, зависно од каузалног карактера њихових Френеових вектора, постоје четири Бишопова репера који су дати у референци [29]. Наводимо једначине Бишопових репера у матричном облику и форме Бишопових кривина поменутих репера.

Случај 1. α је просторна крива.

У оквиру првог случаја, постоје следећа три подслучаја:

Случај 1.1. $N(s)$ је временски вектор.

Једначине Бишоповог репера су облика

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\kappa}_1 & \bar{\kappa}_2 & \bar{\kappa}_3 \\ \bar{\kappa}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\kappa}_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\kappa}_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix},$$

при чему су

$$\bar{\kappa}_1(s) = -\kappa_1(s)\cosh\theta(s)\cosh\psi(s),$$

$$\bar{\kappa}_2(s) = \kappa_1(s)(\sinh\psi(s)\cos\varphi(s) - \sinh\theta(s)\cosh\psi(s)\sin\varphi(s)),$$

$$\bar{\kappa}_3(s) = \kappa_1(s)(\sinh\psi(s)\sin\varphi(s) + \sinh\theta(s)\cosh\psi(s)\cos\varphi(s)),$$

прва, *друга* и *трећа Бишопова кривина*. Такође важе следеће релације између кривина и хиперболичких Ојлерових углова

$$\kappa_1(s) = \sqrt{\bar{\kappa}_1^2(s) - \bar{\kappa}_2^2(s) - \bar{\kappa}_3^2(s)},$$

$$\kappa_2(s) = -\psi'(s) - \theta'(s)\tanh\theta(s)\coth\psi(s),$$

$$\kappa_3(s) = -\frac{\theta'(s)}{\sinh\theta(s)}.$$

Случај 1.2. $B_1(s)$ је временски вектор.

Једначине Бишоповог репера сада гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\kappa}_1 & \bar{\kappa}_2 & \bar{\kappa}_3 \\ -\bar{\kappa}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\kappa}_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\kappa}_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}.$$

Бишопове кривине су дате изразима

$$\bar{\kappa}_1(s) = \kappa_1(s)\cos\theta(s)\cosh\psi(s),$$

$$\bar{\kappa}_2(s) = \kappa_1(s)(-\sinh\psi(s)\cosh\varphi(s) - \sin\theta(s)\cosh\psi(s)\sinh\varphi(s)),$$

$$\bar{\kappa}_3(s) = \kappa_1(s)(\sinh\psi(s)\sinh\varphi(s) + \sin\theta(s)\cosh\psi(s)\cosh\varphi(s)).$$

Френеове и Бишопове кривине и хиперболички Ојлерови углови задовољавају једнакости

$$\kappa_1(s) = \sqrt{\bar{\kappa}_1^2(s) - \bar{\kappa}_2^2(s) + \bar{\kappa}_3^2(s)},$$

$$\kappa_2(s) = \psi'(s) - \theta'(s)\tanh\theta(s)\coth\psi(s),$$

$$\kappa_3(s) = \frac{\theta'(s)}{\sinh\psi(s)}.$$

Случај 1.3. $B_2(s)$ је временски вектор.

Одговарајуће једначине Бишоповог репера су облика

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\kappa}_1 & \bar{\kappa}_2 & \bar{\kappa}_3 \\ -\bar{\kappa}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\kappa}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\kappa}_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix},$$

где су

$$\bar{\kappa}_1(s) = \kappa_1(s)\cosh\theta(s)\cos\psi(s),$$

$$\bar{\kappa}_2(s) = \kappa_1(s)(\sinh\psi(s)\cosh\varphi(s) + \sinh\theta(s)\cos\psi(s)\sinh\varphi(s)),$$
$$\bar{\kappa}_3(s) = \kappa_1(s)(-\sin\psi(s)\sinh\varphi(s) - \sinh\theta(s)\cos\psi(s)\cosh\varphi(s)),$$

одговарајуће Бишопове кривине. Углови ротација и кривине криве задовољавају једнакости

$$\kappa_1(s) = \sqrt{\bar{\kappa}_1^2(s) + \bar{\kappa}_2^2(s) - \bar{\kappa}_3^2(s)},$$
$$\kappa_2(s) = -\psi'(s) - \theta'(s)\tanh\theta(s)\cot\psi(s),$$
$$\kappa_3(s) = -\frac{\theta'(s)}{\sin\psi(s)}.$$

Случај 2. α је временска крива.

Бишопов репер задовољава једнакости

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\kappa}_1 & \bar{\kappa}_2 & \bar{\kappa}_3 \\ \bar{\kappa}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\kappa}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\kappa}_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix},$$

при чему су

$$\bar{\kappa}_1(s) = \kappa_1(s)\cos\theta(s)\cos\psi(s),$$
$$\bar{\kappa}_2(s) = \kappa_1(s)(\sin\psi(s)\cos\varphi(s) - \sin\theta(s)\cos\psi(s)\sin\varphi(s)),$$
$$\bar{\kappa}_3(s) = \kappa_1(s)(\sin\psi(s)\sin\varphi(s) + \sin\theta(s)\cos\psi(s)\cos\varphi(s)),$$

одговарајуће Бишопове кривине. Такође важе релације између кривина и углова облика

$$\kappa_1(s) = \sqrt{\bar{\kappa}_1^2(s) + \bar{\kappa}_2^2(s) + \bar{\kappa}_3^2(s)},$$
$$\kappa_2(s) = \psi'(s) + \theta'(s)\tan\theta(s)\cot\psi(s),$$
$$\kappa_3(s) = -\frac{\theta'(s)}{\sin\psi(s)}.$$

1.12 Увијене површи у еуклидском простору и простору Минковског

Увијене површи као уопштење ротационих површи у еуклидском простору, дефинисао је А. Греј у раду [36]. Мебијусова трака и увијена Клајнова боца су површи које су А. Греја мотивисале да уведе ову врсту површи.

Увијене површи настају ротацијом профилне криве у равни π око фиксиране тачке исте равни (тј. око осе која је нормална на раван π), док истовремено раван π ротира око неке праве у тој равни. Како постоје две истовремене ротације, површ која настаје се назива *увијена* или *двоструко ротациона површ*. Равне и минималне увијене површи, као и увијене површи константне Гаусове и средње кривине у еуклидском простору и простору Минковског, проучаване су у референцама [32] и [33]. Раван која садржи профилну криву у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ може бити просторна, временска или светлосна. Када је раван профилне криве недегенеративна, увијене површи које се добијају су просторне, временске или светлосне. У случају када је поменута раван светлосна, настају искључиво светлосне увијене површи ([34]). Управо ова искључивост је била мотив да се у четвртој глави докторске дисертације дефинишу *увијене површи друге врсте* које могу бити и недегенеративне.

Да би се добила параметризација ових површи у еуклидском простору, без умањења општости може се узети да је раван π која садржи криву координатна xz-раван, да крива ротира око осе која пролази кроз тачку $(a,0,0)$ и паралелна је са y-осом, док истовремено раван π ротира око z-осе. Претпоставимо да профилна крива има једначину $\alpha(t)=(\tilde{f}(t),0,\tilde{g}(t))$, где су $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ реалне функције. Ротацијом ове криве око тачке $(a,0,0)$, тј. око праве кроз ту тачку паралелне са y-осом, добија се једнакост ([33])

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \cos(bs) & 0 & -\sin(bs) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(bs) & 0 & \cos(bs) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{f}(t) \\ 0 \\ \tilde{g}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+\tilde{f}(t)\cos(bs)-\tilde{g}(t)\sin(bs) \\ 0 \\ \tilde{f}(t)\sin(bs)+\tilde{g}(t)\cos(bs) \end{bmatrix},$$

а затим ротацијом око z-осе долазимо до параметризације

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+\tilde{f}(t)\cos(bs)-\tilde{g}(t)\sin(bs) \\ 0 \\ \tilde{f}(t)\sin(bs)+\tilde{g}(t)\cos(bs) \end{bmatrix},$$

чиме се добија следећа дефиниција.

Дефиниција 1.34. ([33]) *Увијена (двоструко ротациона) површ* у простору $\mathbb{R}^3$ са профилном кривом $\alpha(t)=(\tilde{f}(t),0,\tilde{g}(t))$ има параметарску једначину

$$\begin{aligned}\tilde{x}(s,t)=(a+\tilde{f}(t)\cos(bs)-\tilde{g}(t)\sin(bs))(\cos s,\sin s,0)\\ +(0,0,\tilde{f}(t)\sin(bs)+\tilde{g}(t)\cos(bs)).\end{aligned}$$

На основу матрица ротације закључујемо да се оне реализују истовремено, али различитом брзином. Раније поменуте површи, Мебијусову траку и увијену Клајнову боцу, наводимо као специјалне примере неоријентабилних површи ове врсте.

Ако је профилна крива облика $\alpha(t)=(t,0,0)$ и $b=\frac{1}{2}$, тада је

$$\tilde{x}(s,t)=a\left(\cos s+t\cos\frac{s}{2}\cos s,\sin s+t\cos\frac{s}{2}\sin s,t\sin\frac{s}{2}\right)$$

параметризација Мебијусове траке.

Ако профилна крива има једначину $\alpha(t)=(\sin t,0,\sin(2t))$ и $b=\frac{1}{2}$, добија се увијена Клајнова боца са параметризацијом

$$\begin{aligned}\tilde{x}(s,t)=&(a+\sin t\cos\frac{s}{2}-\sin(2t)\sin\frac{s}{2})(\cos s,\sin s,0)\\&+(0,0,\sin t\sin\frac{s}{2}+\sin(2t)\cos\frac{s}{2}).\end{aligned}$$

Двоструко ротационе површи у простору Минковског дефинисане су и класификоване у радовима [33] и [34]. У простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$, постоје следећи случајеви:

1. СЛУЧАЈ. Профилна крива α лежи у временској равни.

Претпоставимо да профилна крива има параметарску једначину $\alpha(t)=(\tilde{f}(t),0,\tilde{g}(t))$. Оса ротације ортогонална на ову раван је просторна, док друга оса садржана у равни, може имати произвољан каузални карактер. Размотримо редом сваку од ових могућности.

(А) Ако профилна крива α ротира око y просторне осе, а раван око временске z-осе, добија се параметризација увијене површи облика ([33])

$$\begin{aligned}\tilde{x}(s,t)=&(a+\tilde{f}(t)\cosh(bs)+\tilde{g}(t)\sinh(bs))(\cos s,\sin s,0)\\&+(0,0,\tilde{f}(t)\sinh(bs)+\tilde{g}(t)\cosh(bs)).\end{aligned}$$

(Б) Ако профилна крива α ротира око y просторне осе, а раван око просторне x-осе, параметризација увијене површи гласи ([33])

$$\begin{aligned}\tilde{x}(s,t)=&(a+\tilde{f}(t)\sinh(bs)+\tilde{g}(t)\cosh(bs))(0,\sinh s,\cosh s)\\&+(\tilde{f}(t)\cosh(bs)+\tilde{g}(t)\sinh(bs),0,0).\end{aligned}$$

(В) Коначно, ако профилна крива α ротира око y просторне осе, а раван око светлосне осе генерисане вектором $(1,0,1)$, параметризација увијене површи је облика ([34])

$$\tilde{x}(s,t)=\begin{bmatrix}1-\frac{s^2}{2} & s & \frac{s^2}{2}\\ -s & 1 & s\\ -\frac{s^2}{2} & s & 1+\frac{s^2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+\tilde{f}(t)\cosh(bs)+\tilde{g}(t)\sinh(bs)\\ 0\\ \tilde{f}(t)\sinh(bs)+\tilde{g}(t)\cosh(bs)\end{bmatrix}.$$

2. СЛУЧАЈ. Профилна крива α лежи у просторној равни.

Претпоставимо да профилна крива има параметарску једначину $\alpha(t) = (\tilde{f}(t), \tilde{g}(t), 0)$. Ако профилна крива α ротира око z временске осе, а раван око просторне x-осе, добија се параметризација увијене површи облика ([33])

$$\begin{aligned}\tilde{x}(s,t) = &(a + \tilde{f}(t)\cos(bs) - \tilde{g}(t)\sin(bs))(\cosh s, 0, \sinh s)\\ &+(0, \tilde{f}(t)\sin(bs) + \tilde{g}(t)\cos(bs), 0).\end{aligned}$$

3. СЛУЧАЈ. Профилна крива α лежи у светлосној равни.

Права ортогонална на светлосну раван је светлосна, тако да је једна оса ротације светлосна, док је друга оса ротације, која лежи у овој равни, светлосна или просторна.

(А) Посматрајмо профилну криву $\alpha(t) = (\tilde{f}(t), \tilde{g}(t), \tilde{f}(t))$ која лежи у светлосној равни са једначином $x = z$. Ротацијом профилне криве у равни π око исте нул осе генерисане вектором $(1, 0, 1)$, добија се дегенеративна (светлосна) површ ([34]).

(Б) Ротацијом профилне криве око нул осе генерисане вектором $(1, 0, 1)$, и равни π око просторне осе, добија се параметризација светлосне увијене површи облика ([34])

$$\tilde{x}(s,t) = (a + \tilde{f}(t) + bs\tilde{g}(t))(\cosh s + \sinh s)(1, 0, 1) + (\tilde{g}(t) + c)(0, 1, 0),$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2 Специјалне врсте кривих у просторима Минковског $\mathbb{R}^3_1$ и $\mathbb{R}^4_1$

Ова глава односи се на специјалне врсте кривих у просторима Минковског $\mathbb{R}^3_1$ и $\mathbb{R}^4_1$ и представља преглед оригиналних резултата докторске дисертације објављених у референцама [37], [38], [39], [40], [42] и [45]. Најпре наводимо карактеризације ректификационих и нормалних кривих у простору $\mathbb{R}^3_1$. Затим ћемо доказати да не постоје нул Манхајмове криве у простору $\mathbb{R}^3_1$, као и да су псеудо нул Манхајмове криве праве линије и кружнице. Дефинисаћемо уопштене нул, парцијално нул и псеудо нул Манхајмове криве у простору $\mathbb{R}^4_1$ као уопштење Манхајмових кривих и дати њихову класификацију. У наставку ћемо описати Баклундове трансформације нул Картанових и пседо нул кривих, са нагласком на томе да су ово трансформације које чувају торзију (другу кривину) криве. Одредићемо под којим условима се псеудо нул, односно нул Картанова хелиса Баклундовим трансформацијама пресликава у псеудо нул, односно нул Картанову хелису редом. С друге стране, одредићемо услове које треба да испуни дата трансформација нул Картанових и псеудо нул кривих да би представљала Баклундову трансформацију тих кривих. Треба нагласити да ове трансформације нису јединствено одређене. На крају, изводимо једначине вртложног влакна за псеудо нул и нул Картанове криве, као и еволуционе једначине кривине и торзије тих кривих.

2.1 Релације између ректификационих и нормалних кривих у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$

У поглављу 1.8 дати су потребни и довољни услови за регуларну криву под којима је она оскулаторна, ректификациона или нормална крива. У овом поглављу наводимо релације између одговарајућих просторних ректификационих и нормалних кривих који су публиковани у раду [45] наметањем одређених геометријских услова. Конкретно, одредићемо параметризацију ректификационих просторних кривих чија је ортогонална пројекција на просторну (временску) раван нормална крива. Такође, ако нормалну криву пројектујемо на светлосну раван и тако добијемо ректификациону криву, одредићемо параметарску једначину нормалне криве.

Теорема 2.1. *([45]) Нека је α просторна ректификациона крива и β њена*

ортогонална пројекција на просторну раван у $\mathbb{R}^3_1$.
(1) Ако је α *крива са ненул главном нормалом и* β *нормална крива, тада је до на параметризацију крива* α *дата једначином*

$$\alpha(u) = (c\cos u, \cos(cu), \sin(cu)), \tag{2.1}$$

при чему $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $c \neq 1$*;*
(2) Ако је α *крива са нул главном нормалом и* β *нормална крива, тада је, до на параметризацију, једначина криве* α *облика*

$$\alpha(u) = (\cos u, \cos u, \sin u). \tag{2.2}$$

Доказ. (1) Нека је β ортогонална пројекција криве α на просторну раван у $\mathbb{R}^3_1$. Тада једначину криве α можемо написати на следећи начин

$$\alpha(s) = \beta(s) + \lambda(s)v, \tag{2.3}$$

при чему је s природни параметар криве α, $\lambda(s)$ неконстантна диференцијабилна функција и $v = (1,0,0)$ јединични временски вектор. Претпоставимо да α има ненул главну нормалу и да је β нормална крива чија је једначина

$$\beta(t) = (0, \cos t, \sin t) \tag{2.4}$$

тако да је t њен природни параметар. Диференцирањем релације (2.3) по параметру s и користећи услов $\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = 1$, добијамо да је

$$1 + \lambda'^2(s) = t'^2(s). \tag{2.5}$$

Диференцирањем релације (2.4) по s, налазимо да је

$$\langle \beta(s), \beta''(s)\rangle = -t'^2(s). \tag{2.6}$$

Користећи релацију (2.6) и услов $\langle \alpha(s), \alpha''(s)\rangle = 0$, следи да је

$$t'^2(s) + \lambda''(s)\lambda(s) = 0. \tag{2.7}$$

Заменом релације (2.5) у релацији (2.7), добијамо диференцијалну једначину другог реда

$$\lambda''(s)\lambda(s) + \lambda'^2(s) + 1 = 0 \tag{2.8}$$

чије је опште решење

$$\lambda(s) = \sqrt{c^2 - (s + c_0)^2}, \tag{2.9}$$

где $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $c_0 \in \mathbb{R}$ и $|c| > |s + c_0|$. Природни параметар криве β гласи

$$t(s) = \int_0^s ||\beta'(u)||\, du. \tag{2.10}$$

Заменом релације (2.9) у релацији (2.3), налазимо да је

$$||\beta'(s)|| = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{s + c_0}{c}\right)^2}}. \tag{2.11}$$

Помоћу релација (2.10) и (2.11) следи да је

$$t(s) = c \arcsin(\frac{s + c_0}{c}). \tag{2.12}$$

Према томе, једначина криве β гласи

$$\beta(s) = (0, \cos(c \arcsin(\frac{s + c_0}{c})), \sin(c \arcsin(\frac{s + c_0}{c})). \tag{2.13}$$

Користећи релације (2.3), (2.9), (2.13) и репараметризацију

$$u = \arcsin(\frac{s + c_0}{c}), \tag{2.14}$$

добијамо да је крива α облика (2.1). Коначно, помоћу релација (2.3), (2.9) и (2.13) добијамо

$$\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = \frac{c^2[(1 - c^2)(s + c_0^2)^2 + c^2(c^2 - 1)]}{(c^2 - (s + c_0)^2)^3}, \tag{2.15}$$

одакле следи да је $c \neq 1$ јер је $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \neq 0$. Тиме је доказан први део тврђења.

(2) Претпоставимо сада да је α крива са нул вектором главне нормале и да је β нормална крива. Тада је крива α облика (2.3). Међутим, из релације (2.15) следи да за $c = 1$ важи услов $\langle \alpha'', \alpha'' \rangle = 0$, па је у том случају крива α дата једначином (2.2). $\square$

Напомена 2.1. *Увођењем репараметризације* $u = \arcsin(\frac{a}{c} tg\, p)$*, тако да је* $a^2 = 1 - c^2$*,* $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$*,* $c \neq 1$*, параметарска једначина* (2.1) *се своди на облик*

$$\alpha(p) = \frac{a}{\cos p} \bar{\alpha}(p),$$

где је

$$\bar{\alpha}(p) = \frac{1}{a}(\sqrt{\cos^2 p - a^2}, \cos(c \arcsin(\frac{a}{c} tg\, p)) \cos p, \sin(c \arcsin(\frac{a}{c} tg\, p)) \cos p)$$

крива јединичне брзине која лежи на псеудосфери $\mathbb{S}^2_1(1)$.

На сличан начин доказује се следеће тврђење, чији доказ изостављамо.

Теорема 2.2. *([45]) Нека је α просторна крива и β њена ортогонална пројекција на временску раван у $\mathbb{R}^3_1$.*

(1) Ако крива α има ненул главну нормалу, а β је просторна или временска нормална крива, тада је редом, до на параметризацију, α дата једначином

$$\alpha(u) = (\cosh(cu), \sinh(cu), c\cosh u),$$

односно

$$\alpha(u) = (\sinh(cu), \cosh(cu), c\sinh u),$$

где $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $c \neq 1$;

(2) Ако крива α има нул главну нормалу, а β је просторна или временска нормална крива, тада је редом, до на параметризацију, α дата једначином

$$\alpha(u) = (\cosh u, \sinh u, \cosh u),$$

односно

$$\alpha(u) = (\sinh u, \cosh u, \sinh u);$$

(3) Ако је β нул нормална крива, тада је α права линија.

У наредној теореми ћемо показати да су праве једине ректификационе криве у простору Минковског чија је пројекција на светлосну раван у односу на изабрани преградни сноп нормална крива.

Посматрајмо најпре произвољну криву α у $\mathbb{R}^3_1$ (која не лежи у светлосној равни) и криву $\beta = P^s(\alpha)$ коју добијамо пројектовањем криве α на светлосну раван π. Тада релација између кривих $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ и β гласи

$$\alpha(s) = \beta(s) + \langle \alpha(s), u\rangle v, \tag{2.16}$$

где су u и v нул вектори који испуњавају услове

$$Rad\, T\pi = span\{u\}, \quad ltr(T\pi) = span\{v\},$$

$$\langle u, v\rangle = 1, \quad \langle v, w\rangle = 0, \quad \forall\, w \in S(T\pi).$$

У поглављу 1.7 дисертације, истакли смо да преградни сноп светлосне равни π није јединствен, што ћемо илустровати конкретним примерима који ће нас довести до различитих параметарских једначина криве β.

Не умањујући општост, можемо претпоставити да светлосна раван π има једначину $x = y$. У овом случају је радикални сноп разапет вектором

$$u = (1, 1, 0).$$

Уочимо ненула вектор $q = (0, 1, 0)$ локално дефинисан на отвореном подскупу $U \subset \mathbb{R}^3_1$. Пошто је $\langle q, u\rangle = 1$ и $\langle q, q\rangle = 1$, светлосни трансверзални векторски сноп разапет је вектором

$$v = \frac{1}{\langle u, q\rangle}\left(q - \frac{\langle q, q\rangle}{2\langle u, q\rangle}u\right) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0).$$

Отуда је одговарајући преградни $S(T\pi)$ сноп разапет вектором

$$w = (0, 0, 1). \tag{2.17}$$

Заменом вектора u и v у релацији (2.16), добијамо параметарску једначину пројекције β криве α

$$\beta(s) = (\frac{\alpha_1(s) + \alpha_2(s)}{2}, \frac{\alpha_1(s) + \alpha_2(s)}{2}, \alpha_3(s)). \tag{2.18}$$

Претпоставимо сада да ненула вектор q_0, локално дефинисан на скупу $U \subset \mathbb{R}^3_1$, има координате $q_0 = (0, 1, 1)$. Тада је $\langle q_0, u\rangle = 1$ и $\langle q_0, q_0\rangle = 2$, па је светлосни трансверзални сноп генерисан вектором

$$v_0 = (-1, 0, 1). \tag{2.19}$$

Одавде следи да је одговарајући преградни $S(T\pi)$ сноп разапет вектором

$$w_0 = (1, 1, -1). \tag{2.20}$$

Заменом релација (2.17) и (2.19) у релацији (2.16), добијамо да пројекција β криве α има једначину облика

$$\beta_0(s) = (\alpha_2(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s) + \alpha_1(s) - \alpha_2(s)). \tag{2.21}$$

Дакле, за различите изборе преградног снопа равни π, добијају се различите параметарске једначине криве β.

Теорема 2.3. *([45]) Нека је α просторна ректификациона крива са ненул вектором главне нормале у простору $\mathbb{R}^3_1$ и β њена пројекција на светлосну раван са једначином $x = y$. Ако је β нормална крива, а преградни сноп светлосне равни дат релацијама* (2.17) *или* (2.20)*, тада је α права линија.*

Доказ. Нека је β нормална крива. Претпоставимо да је преградни сноп дат релацијом (2.17). Применом релације (2.18) и користећи услов $\langle \beta(s), \beta'(s)\rangle = 0$, налазимо да је $\alpha_3(s)\alpha_3'(s) = 0$, одакле следи да је α равна крива, тј. права линија.

Претпоставимо да је преградни сноп равни π дат релацијом (2.20). Из услова $\langle \beta(s), \beta'(s) \rangle = 0$ и релације (2.21) следи да је

$$(\alpha_3(s) + \alpha_1(s) - \alpha_2(s))(\alpha_3(s) + \alpha_1(s) - \alpha_2(s))' = 0,$$

где је s природни параметар криве α. На основу последње једнакости, следи да можемо разликовати два случаја:

(i) $\alpha_3(s) + \alpha_1(s) - \alpha_2(s) = 0$.

У овом случају, једначина криве α је облика

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_1(s) + \alpha_3(s), \alpha_3(s)), \tag{2.22}$$

па из услова $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ следи

$$\alpha_1(s) = \frac{1}{2} \int \frac{ds}{\alpha_3'(s)} - \alpha_3(s). \tag{2.23}$$

Користећи услов $\langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle = 0$, добијамо

$$\alpha_1''\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3'' + 2\alpha_3\alpha_3'' = 0. \tag{2.24}$$

Заменом релације (2.23) у (2.24), након сређивања налазимо да је

$$\alpha_3''(s) \left(-\frac{\alpha_3(s)}{\alpha_3'^2(s)} + \int \frac{ds}{\alpha_3'(s)} \right) = 0,$$

па опет имамо два подслучаја:

(i.1) $\alpha_3''(s) = 0$.

Помоћу релација (2.22) и (2.23), добијамо следећу параметарску једначину криве α

$$\alpha(s) = \left(\frac{s - 2a^2 s - 2ab}{2a}, \frac{s}{2a}, as + b \right),$$

при чему $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, што значи да је α права линија.

(i.2) $-\dfrac{\alpha_3(s)}{\alpha_3'^2(s)} + \displaystyle\int \frac{ds}{\alpha_3'(s)} = 0$.

Диференцирањем ове једначине по s добијамо да је $\alpha_3(s)\alpha_3''(s) = 0$. Према томе, овај подслучај се своди на подслучај *(i.1)*, што значи да је α права линија.

(ii) $(\alpha_3(s) + \alpha_1(s) - \alpha_2(s))' = 0$.

Ако је испуњен овај услов, тада крива α има једначину

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_1(s) + \alpha_3(s) - c, \alpha_3(s)),$$

при чему $c \in \mathbb{R}$ и конгруентна је са кривом датом једначином (2.22). $\square$

Под W-кривом (или хелисом) се подразумева произвољна крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ чије су све кривине константне. Параметарске једначине псеудо нул W-кривих добијене су у референци [79]. Користећи поменуте једначине, могу се одредити параметарске једначине просторних нормалних кривих које нису равне, а чија је пројекција на светлосну раван псеудо нул ректификациона W-крива.

Теорема 2.4. *([45]) Нека је α просторна нормална крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ са кривином $\kappa_2(s) \neq 0$ и β њена пројекција на светлосну раван са једначином $x = y$ и преградним снопом (2.17). Ако је β псеудо нул ректификациона W-крива дата једначином*

$$\beta(s) = (\frac{s^2}{2}, \frac{s^2}{2}, s), \tag{2.25}$$

или

$$\beta(s) = \frac{1}{c_2^2}(e^{c_2 s}, e^{c_2 s}, c_2^2 s), \tag{2.26}$$

где $c_2 \in \mathbb{R}_0$, тада је респективно једначина криве α облика

$$\alpha(s) = \left(-\frac{c}{s^2} + \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}, \frac{c}{s^2} + \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}, s\right), \quad s^2 > 8c, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{2.27}$$

односно

$$\alpha(s) = \left(\frac{2-c_2}{c_2^2}e^{c_2 s} - ce^{-c_2 s} + \frac{c_2^2}{4}s^2 e^{-c_2 s}, \frac{1}{c_2}e^{c_2 s} + ce^{-c_2 s} - \frac{c_2^2}{4}s^2 e^{-c_2 s}, s\right), \tag{2.28}$$

где $c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R}$.

Доказ. У првом случају, ако је крива β дата једначином (2.25), помоћу релације (2.18), добијамо да параметарска једначина криве α гласи

$$\alpha(s) = (s^2 - \alpha_2(s), \alpha_2(s), s), \tag{2.29}$$

при чему је α_2 нека диференцијабилна функција, а s природни параметар криве β. Када диференцирамо претходну једначину и искористимо услов $\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ долазимо до линеарне диференцијалне једначине

$$\alpha_2'(s) + \frac{2}{s}\alpha_2(s) = 2s - \frac{1}{s}, \quad s \neq 0, \tag{2.30}$$

чије је опште решење

$$\alpha_2(s) = \frac{c}{s^2} + \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}, \ \ c \in \mathbb{R}. \tag{2.31}$$

Када ово уврстимо у релацију (2.29), добијамо да је параметарска једначина криве α облика (2.27). Преостали део доказа тече аналогно. $\square$

Напомена 2.2. *Крива дата једначином (2.27) лежи на:*
(1) псеудосфери са једначином $-x^2 + y^2 + z^2 = 2c$, ако је $c > 0$;
(2) светлосном конусу са једначином $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$, ако је $c = 0$;
(3) псеудохиперболичком простору са једначином $-x^2 + y^2 + z^2 = 2c$, ако је $c < 0$.

При другачијем избору преградног снопа, добијају се нове параметарске једначине кривих, које су дате у следећој теореми.

Теорема 2.5. *([45]) Нека је α просторна нормална крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ са кривином $\kappa_2(s) \neq 0$ и β њена пројекција на светлосну раван са једначином $x = y$ и преградним снопом (2.20). Ако је β ректификациона W-крива дата једначином (2.25) или (2.26), тада је респективно једначина криве α облика*

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{s(1+\frac{s}{2})}\left(c+\frac{s^4}{4}+\frac{s^3}{2}+\frac{s^2}{2}\right), \frac{s^2}{2}, s\left(1+\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{s(1+\frac{s}{2})}\left(c+\frac{s^4}{4}+\frac{s^3}{2}+\frac{s^2}{2}\right)\right),$$

где $c \in \mathbb{R}$, односно

$$\begin{aligned} \alpha(s) \;\; = \;\; & (\tfrac{1}{s+\frac{1}{c_2}e^{c_2 s}}(c + \tfrac{1}{c_2^2}e^{2c_2 s} + \tfrac{s^2}{2} + \tfrac{s}{c_2}e^{c_2 s}), \tfrac{1}{c_2}e^{c_2 s}, \\ & s + \tfrac{1}{c_2}e^{c_2 s} - \tfrac{1}{s+\frac{1}{c_2}e^{c_2 s}}(c + \tfrac{1}{c_2^2}e^{2c_2 s} + \tfrac{s^2}{2} + \tfrac{s}{c_2}e^{c_2 s})), \end{aligned}$$

где $c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $c \in \mathbb{R}$.

2.2 Нул и псеудо нул Манхајмове криве у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$

Резултати добијени у раду [38], а које ћемо изложити у овом поглављу, говоре о томе да не постоје нул Манхајмове криве у простору $\mathbb{R}^3_1$, што значи да теореме доказане у референцама [59] и [74] не важе, јер тврде супротно. Осим нул Манхајмових кривих, у истом раду проучаване су и псеудо нул Манхајмове криве, при чему су добијене њихове експлицитне параметарске једначине.

Теорема 2.6. *([38]) Не постоје нул Манхајмове криве у простору Минковског* $\mathbb{R}^3_1$.

Доказ. Уочимо у простору $\mathbb{R}^3_1$ нул Картанову криву β и произвољну ненул или нул криву $\beta^\star$ тако да је у одговарајућим тачкама кривих вектор главне нормале N криве β колинеаран са вектором бинормале $B^\star$ криве $\beta^\star$. Тада је $B^\star$ просторни вектор, што имплицира да је крива $\beta^\star$ просторна или временска, чији Френеов репер задовољава Френеове формуле

$$\begin{bmatrix} T^{\star'} \\ N^{\star'} \\ B^{\star'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon^\star\kappa_1^\star & 0 \\ -\epsilon^\star\kappa_1^\star & 0 & \kappa_2^\star \\ 0 & \epsilon^\star\kappa_2^\star & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^\star \\ N^\star \\ B^\star \end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

где су $\kappa_1^\star$ и $\kappa_2^\star$ прва и друга кривина. Осим тога, за Френеов репер криве β важе услови

$$\langle T^\star, T^\star\rangle = -\langle N^\star, N^\star\rangle = \epsilon^\star = \pm 1, \quad \langle B^\star, B^\star\rangle = 1, \tag{2.33}$$

$$\langle T^\star, N^\star\rangle = \langle T^\star, B^\star\rangle = \langle N^\star, B^\star\rangle = 0. \tag{2.34}$$

Једначине Картановог репера $\{T, N, B\}$ нул Картанове криве β гласе

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\kappa_1 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

где је прва кривина $\kappa_1 = 0$ или $\kappa_1 = 1$. Векторска поља овог репера испуњавају услове

$$\langle T, T\rangle = \langle B, B\rangle = \langle T, N\rangle = \langle N, B\rangle = 0, \ \langle N, N\rangle = \langle T, B\rangle = 1. \tag{2.35}$$

Како је $\{\beta, \beta^\star\}$ Манхајмов пар кривих, следи да је

$$\beta(s^\star) = \beta^\star(s^\star) + \mu(s^\star)B^\star(s^\star), \tag{2.36}$$

где је $s^\star$ параметар дужине лука криве $\beta^\star$, а $\mu \neq 0$ је произвољна диференцијабилна функција. Означимо са s параметар псеудо дужине лука криве β. Разликујемо два случаја:

(A) $\kappa_2^\star(s^\star) = 0$.

Диференцирањем релације (2.36) по $s^\star$ и применом Френеових формула (2.32) налазимо да је

$$T\frac{ds}{ds^\star} = T^\star + \mu' B^\star. \tag{2.37}$$

Скаларним множењем последње једнакости са N и применом релација (2.35), (2.33) и (2.34), добијамо да је $\mu' = 0$. Одавде следи да је нул вектор $T(s)$ колинеаран са ненул вектором $T^\star(s)$, што није могуће.

(Б) $\kappa_2^\star(s^\star) \neq 0$.

Поступајући као у претходном случају, диференцирањем (2.36) по $s^\star$ и применом релације (2.32), добијамо једнакост

$$T\frac{ds}{ds^\star} = T^\star + \mu' B^\star + \mu\epsilon^\star\kappa_2^\star N^\star. \tag{2.38}$$

Скаларним множењем претходне једначине са N, и применом (2.35), (2.33) и (2.34), добијамо да је $\mu' = 0$. Дакле, $\mu(s^\star) \neq 0$ је константна функција. Након овог израчунавања, релација (2.38) гласи

$$T\frac{ds}{ds^\star} = T^\star + \mu\epsilon^\star\kappa_2^\star N^\star. \tag{2.39}$$

Применом услова (2.35), (2.33) и (2.34) и користећи последњу једнакост, добијамо да је

$$\langle T\frac{ds}{ds^\star}, T\frac{ds}{ds^\star}\rangle = \langle T^\star, T^\star\rangle - \mu^2\kappa_2^{\star 2}\langle N^\star, N^\star\rangle = \epsilon^\star - \epsilon^\star\mu^2\kappa_2^{\star 2} = 0, \tag{2.40}$$

одакле следи да је

$$\kappa_2^\star = \pm\frac{1}{\mu} = constant \neq 0. \tag{2.41}$$

Пошто је β нул Картанова крива, разликујемо два подслучаја:

(Б.1) $\kappa_1(s) = 0$.

Тада је $T(s) = constant$. Диференцирањем релације (2.39) по $s^\star$, и помоћу релација (2.32) и (2.41), следи да је

$$T\frac{d^2 s}{ds^{\star 2}} = -\epsilon^\star\kappa_1^\star N^\star \mp \kappa_1^\star T^\star \pm \epsilon^\star\kappa_2^\star B^\star. \tag{2.42}$$

Одавде је

$$\langle T\frac{d^2 s}{ds^{\star 2}}, T\frac{d^2 s}{ds^{\star 2}}\rangle = -\epsilon^\star\kappa_1^{\star 2} + \epsilon^\star\kappa_1^{\star 2} + \kappa_2^{\star 2} = 0, \tag{2.43}$$

па је $\kappa_2^\star = 0$, што је у контрадикцији са релацијом (2.41).

(Б.2) $\kappa_1(s) = 1$.

Заменом релације (2.41) у релацији (2.39) добијамо

$$T\frac{ds}{ds^\star} = T^\star \pm \epsilon^\star N^\star. \tag{2.44}$$

Диференцирањем последње релације по $s^\star$ и применом релације (2.35), налазимо да је

$$N(\frac{ds}{ds^\star})^2 + T\frac{d^2s}{ds^{\star 2}} = -\epsilon^\star\kappa_1^\star N^\star \mp \kappa_1^\star T^\star \pm \epsilon^\star\kappa_2^\star B^\star. \tag{2.45}$$

На основу претходне релације, добијамо да је

$$\langle N(\frac{ds}{ds^\star})^2 + T\frac{d^2s}{ds^{\star 2}}, N(\frac{ds}{ds^\star})^2 + T\frac{d^2s}{ds^{\star 2}}\rangle = \left(\frac{ds}{ds^\star}\right)^4 = \kappa_2^{\star 2} = constant \neq 0.$$

Са друге стране, уколико једначину (2.45) скаларно помножимо са $N^\star$, користећи услове (2.33) и (2.34), као и једнчину (2.46), добијамо да је $\kappa_1^\star = 0$. Одавде следи да је $\kappa_2^\star = 0$, што је у контрадикцији са $\kappa_2^\star \neq 0$. Дакле, не постоје нул Манхајмове криве. □

За псеудо нул Манхајмове криве, аналогним поступком је доказана следећа теорема.

Теорема 2.7. *([38]) Нека је β псеудо нул крива и $\beta^\star$ ненул или нул крива у простору $\mathbb{R}_1^3$. Ако је $\{\beta, \beta^\star\}$ Манхајмов пар кривих, тада важи једно од следећих тврђења:*

(1) криве β и $\beta^\star$ су паралелне псеудо нул праве линије;

(2) крива β је псеудо нул круг, а крива $\beta^\star$ псеудо нул права линија.

2.3 Уопштене нул Манхајмове криве у простору Минковског $\mathbb{R}_1^4$

У овом поглављу ћемо описати резултате који су добијени у раду [37], а који се односе на уопштене нул Манхајмове криве у простор-времену Минковског $\mathbb{R}_1^4$. Наводимо најпре дефиницију поменутих кривих.

Дефиниција 2.1. ([37]) Нул Картанова крива $\beta : I \to \mathbb{R}_1^4$ се назива *уопштена нул Манхајмова крива*, ако постоји нул Картанова или Френеова крива $\beta^* : I^* \to \mathbb{R}_1^4$ и бијекција $\Phi : \beta \to \beta^*$ тако да у одговарајућим тачкама кривих главна нормала криве β припада равни одређеној векторима прве и друге бинормале криве β^*.

Крива β^* се назива *придружена уопштена Манхајмова крива* криве β, а пар кривих (β, β^*) *уопштени Манхајмов пар*. Означимо са $\{T, N, B_1, B_2\}$ Картанов репер уопштене нул Манхајмове криве β и са $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ Картанов или Френеов репер придружене уопштене Манхајмове криве β^*. Будући да вектор главне нормале $N(s)$ криве β припада равни $\{B_1^*, B_2^*\}$, можемо га записати у облику

$$N(s) = p(s)B_1^* + q(s)B_2^*,$$

при чему су $p(s)$ и $q(s)$ неке диференцијабилне функције. С обзиром на каузални карактер равни $\{B_1^*, B_2^*\}$, разликујемо три могућности.

(A) $\{B_1^*, B_2^*\}$ ЈЕ ПРОСТОРНА РАВАН.

Теорема 2.8. *([37]) Нека је $\beta : I \to \mathbb{R}_1^4$ уопштена нул Манхајмова крива и $\beta^* : I^* \to \mathbb{R}_1^4$ придружена уопштена Манхајмова крива криве β таква да главна нормала криве β лежи у просторној равни $\{B_1^*, B_2^*\}$. Тада је β^* временска крива таква да кривине кривих β и β^* задовољавају релације*

$$\kappa_1 = 1, \ \ \kappa_2 = \frac{1}{2\mu}, \ \ |\kappa_1^*| = |\kappa_2^*| = |\kappa_3| \neq 0, \ \ |\kappa_3^*| = \frac{1}{\mu}, \ \ \mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \tag{2.46}$$

а репер криве β^* је облика

$$\begin{aligned} T^* &= \tfrac{1}{2\sqrt{\mu}}(T - 2\mu B_1), \\ N^* &= -sgn(\kappa_1^*)sgn(\kappa_3)B_2, \\ B_1^* &= sgn(\kappa_1^*)sgn(\kappa_2^*)\frac{1}{2\sqrt{\mu}}(T + 2\mu B_1), \\ B_2^* &= sgn(\kappa_2^*)sgn(\kappa_3)N. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Доказ. Уопштена нул Манхајмова крива β је нул Картанова крива чији Картанов репер задовољава релацију

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & -\kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ -\kappa_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \tag{2.48}$$

при чему су $\kappa_1(s) = 1$, $\kappa_2(s)$ и $\kappa_3(s)$ прва, друга и трећа Картанова кривина криве β, респективно. Векторска поља овог репера задовољавају услове

$$\begin{gathered} \langle T, T\rangle = \langle B_1, B_1\rangle = 0, \quad \langle N, N\rangle = \langle B_2, B_2\rangle = 1, \\ \langle T, N\rangle = \langle T, B_2\rangle = \langle N, B_1\rangle = \langle N, B_2\rangle = \langle B_1, B_2\rangle = 0, \quad \langle T, B_1\rangle = 1. \end{gathered} \tag{2.49}$$

Како главна нормала криве β лежи у просторној равни $\{B_1^*, B_2^*\}$, крива β^* је просторна или временска крива чије Френеове формуле гласе

$$\begin{bmatrix} T^{*'} \\ N^{*'} \\ B_1^{*'} \\ B_2^{*'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_2^*\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\epsilon_1^*\kappa_1^* & 0 & \epsilon_3^*\kappa_2^* & 0 \\ 0 & -\epsilon_2^*\kappa_2^* & 0 & -\epsilon_1^*\epsilon_2^*\epsilon_3^*\kappa_3^* \\ 0 & 0 & -\epsilon_3^*\kappa_3^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B_1^* \\ B_2^* \end{bmatrix}, \tag{2.50}$$

где је

$$\langle T^*, T^* \rangle = \epsilon_1^*,\ \langle N^*, N^* \rangle = \epsilon_2^*,\ \langle B_1^*, B_1^* \rangle = \epsilon_3^* = 1,\ \langle B_2^*, B_2^* \rangle = \epsilon_4^* = 1,$$

$$\epsilon_1^* = -\epsilon_2^*,\ \epsilon_1^*\epsilon_2^*\epsilon_3^*\epsilon_4^* = -1.$$

Криву β^* можемо параметризовати тако да је

$$\beta^*(f(s)) = \beta(s) + \mu(s)N(s), \tag{2.51}$$

при чему су s и $s^* = f(s) = \int_0^s ||\beta^{*\prime}(t)||\, dt$ параметар псеудо дужине лука и параметар дужине лука кривих β и β^*, редом, а $f : I \subset \mathbb{R} \to I^* \subset \mathbb{R}$ и μ произвољне глатке функције. Како је β нул Картанова крива, разликујемо два случаја у односу на њену другу кривину:

(A.1) $\kappa_2(s) = 0$.

Применом Картанових формула (2.48) и диференцирањем релације (2.51) по s, добијамо

$$T^* f' = T + \mu' N - \mu B_1. \tag{2.52}$$

Скаларним множењем претходне релације са $N = pB_1^* + qB_2^*$, налазимо да је $\mu' = 0$, те релацију (2.52) сводимо на облик

$$T^* f' = T - \mu B_1, \quad \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{2.53}$$

Скаларним квадрирањем претходне једнакости добијамо да је

$$f'^2 = -2\epsilon_1^*\mu = constant \neq 0. \tag{2.54}$$

Диференцирањем релације (2.53) по s и применом релација (2.48), (2.50) и (2.54), налазимо да је

$$\epsilon_2^*\kappa_1^* N^* f'^2 = N - \mu\kappa_3 B_2, \tag{2.55}$$

што нас, након скаларног множења са $N = pB_1^* + qB_2^*$ доводи до контрадикције. Дакле, друга кривина криве β не може бити нула.

(A.2) $\kappa_2 \neq 0$.

Поступајући на исти начин као у претходном случају, диференцирањем релације (2.51) по s и применом Картанових формула (2.48), добијамо

$$T^* f' = (1 - \mu\kappa_2)T + \mu' N - \mu B_1. \tag{2.56}$$

Скаларним множењем претходне релације са $N = pB_1^* + qB_2^*$, добијамо да је

$$\mu' = 0. \tag{2.57}$$

Релација (2.56) сада гласи

$$T^* f' = (1 - \mu\kappa_2)T - \mu B_1. \tag{2.58}$$

Диференцирањем претходне релације по s и применом Картанових формула (2.48) и Френеових формула (2.50), следи да је

$$\epsilon_2^* \kappa_1^* N^* f'^2 + T^* f'' = (1 - \mu\kappa_2)' T + (1 - 2\mu\kappa_2)N - \mu\kappa_3 B_2. \tag{2.59}$$

Скаларним множењем последње једнакости са $N = pB_1^* + qB_2^*$ и користећи услов $\mu' = 0$, добијамо да је

$$\kappa_2(s) = \frac{1}{2\mu} = constant, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.60}$$

Скаларним квадрирањем релације (2.58) налазимо да је

$$\langle T^* f', T^* f' \rangle = \epsilon_1^* f'^2 = -2\mu(1 - \mu\kappa_2), \tag{2.61}$$

одакле добијамо да је

$$f'^2 = -\epsilon_1^* \mu = constant \neq 0. \tag{2.62}$$

Помоћу релација (2.59), (2.60) и (2.62), имамо да је

$$\epsilon_2^* \kappa_1^* N^* f'^2 = -\mu\kappa_3 B_2. \tag{2.63}$$

Дакле, вектори $B_2(s)$ и $N^*(s^*)$ су колинеарни, па је вектор N^* просторни. Одавде закључујемо да вектор T^* мора бити временски, што значи да је β^* временска крива. Како је $\epsilon_1^* = -1 = -\epsilon_2^*$, релација (2.62) гласи

$$f'^2 = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \tag{2.64}$$

одакле је

$$f'(s) = \sqrt{\mu} = ||\beta^{*'}(s)||. \tag{2.65}$$

Користећи последњу једнакост и релацију (2.60), релација (2.58) сада гласи

$$T^* = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}(T - 2\mu B_1). \tag{2.66}$$

Како је $f'^2 = \mu$ и $\epsilon_2^* = 1$, релације (2.63) имплицира да је

$$\kappa_1^* = -\kappa_3, \quad N^* = B_2, \tag{2.67}$$

или

$$\kappa_1^* = \kappa_3, \quad N^* = -B_2. \tag{2.68}$$

Претпоставимо најпре да важи (2.67). Диференцирањем једначине $N^* = B_2$ и применом одговарајућих Картанових и Френеових формула, добијамо да је

$$(\kappa_1^* T^* + \kappa_2^* B_1^*)f' = -\kappa_3 T. \tag{2.69}$$

Скаларним множењем последње релације са $N = pB_1^* + qB_2^*$ имамо да је

$$p\kappa_2^* f' = 0. \tag{2.70}$$

Како је $f' \neq 0$ и $\kappa_2^* \neq 0$ (јер би у противном T^* и T били колинеарни), закључујемо да је $p = 0$ и сходно томе је $N = qB_2^*$. Како је N просторни јединични вектор, имамо да је $q^2 = 1$, одакле је

$$N = B_2^*, \tag{2.71}$$

или

$$N = -B_2^*. \tag{2.72}$$

Претпоставимо да важи (2.71). Диференцирањем поменуте релације по s и применом Картанових и Френеових формула посматраних кривих, добијамо да је

$$-\kappa_2 T - B_1 = -\kappa_3^* f' B_1^*. \tag{2.73}$$

Имајући у виду да је $f'^2 = \mu$ и $\kappa_2 = \dfrac{1}{2\mu}$, заменом у релацији (2.73) налазимо да је

$$B_1^* = \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}\kappa_3^*}(\frac{1}{2}T + \mu B_1). \tag{2.74}$$

С друге стране, помоћу релација (2.66), (2.67) и (2.69), налазимо да је

$$B_1^* = \frac{\kappa_1^*}{\sqrt{\mu}\kappa_2^*}(\frac{1}{2}T + \mu B_1). \tag{2.75}$$

Последње две релације дају услов $sgn(\kappa_1^*)sgn(\kappa_2^*) = sgn(\kappa_3^*)$. Користећи услов $det(T^*, N^*, B_1^*, B_2^*) = 1$ и релације (2.66), (2.67), (2.71) и (2.75), након краћег сређивања добијамо

$$\kappa_1^* = -\kappa_2^*. \tag{2.76}$$

Одавде закључујемо да је $sgn(\kappa_3^*) = -1$. Како је B_1^* просторни вектор, на основу релације (2.74) следи да је ${\kappa_3^*}^2 = \dfrac{1}{\mu^2}$, односно

$$\kappa_3^* = -\frac{1}{\mu}, \quad \mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}. \tag{2.77}$$

Заменом релације $\kappa_1^* = -\kappa_2^*$ у (2.75), налазимо да је

$$B_1^* = -\frac{1}{2\sqrt{\mu}}(T + 2\mu B_1). \tag{2.78}$$

Помоћу релација (2.60), (2.67), (2.76) и (2.77), закључујемо да важи (2.46), при чему је $\kappa_1^* = -\kappa_2^* = -\kappa_3$. Позивајући се на ову релацију између кривина, на основу (2.66), (2.67), (2.71) и (2.78), уочавамо да важи (2.47).

Аналогно, ако претпоставимо да важе релације (2.68) и (2.70) или (2.67) и (2.72) или (2.68) и (2.72), поступајући на исти начин као у претходном случају, добијамо да важе релације (2.46) и (2.47), чиме је теорема доказана. □

У наредној теореми наводимо потребне услове да нул Картанова крива β и њој придружена крива чине пар уопштених Манхајмових кривих.

Теорема 2.9. *([37]) Нека је $\beta : I \to \mathbb{R}_1^4$ нул Картанова крива са другом кривином $\kappa_2(s) = constant \neq 0$ и Картановим репером $\{T, N, B_1, B_2\}$. Ако је крива $\beta^* : I^* \to \mathbb{R}_1^4$ дефинисана са*

$$\beta^* = \beta + \frac{1}{2\kappa_2}N$$

Френеова, тада је β уопштена Манхајмова крива и β^* њој придружена временска уопштена Манхајмова крива.

Доказ. Претпоставимо да је крива β^* са параметарском једначином

$$\beta^*(s) = \beta(s) + \frac{1}{2\kappa_2}N(s), \quad \kappa_2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \tag{2.79}$$

Френеова крива, при чему је s параметар псеудо дужине лука криве β, док је $s^* = f(s) = \int_0^s ||\beta^*{}'(t)||\, dt$ параметар дужине лука криве β^*. Ако је $\mu = \dfrac{1}{\kappa_2}$, $\kappa_2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, тада је

$$\langle \beta^*, \beta^* \rangle = -\mu, \tag{2.80}$$

па је β^* временска крива и важи $f(s) = \sqrt{\mu}s$. Дакле, $f' = \sqrt{\mu}$, што нас заједно са Картановим формулама (2.48), након диференцирања релације (2.79) по s, доводи до релације

$$T^* = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}(T - 2\mu B_1). \tag{2.81}$$

Диференцирањем последње релације по s и помоћу Картанових формула (2.48) и Френеових формула (2.50), добијамо да је $\kappa_1^* N^* = -\kappa_3 B_2$. Отуда је

$$\kappa_1^* = -\kappa_3, \quad N^* = B_2, \tag{2.82}$$

или

$$\kappa_1^* = \kappa_3, \quad N^* = -B_2. \tag{2.83}$$

Претпоставимо да важи (2.82). Диференцирањем једнакости $N^* = B_2$ по s, добијамо

$$(\kappa_1^* T^* + \kappa_2^* B_1^*) f' = -\kappa_3 T. \tag{2.84}$$

Скаларним квадрирањем претходне једнакости следи да је

$$(-\kappa_1^{\star 2} + \kappa_2^{\star 2}) f'^2 = 0, \tag{2.85}$$

одакле је

$$|\kappa_1^\star| = |\kappa_2^\star|. \tag{2.86}$$

Помоћу релација (2.81), (2.82) и (2.84) и услова $f' = \sqrt{\mu}$, добијамо да је

$$B_1^* = \frac{sgn(\kappa_1^*) sgn(\kappa_2^*)}{2\sqrt{\mu}}(T + 2\mu B_1). \tag{2.87}$$

Диференцирањем претходне релације по s, примењујући одговарајуће Картанове и Френеове формуле и релацију (2.82) добијамо да је векторско поље друге бинормале облика

$$B_2^* = \frac{sgn(\kappa_1^*)sgn(\kappa_2^*)}{\mu\kappa_3^*}N. \tag{2.88}$$

Користећи услов $det(T^*, N^*, B_1^*, B_2^*) = 1$ и једнакост $\kappa_3^* = -\frac{1}{\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, налазимо да је

$$B_2^* = -sgn(\kappa_1^*)sgn(\kappa_2^*)N. \tag{2.89}$$

Према томе, релација између репера кривих β и β^* гласи

$$\begin{array}{rcl} T^* &=& \frac{1}{2\sqrt{\mu}}(T - 2\mu B_1), \\ N^* &=& B_2, \\ B_1^* &=& \frac{sgn(\kappa_1^*)sgn(\kappa_2^*)}{2\sqrt{\mu}}(T + 2\mu B_1), \\ B_2^* &=& -sgn(\kappa_1^*)sgn(\kappa_2^*)N. \end{array} \tag{2.90}$$

Према томе, $\{\beta, \beta^*\}$ је пар уопштених Манхајмових кривих.

Аналогно, користећи релацију (2.83), следи да је $\{\beta, \beta^*\}$ пар уопштених Манхајмових кривих, чиме је доказ теореме комплетиран. □

(Б) $\{B_1^*, B_2^*\}$ ЈЕ ВРЕМЕНСКА РАВАН.

Када је раван $\{B_1^*, B_2^*\}$ временска, њену базу чине међусобно ортогонални просторни и временски вектор или два линеарно независна нул вектора. У првом од наведених случајева, важе следећа тврђења.

Теорема 2.10. *([37]) Нека је $\beta : I \to \mathbb{R}_1^4$ уопштена нул Манхајмова крива и $\beta^* : I^* \to \mathbb{R}_1^4$ њој придружена уопштена Манхајмова крива таква да главна нормала криве β лежи у временској равни $\{B_1^*, B_2^*\}$. Тада је β^* просторна крива таква да кривине кривих β и β^* задовољавају релације*

$$\kappa_1 = 1,\ \kappa_2 = \frac{1}{2\mu},\ |\kappa_1^*| = |\kappa_2^*| = |\kappa_3|,\ |\kappa_3^*| = -\frac{1}{\mu},\ \mu \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}, \tag{2.91}$$

а Френеов репер криве β^* је облика

$$\begin{array}{rcl} T^* &=& \frac{1}{2\sqrt{|\mu|}}(T - 2\mu B_1), \\ N^* &=& sgn(\kappa_1^*)sgn(\kappa_3)B_2, \\ B_1^* &=& sgn(\kappa_1^*)sgn(\kappa_2^*)\dfrac{1}{2\sqrt{|\mu|}}(T + 2\mu B_1), \\ B_2^* &=& sgn(\kappa_2^*)sgn(\kappa_3)N. \end{array}$$

Теорема 2.11. *([37]) Нека је $\beta : I \to \mathbb{R}^4_1$ нул Картанова крива са другом кривином $\kappa_2(s) = constant \neq 0$ и Картановим репером $\{T, N, B_1, B_2\}$. Ако је крива $\beta^* : I^* \to \mathbb{R}^4_1$ дефинисана са*

$$\beta^* = \beta + \frac{1}{2\kappa_2} N$$

Френеова, тада је $\{\beta, \beta^*\}$ пар уопштених Манхајмових кривих.

Докази претходне две теореме су аналогни доказима из случаја (А).

Када базу посматране временске равни чине линеарно независни нул вектори B_1^* и B_2^*, важи следећа теорема.

Теорема 2.12. *([37]) Не постоје уопштене нул Манхајмове криве у простору $\mathbb{R}^4_1$ чија је придружена уопштена Манхајмова крива парцијално нул Френеова крива.*

Доказ. Претпоставимо да постоји уопштена нул Манхајмова крива $\beta : I \to \mathbb{R}^4_1$ чија је придружена уопштена Манхајмова крива $\beta^* : I^* \to \mathbb{R}^4_1$ парцијално нул Френеова крива, тј. просторна крива са псеудо-ортонормираним репером $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$, чије су Френеове формуле

(2.92)
$$\begin{bmatrix} T^{*\prime} \\ N^{*\prime} \\ B_1^{*\prime} \\ B_2^{*\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1^* & 0 & 0 \\ -k_1^* & 0 & k_2^* & 0 \\ 0 & 0 & k_3^* & 0 \\ 0 & -k_2^* & 0 & -k_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B_1^* \\ B_2^* \end{bmatrix},$$

где је трећа кривина $\kappa_3^*(s) = 0$ за свако s. Тада важе услови

(2.93)
$$\langle T^*, T^* \rangle = \langle N^*, N^* \rangle = 1, \ \langle B_1^*, B_1^* \rangle = \langle B_2^*, B_2^* \rangle = 0,$$
$$\langle T^*, N^* \rangle = \langle T^*, B_1^* \rangle = \langle T^*, B_2^* \rangle = \langle N^*, B_1^* \rangle = \langle N^*, B_2^* \rangle = 0, \ \langle B_1^*, B_2^* \rangle = 1.$$

Главна нормала криве β припада временској равни која је разапета векторима B_1^* и B_2^*. Стога, криву β^* параметризујемо на следећи начин

(2.94)
$$\beta^*(f(s)) = \beta(s) + \mu(s) N(s),$$

где је s параметар псеудо дужине лука криве β, $s^* = f(s) = \int_0^s ||\beta^*{}'(t)||\, dt$ параметар дужине лука криве β^* и $f : I \subset \mathbb{R} \to I^* \subset \mathbb{R}$ и μ произвољне глатке функције. Разликујемо два случаја:

(Б.1) $\kappa_2 = 0$.

Диференцирањем релације (2.94) по s, позивајући се на Картанове формуле (2.48) посматране криве β, добијамо

$$T^* f' = T + \mu' N - \mu B_1. \tag{2.95}$$

Скаларним множењем претходне једнакости са $N = pB_1^* + qB_2^*$, налазимо да је $\mu' = 0$, те релација (2.95) гласи

$$T^* f' = T - \mu B_1, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.96}$$

Одавде је

$$\langle T^* f', T^* f' \rangle = f'^2 = -2\mu = constant \neq 0. \tag{2.97}$$

Диференцирањем релације (2.96) по s и користећи релације (2.48), (2.92) и (2.97), добијамо да је

$$\kappa_1^* N^* f'^2 = N - \mu\kappa_3 B_2. \tag{2.98}$$

Скаларним множењем последње једначине вектором $N = pB_1^* + qB_2^*$, долазимо до контрадикције.

(Б.2) $\kappa_2 \neq 0$.

Диференцирањем релације (2.94) по s, позивајући се на Картанове формуле (2.48) криве β, у овом случају добијамо

$$T^* f' = (1 - \mu\kappa_2) T + \mu' N - \mu B_1. \tag{2.99}$$

Скаларним множењем претходне релације са $N = pB_1^* + qB_2^*$, следи да је

$$\mu' = 0. \tag{2.100}$$

Заменом (2.100) у (2.99) налазимо да је

$$T^* f' = (1 - \mu\kappa_2) T - \mu B_1, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.101}$$

Даље, диференцирањем релације (2.101) по s, позивајући се на одговарајуће Картанове формуле (2.48) и Френеове формуле (2.92), добијамо да је

$$\kappa_1^* N^* f'^2 + T^* f'' = (1 - \mu\kappa_2)' T + (1 - 2\mu\kappa_2) N - \mu\kappa_3 B_2. \tag{2.102}$$

Скаларним множењем претходне релације са N, следи да је

$$\kappa_2 = \frac{1}{2\mu}, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{2.103}$$

одакле је

(2.104) $\langle T^* f', T^* f'\rangle = f'^2 = -2\mu(1-\mu\kappa_2) = -\mu = constant, \quad \mu \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}.$

Према томе, $f'' = 0$, што заједно са релацијама (2.103) и (2.104), даје

$$\kappa_1^* N^* = \kappa_3 B_2. \tag{2.105}$$

Последња једначина имплицира да је $\kappa_1^* = \kappa_3$, $N^* = B_2$ или $\kappa_1^* = -\kappa_3$, $N^* = -B_2$. Диференцирањем релације $N^* = \pm B_2$ по s, уз примену одговарајућих Картанових и Френеових формула, добијамо

$$(-\kappa_1^* T^* + \kappa_2^* B_1^*) f' = \mp \kappa_3 T. \tag{2.106}$$

Када последњу једнакост скаларно помножимо са N, налазимо да је

$$q\kappa_2^* f' = 0. \tag{2.107}$$

Како је $f' \neq 0$, следи да је кривина $\kappa_2^* = 0$ или $q = 0$. Међутим, ако би кривина κ_2^* била једнака нули, тада би, из релације (2.106), просторни вектор T^* и нул вектор T били колинеарни, што је немогуће. Са друге стране, уколико је $q = 0$, из исте релације следи да је просторни вектор N колинеаран са нул вектором B_1^*, што такође није могуће, па и у овом случају долазимо до контрадикције. Дакле, не постоји пар уопштених Манхајмових кривих $\{\beta, \beta^*\}$. $\square$

(B) $\{B_1^*, B_2^*\}$ ЈЕ СВЕТЛОСНА РАВАН.

Базу светлосне равни $\{B_1^*, B_2^*\}$ могу чинити просторни вектор B_1^* и нул вектор B_2^*, или нул вектор B_1^* и просторни вектор B_2^*. Ако су B_1^* и B_2^* просторни и нул вектор редом, придружена крива је псеудо нул крива, што доводи до контрадикције. За други избор вектора, имамо следеће тврђење.

Теорема 2.13. *([37]) Нека је $\beta : I \to \mathbb{R}_1^4$ уопштена нул Манхајмова крива и $\beta^* : I^* \to \mathbb{R}_1^4$ њој придружена уопштена Манхајмова крива таква да главна нормала криве β лежи у светлосној равни одређеној нул вектором B_1^* и просторним вектором B_2^*. Тада је β^* нул Картанова крива таква да важи једно од тврђења:*

(1) кривине кривих β и β^* су облика

$$\kappa_2 = \frac{1 - \sinh^2(\frac{\sqrt{2}}{2}s)}{\cosh^2(\frac{\sqrt{2}}{2}s)},\ \kappa_2^* = 0,\ |\kappa_3| = \cosh^6(\frac{\sqrt{2}}{2}s),\ |\kappa_3^*| = \frac{1}{\cosh^2(\frac{\sqrt{2}}{2}s)},$$

а Картанов репер криве β^* је дат једначинама

$$\begin{array}{rcl} T^* &=& \frac{\sinh^2(\frac{\sqrt{2}}{2}s)}{\cosh^4(\frac{\sqrt{2}}{2}s)}T + \frac{\sqrt{2}\sinh(\frac{\sqrt{2}}{2}s)}{\cosh^3(\frac{\sqrt{2}}{2}s)}N - \frac{1}{\cosh^2(\frac{\sqrt{2}}{2}s)}B_1, \\ N^* &=& -sgn(\kappa_3^*)B_2, \\ B_1^* &=& -\cosh^2(\frac{\sqrt{2}}{2}s)T, \\ B_2^* &=& -sgn(\kappa_3^*)\Big(\frac{\sqrt{2}\sinh(\frac{\sqrt{2}}{2}s)}{\cosh(\frac{\sqrt{2}}{2}s)}T + N\Big); \end{array}$$

(2) кривине кривих β и β^* дате су формулама

$$\kappa_2 = \frac{2\mu - \mu'^2}{2\mu^2} \neq 0, \ \kappa_2^* = \frac{X}{\mu\mu'^2 f'^{\,2}} \neq 0, \ |\kappa_3| = \frac{\sqrt{\mu^2 f'^{\,4} - X^2}}{\mu^2},$$

$$|\kappa_3^*| = \frac{\Big(\frac{\mu' X}{2\mu^2 f'^{\,2}}\Big)' + \frac{2(\mu^2 f'^{\,4} - X^2) - \mu X}{2\mu^3 f'^{\,2}} + \Big(\Big(\frac{X}{\mu' f'^{\,2}}\Big)' + \frac{X}{\mu'^{\,2} f'^{\,2}}\Big)\Big(\frac{2\mu - \mu'^{\,2}}{2\mu^2}\Big)}{f'^{\,2}},$$

при чему је

$$X = \mu\mu'' - \mu'^{\,2} - \mu, \quad f' = e^{\int \frac{\mu\mu'' + \mu'^{\,2} - \mu}{\mu\mu'}\, ds}$$

и $\mu(s) \neq constant$. Осим тога, функције X и f задовољавају диференцијалну једначину облика

$$\frac{X^2[\mu^2 f'^{\,4} + \mu\mu' X' - (3\mu\mu'' + 2\mu'^{\,2} - 3\mu)X]^2}{\mu^4 \mu'^{\,2} f'^{\,4}(\mu^2 f'^{\,4} - X^2)}$$

$$+2\Big[\Big(\frac{\mu' X}{2\mu^2 f'^{\,2}}\Big)' + \frac{2(\mu^2 f'^{\,4} - X^2) - \mu X}{2\mu^3 f'^{\,2}}\Big]\Big[\Big(\frac{X}{\mu' f'^{\,2}}\Big)' + \frac{X}{\mu'^{\,2} f'^{\,2}}\Big] = 0,$$

док релација између Картанових репера кривих β и β^* гласи

$$\begin{array}{rcl} T^* &=& \frac{\mu'^2}{2\mu f'}T + \frac{\mu'}{f'}N - \frac{\mu}{f'}B_1, \\ N^* &=& -sgn(\kappa_3^*)\Big(\frac{\mu'(\mu\mu'' - \mu'^{\,2} - \mu)}{2\mu^2 f'^{\,2}}T + \Big(\frac{\mu\mu'' - \mu'^{\,2} - \mu}{\mu' f'^{\,2}}\Big)B_1 \\ &-& \frac{\sqrt{\mu^2 f'^{\,4} - (\mu\mu'' - \mu'^{\,2} - \mu)^2}}{\mu f'^{\,2}}\Big)B_2, \\ B_1^* &=& xT + yB_1 + zB_2, \\ B_2^* &=& -\frac{sgn(\kappa_3^*)}{f'\kappa_3^*}\Big[(x' - z\kappa_3 - \kappa_2^* m f')T + (x + y\kappa_2)N \\ &+& (y' - \kappa_2^* n f')B_1 + (y\kappa_3 + z' - \kappa_2^* p f')B_2\Big], \end{array}$$

при чему је

$$x = -\frac{1}{f'}\Big(\Big(\frac{\mu' X}{2\lambda^2 f'^{\,2}}\Big)' + \frac{2(\mu^2 f'^{\,4} - X^2) - \mu X}{2\mu^3 f'^{\,2}}\Big),$$

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{f'}\Big(\Big(\frac{X}{\mu' f'^{\,2}}\Big)' + \frac{X}{\mu'^{\,2} f'^{\,2}}\Big),\\
z &= -\frac{1}{f'}\Big(\frac{X[\mu^2 f'^{\,4} + \mu\mu' X' - (3\mu\mu'' + 2\mu'^{\,2} - 3\mu)X]}{\mu^2\mu' f'^{\,2}\sqrt{\mu^2 f'^{\,4} - X^2}}\Big),\\
m &= \frac{u' - v\kappa_2}{f'},\quad n = \frac{w' - v}{f'},\quad p = \frac{w\kappa_3}{f'},\\
u &= \frac{1-\mu\kappa_2}{f'},\quad v = \frac{\mu'}{f'},\quad w = -\frac{\mu}{f'}.
\end{aligned}
$$

Узимајући сада у обзир тврђења претходних теорема и чињеницу да је нул Картанова крива нормална крива ако и само ако је њена трећа кривина константна и различита од нуле, долазимо до следећих закључака.

Последица 2.1. *([37]) Свака нул Картанова хелиса у простору $\mathbb{R}^4_1$ је нормална уопштена нул Манхајмова крива чија је придружена уопштена нул Манхајмова крива временска или просторна хелиса.*

Последица 2.2. *([37]) Не постоји нормална уопштена нул Манхајмова крива чија је придружена уопштена нул Манхајмова крива нул Картанова крива.*

2.4 Уопштене парцијално нул Манхајмове криве у простор-времену Минковског

У простор-времену Минковског $\mathbb{R}^4_1$, осим уопштених нул Манхајмових кривих које су описане у поглављу 2.3, постоје и уопштене парцијално нул и псеудо нул Манхајмове криве. Док просторне и временске уопштене Манхајмове криве имају сличне карактеристике као еуклидске уопштене Манхајмове криве, за уопштене парцијално нул и псеудо нул Манхајмове криве се добијају сасвим нове особине које ћемо описати у овом поглављу, а које су објављене у раду [42].

Дефиниција 2.2. ([42]) Парцијално нул Френеова крива $\beta : I \to \mathbb{R}^4_1$ се назива *уопштена парцијално нул Манхајмова крива*, ако постоји нул Картанова или Френеова крива $\beta^* : I^* \to \mathbb{R}^4_1$ и бијекција $\Phi : \beta \to \beta^*$ дата са $\Phi(\beta(s)) = \beta^*(f(s))$ таква да за свако $s \in I$ главна нормала криве β садржи одговарајуће тачке кривих β и β^* и припада равни одређеној векторима прве и друге бинормале криве β^*.

Крива β^* се назива *придружена уопштена Манхајмова крива* криве β, а пар кривих (β, β^*) *уопштени Манхајмов пар.* Посматрамо различите каузалне карактере равни $\{B_1^*, B_2^*\}$. Докази теорема које наводимо аналогни су доказима теорема из поглавља 2.3., па их не излажемо.

(А) $\{B_1^*, B_2^*\}$ ЈЕ ПРОСТОРНА РАВАН.

Базу просторне равни чине међусобно ортогонални просторни вектори. У овом случају, важи следеће тврђење.

Теорема 2.14. *([42]) Не постоји негеодезијска уопштена парцијално нул Манхајмова крива β у простор-времену Минковског чија је негеодезијска придружена уопштена Манхајмова крива β^* временска Френеова крива, или просторна Френеова крива са временским вектором главне нормале.*

(Б) $\{B_1^*, B_2^*\}$ ЈЕ ВРЕМЕНСКА РАВАН.

Сада имамо две могућности, јер базу временске равни могу чинити међусобно ортогонални временски и просторни вектор, или два линеарно независна нул вектора. У односу на те могућности, добијена су следећа тврђења.

Теорема 2.15. *([42]) Не постоји негеодезијска уопштена парцијално нул Манхајмова крива β у простор-времену Минковског, чија је негеодезијска придружена уопштена Манхајмова крива β^* просторна Френеова крива са просторним (временским) вектором прве бинормале и временским (просторним) вектором друге бинормале.*

Теорема 2.16. *([42]) Не постоји негеодезијска уопштена парцијално нул Манхајмова крива β у простор-времену Минковског, чија је негеодезијска придружена уопштена Манхајмова крива β^* парцијално нул Френеова крива.*

(В) $\{B_1^*, B_2^*\}$ ЈЕ СВЕТЛОСНА РАВАН.

Када је реч о светлосној равни, њену базу чине један нул и један просторни вектор. Према томе, ако постоји одговарајућа придружена крива, она је псеудо нул крива или нул Картанова крива. Међутим, теорема која следи тврди да поменуте придружене криве не постоје.

Теорема 2.17. *([42]) Не постоји негеодезијска уопштена парцијално нул Манхајмова крива β у простор-времену Минковског, чија је негеодезијска придружена уопштена Манхајмова крива β^* нул Картанова крива.*

Теорема 2.18. *([42]) Не постоји негеодезијска уопштена парцијално нул Манхајмова крива β у простор-времену Минковског, чија је негеодезијска придружена уопштена Манхајмова крива β^* псеудо нул Френеова крива.*

Уопштене псеудо нул Манхајмове криве се дефинишу аналогно.

Дефиниција 2.3. ([42]) Псеудо нул Френеова крива $\beta : I \to \mathbb{R}^4_1$ се назива *уопштена псеудо нул Манхајмова крива*, ако постоји нул Картанова или Френеова крива $\beta^* : I^* \to \mathbb{R}^4_1$ и бијекција $\Phi : \beta \to \beta^*$ дата са $\Phi(\beta(s)) = \beta^*(f(s))$ таква да за свако $s \in I$ главна нормала криве β садржи одговарајуће тачке кривих β и β^* и припада равни одређеној векторима прве и друге бинормале криве β^*.

С обзиром да вектор главне нормале псеудо нул криве припада временској равни, одговарајућа придружена крива је парцијално нул крива. Међутим, доказано је да такве криве не постоје.

Теорема 2.19. *([42]) Не постоји негеодезијска уопштена псеудо нул Манхајмова крива β у простор-времену Минковског, чија је негеодезијска придружена уопштена Манхајмова крива β^* парцијално нул Френеова крива.*

2.5 Баклундова трансформација и једначина вртложног влакна псеудо нул криве

За разлику од Баклундових трансформација просторних и временских кривих чије добијање је аналогно еуклидском случају, одређивање Баклундове трансформације кривих чији покретни Френеов репер садржи два нул вектора захтева другачији приступ. У општем случају Баклундова трансформација просторне или временске криве није хелиса. Међутим, Баклундова трансформација псеудо нул криве је општем случају псеудо нул хелиса, с обзиром да је прва кривина поменуте криве једнака јединици. Притом псеудо нул круг можемо посматрати као дегенеративни облик псеудо нул хелисе. У овом поглављу наводимо резултате за Баклундове трансформације псеудо нул кривих који су добијени у раду [40].

Теорема 2.20. *([40]) Нека је α псеудо нул хелиса у простору $\mathbb{R}^3_1$ природно параметризована параметром s са торзијом $\tau(s)$ и Френеовим репером $\{T, N, B\}$. Тада је Баклундова трансформација криве α псеудо нул хелиса $\tilde{\alpha}$ са параметарском једначином*

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \rho[cT(s) + \lambda(s)N(s)], \tag{2.108}$$

при чему је ρ произвољна реална константа, $c = \pm 1$, $\tilde{\tau} = \tau$ и $\lambda \neq 0$ диференцијабилна функција која задовољава линеарну диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима

$$\rho\lambda^{''}(s) + 2\rho\lambda^{'}(s)\tau + \rho\lambda(s)\tau^2 + c\rho\tau = 0. \tag{2.109}$$

Доказ. Претпоставимо да је $\alpha(s)$ природно параметризована псеудо нул хелиса чија је торзија $\tau(s) = constant \neq 0$. Диференцирањем релације (2.108) по s и применом Френеових формула посматране криве α, добијамо

$$\tilde{\alpha}^{'} = T + \rho(c + \lambda^{'} + \lambda\tau)N. \tag{2.110}$$

Тада је $\langle \tilde{\alpha}^{'}, \tilde{\alpha}^{'} \rangle = 1$, што имплицира да је s природни параметар криве $\tilde{\alpha}$. Одавде је, даље

$$\tilde{T} = \tilde{\alpha}^{'} = T + \rho(c + \lambda^{'} + \lambda\tau)N. \tag{2.111}$$

Диференцирањем претходне релације по s, долазимо до једнакости

$$\tilde{\alpha}^{''} = (\rho\lambda^{''} + 2\rho\lambda^{'}\tau + \rho\lambda\tau^2 + c\rho\tau + 1)N. \tag{2.112}$$

Имајући у виду услов (2.109), из претходне релације следи

$$\tilde{\alpha}^{''} = N. \tag{2.113}$$

Из чињенице да је $\tilde{\alpha}^{''}$ колинеарно са вектором N, закључујемо да је $\tilde{\alpha}$ псеудо нул крива са вектором главне нормале

$$\tilde{N} = \tilde{\alpha}^{''} = N. \tag{2.114}$$

Диференцирањем претходне релације по s, налазимо да је

$$\tilde{N}^{'} = \tilde{\tau}\tilde{N} = \tau N. \tag{2.115}$$

Одавде увиђамо да је $\tilde{\tau} = \tau = constant$, што значи да је крива $\tilde{\alpha}$ Баклундова трансформација криве α. □

Како је ρ произвољна позитивна реална константа, није тешко закључити да Баклундова трансформација псеудо нул хелисе није јединствена. У специјалном случају, када је торзија $\tau(s) = 0$, посматрана псеудо нул крива је псеудо нул круг.

Теорема 2.21. *([40]) Нека је α псеудо нул круг у простору $\mathbb{R}^3_1$ природно параметризован параметром s са торзијом τ и Френеовим репером $\{T, N, B\}$. Тада је Баклундова трансформација криве α псеудо нул круг чија је параметарска једначина*

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \rho[cT(s) + \lambda(s)N(s)], \tag{2.116}$$

где је ρ произвољна позитивна реална константа, $c = \pm 1$ и

$$\lambda(s) = ps^2 + qs + r, \tag{2.117}$$

$\lambda(s) \neq 0$,p, q ,$r \in \mathbb{R}$.

С друге стране, могу се одредити довољни услови при којима пресликавање φ псеудо нул кривих α и $\tilde{\alpha}$ представља Баклундову трансформацију тих кривих.

Теорема 2.22. *([40]) Нека је $\varphi : \alpha \to \tilde{\alpha}$ трансформација псеудо нул кривих α и $\tilde{\alpha}$ јединичних брзина са Френеовим реперима $\{T, N, B\}$ и $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ у простору $\mathbb{R}^3_1$ која задовољава услове:*

(а) права која спаја одговарајуће тачке α и $\varphi(\alpha) = \tilde{\alpha}$ је пресек ректификационих равни $N^\perp = span\{T, N\}$ и $\tilde{N}^\perp = span\{\tilde{T}, \tilde{N}\}$ кривих α и $\tilde{\alpha}$, редом;

(б) одсечак праве $[\alpha\tilde{\alpha}]$ има константну дужину $\rho \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$;

(в) $\langle \tilde{\alpha} - \alpha, B \rangle = \rho\lambda$, где је $\lambda(s) \neq 0$ диференцијабилна функција која је решење линеарне диференцијалне једначине другог реда

$$\rho\lambda'' + 2\rho\lambda'\tau + \rho\lambda\tau^2 + c\rho\tau = 0, \quad \rho \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \quad c = \pm 1; \tag{2.118}$$

(г) $\langle \tilde{\alpha} - \alpha, \tilde{B} \rangle = \rho\omega$, при чему је $\omega(s) \neq 0$ диференцијабилна функција облика

$$\omega = \lambda - \rho - c\rho\lambda' - c\rho\tau\lambda. \tag{2.119}$$

Тада су α и $\tilde{\alpha}$ псеудо нул хелисе једнаких торзија или псеудо нул кружнице.

У наставку ћемо изложити добијање вектора брзине вртложног влакна који је апроксимиран псеудо нул кривом. Такође ћемо доказати да је еволуциона једначина торзије псеудо нул криве Бургерова једначина.

Претпоставимо да је вектор положаја једнодимензионалног вртложног влакна у нестишљивом флуиду апроксимиран вектором положаја псеудо нул криве $\beta(s, t)$ у простору $\mathbb{R}^3_1$ која је природно параметризована параметром s за свако t, где је t параметар времена. Помоћу локалне индукцијске апроксимације и Тејлоровог развоја криве $\beta(s,t)$, може се доказати да је вектор брзине $v(s,t)$ криве $\beta(s,t)$ дат једначином

$$v = \beta_t = \beta_s \times \beta_{ss}. \tag{2.120}$$

Применом Френеових формула криве $\beta(s,t)$ налазимо да је

$$\beta_t = \beta_s \times \beta_{ss} = T \times T_s = T \times N = N. \tag{2.121}$$

Дакле, вектор брзине вртложног влакна има правац главне нормале $N(s,t)$ криве $\beta(s,t)$. Одредићемо еволуциону једначину кривине и торзије еволуционе криве $\beta(s,t)$. У том циљу, нека је Ω угаони момент криве $\beta(s,t)$ са једначином

$$\Omega = \mu_1 T + \mu_2 N + \mu_3 B, \tag{2.122}$$

где су μ_1, μ_2 и μ_3 произвољне диференцијабилне функције по s и t. Еволуционе једначине Френеовог репера криве β гласе

$$\begin{aligned} T_t &= \Omega \times T, \\ N_t &= \Omega \times N, \\ B_t &= \Omega \times B. \end{aligned} \tag{2.123}$$

Помоћу последње две релације добијамо

$$T_t = -\mu_2 N + \mu_3 B, \tag{2.124}$$

$$N_t = \mu_1 N - \mu_3 T, \tag{2.125}$$

$$B_t = \mu_2 T - \mu_1 B. \tag{2.126}$$

Применом релације (2.121) и услова компатибилности $(\beta_s)_t = (\beta_t)_s$, следи да је

$$T_t = (\beta_s)_t = (\beta_t)_s = N_s = \tau N. \tag{2.127}$$

На основу релација (2.124) и (2.127) налазимо да је

$$\mu_2 = -\tau, \quad \mu_3 = 0. \tag{2.128}$$

Користећи услов компатибилности $T_{st} = T_{ts}$, добијамо

$$N_t = (T_s)_t = (T_t)_s = (\tau N)_s = (\tau_s + \tau^2)N. \tag{2.129}$$

Релације (2.125) и (2.129) имплицирају да је

$$\mu_1 = \tau_s + \tau^2. \tag{2.130}$$

Замењујући вредности за μ_1 и μ_2 у (2.126), налазимо да је

$$B_t = -\tau T - (\tau_s + \tau^2)B. \tag{2.131}$$

Према томе, еволуционе једначине Френеовог репера криве β гласе

$$\begin{array}{rcl} T_t & = & \tau N, \\ N_t & = & (\tau_s + \tau^2)N, \\ B_t & = & -\tau T - (\tau_s + \tau^2)B. \end{array} \tag{2.132}$$

Помоћу релације (2.129), такође налазимо да је

$$\begin{array}{rcl} (N_s)_t & = & (\tau N)_t = \tau_t N + \tau N_t = (\tau_t + \tau\tau_s + \tau^3)N, \\ (N_t)_s & = & ((\tau_s + \tau^2)N)_s = (\tau_{ss} + 3\tau\tau_s + \tau^3)N. \end{array} \tag{2.133}$$

Одавде применом услова компатибилности $(N_s)_t = (N_t)_s$ следи да торзија $\tau(s,t)$ псеудо нул криве β задовољава Бургерову парцијалну диференцијалну једначину

$$\tau_t - 2\tau\tau_s = \tau_{ss}.$$

Поменута једначина је интеграбилна парцијална диференцијална једначина. Тиме је доказано да еволуционе једначине кривине $\kappa(s,t)$ и торзије $\tau(s,t)$ еволуционе псеудо нул криве $\beta(s,t)$ гласе

$$\kappa_t = 0, \quad \tau_t - 2\tau\tau_s = \tau_{ss}.$$

Наводимо теореме које се односе на решења Да Риосове једначине вртложног влакна. То су Хашимото површи које генерише еволуциона крива $x(s,t)$.

Теорема 2.23. *([40]) Нека је S преносна површ у простору $\mathbb{R}^3_1$ чија је директриса псеудо нул крива α са параметризацијом*

$$x(s,t) = \alpha(s) + t(p(s)T(s) + q(s)N(s) + r(s)B(s)),$$

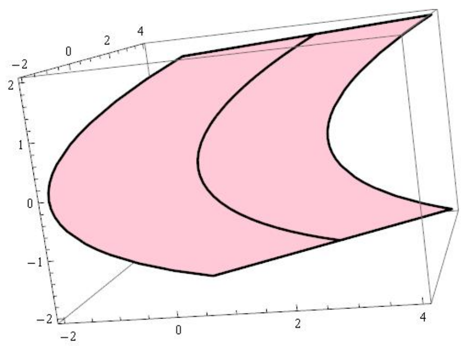
где је $\alpha(s)$ природно параметризована псеудо нул крива и $p(s)$,$q(s)$ и $r(s)$ произвољне диференцијабилне функције. Тада је површ S решење Да Риосове једначине вртложног влакна

$$x_t = x_s \times x_{ss}$$

ако и само ако површ S има параметризацију облика

$$\Phi(s,t) = \alpha(s) + tN(s),$$

а торзија криве α је једнака нули, или је $\tau(s) = 1/(s + c_0)$, $c_0 \in \mathbb{R}$.



Слика 1: Светлосна Хашимото површ

На слици 1 дата је светлосна Хашимото површ, тј. светлосна цилиндрична преносна површ $x(s,t) = \alpha(s) + tN(s)$ која представља решење Да Риосове једначине.

Теорема 2.24. *([40]) Нека је $\alpha(s)$ природно параметризована псеудо нул крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ са Френеовим репером $\{T, N, B\}$ и торзијом $\tau(s)$ и S преносна површ чија је параметризација*

$$x(s,t) = B(s) + t(p(s)T(s) + q(s)N(s) + r(s)B(s)),$$

где су $p(s)$, $q(s)$ и $r(s)$ произвољне диференцијабилне функције. Тада је S решење Да Риосове једначине вртложног влакна

$$x_t = x_s \times x_{ss}$$

ако и само ако је:

(i) $\tau(s) = c_0$, $c_0 \in \mathbb{R}$ и S просторна цилиндрична преносна површ са константним просторним преносима чија параметарска једначина гласи (слика 2)

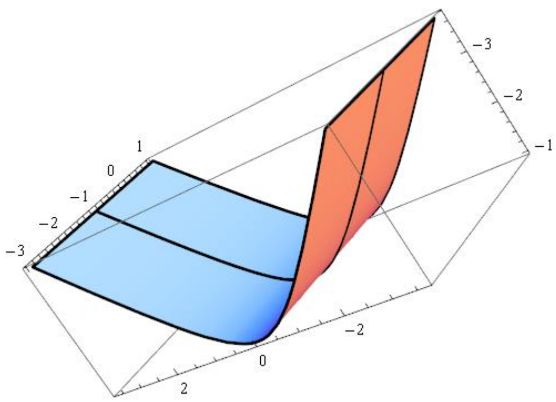
$$x(s,t) = B(s) + t[N(s) - c_0T(s)];$$

(ii) $\tau(s) = -2/(s + c_0)$, $c_0 \in \mathbb{R}$ и S светлосна цилиндрична преносна површ са константним нул преносима, чија је параметризација

$$x(s,t) = B(s) + t\left[\frac{2}{s + c_0}T(s) + N(s) - \frac{2}{(s + c_0)^2}B(s)\right];$$

(iii) $\tau(s) = tg\,(s/2 + c_0)$, $c_0 \in \mathbb{R}$ и S временска цилиндрична преносна површ са параметризацијом

$$x(s,t) = B(s) + t\left[-tg\,(\frac{s}{2} + c_0)T(s) + N(s) - \frac{1}{2\cos^2(\frac{s}{2} + c_0)}B(s)\right].$$



Слика 2: Просторна цилиндрична преносна површ

2.6 Баклундова трансформација и једначина вртложног влакна нул Картанове криве

Баклундове трансформације нул Картанових кривих се уводе аналогно као у случају псеудо нул кривих, јер њихов Картанов репер садржи два нул вектора. Баклундова трансформација нул Картанове криве је општем случају нул Картанова хелиса, с обзиром да је прва кривина поменуте криве једнака јединици. У овом поглављу наводимо резултате за Баклундове трансформације нул Картанових кривих који су добијени у раду [39], при чему разликујемо случај када је торзија нул Картанове криве једнака нули, с обзиром да се тада добија другачија параметраска једначина Баклундове трансформације. Такође дајемо еволуционе једначине кривине и торзије вртложног влакна који је апроксимиран вектором положаја нул Картанове криве. Наредна два тврђења наводимо без доказа.

Теорема 2.25. *([39]) Нека је α нул Картанова хелиса у простору $\mathbb{R}^3_1$ параметризована параметром псеудо дужине лука s, са торзијом $\tau(s) = constant \neq 0$ и Картановим репером $\{T, N, B\}$. Тада је Баклундова трансформација криве α нул Картанова хелиса $\tilde{\alpha}$ са параметарском једначином*

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{2a}{\lambda^2\tau^2 + 2\tau}(cN + \lambda B),$$

при чему је $\tau = \tilde{\tau} = constant \neq 0$, $\lambda \neq 0$ *произвољна реална константа,* $c = \pm 1$ *и* $\lambda^2\tau^2 + 2\tau \neq 0$.

Баклундова трансформација нул Картанове криве α није јединствена. Наиме, за сваки избор реалне константе $\lambda \neq 0$ добијамо бесконачно много међусобно конгруентних Баклундових трансформација криве α.

Теорема 2.26. *([39]) Ако је* α *нул Картанова кубна крива у простору* $\mathbb{R}^3_1$ *параметризована параметром псеудо дужине лука* s*, са Картановим репером* $\{T, N, B\}$*, тада је Баклундова трансформација криве* α *нул Картанова кубна крива* $\tilde{\alpha}$ *чија једначина гласи*

$$\tilde{\alpha} = \alpha + cN + csB,$$

при чему $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Претходне две теореме дају експлицитне параметарске једначине Баклундових трансформација нул Картанових кривих. У следећој теореми се посматра обрнути проблем. Наиме, у њој су дати довољни услови при којима пресликавање φ нул Картанових кривих α и $\tilde{\alpha}$ представља Баклундову трансформацију тих кривих.

Теорема 2.27. *([39]) Нека је* $\varphi : \alpha \to \tilde{\alpha}$ *трансформација нул Картанових кривих* α *и* $\tilde{\alpha}$ *у простору* $\mathbb{R}^3_1$ *параметризованих параметрима псеудо дужине лука* s *и* $\tilde{s}$ *чији су Картанови репери* $\{T, N, B\}$ *и* $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$*, редом, тако да важе услови:*

(i) права која спаја одговарајуће тачке α *и* $\tilde{\alpha}$ *је пресек оскулаторних равни* $B^{\perp} = span\{N, B\}$ *и* $\tilde{B}^{\perp} = span\{\tilde{N}, \tilde{B}\}$*;*

(ii) одсечак праве $[\alpha\tilde{\alpha}]$ *има константну дужину* $\rho > 0$*;*

(iii) $\langle \tilde{\alpha} - \alpha, T \rangle = \langle \tilde{\alpha} - \alpha, \tilde{T} \rangle = c_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Тада су α *и* $\tilde{\alpha}$ *нул Картанове хелисе једнаких торзија*

$$\tau = \tilde{\tau} = -\frac{2\langle B, \tilde{B} \rangle}{\lambda^2 \langle B, \tilde{B} \rangle + 2},$$

где је $\lambda = c_0/\rho$.

Доказ. Уочимо јединични вектор

$$U = \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{||\tilde{\alpha} - \alpha||}. \tag{2.134}$$

Како на основу услова (i) права која спаја тачке α и $\tilde{\alpha}$ припада оскулаторним равнима посматраних кривих, вектор U имаће облик

$$U = mN + \lambda B = n\tilde{N} + \omega\tilde{B}, \tag{2.135}$$

где је $m = \pm 1$, $n = \pm 1$, а $\lambda = \lambda(s)$ и $\omega = \omega(\tilde{s})$ су произвољне диференцијабилне функције. На основу услова (ii), имамо да је $||\tilde{\alpha} - \alpha|| = \rho$, па користећи претходне две релације, добијамо

$$\tilde{\alpha} - \alpha = \rho(mN + \lambda B). \tag{2.136}$$

Отуда је

$$\langle \tilde{\alpha} - \alpha, T \rangle = \langle \rho(mN + \lambda B), T \rangle = \rho\lambda. \tag{2.137}$$

Аналогно је

$$\tilde{\alpha} - \alpha = \rho(n\tilde{N} + \omega\tilde{B}), \tag{2.138}$$

одакле је

$$\langle \tilde{\alpha} - \alpha, \tilde{T} \rangle = \langle \rho(n\tilde{N} + \omega\tilde{B}), \tilde{T} \rangle = \rho\omega. \tag{2.139}$$

Када услов (iii) уврстимо у релације (2.137) и (2.139), добијамо

$$\rho\lambda = \rho\omega = c_0, \tag{2.140}$$

одакле је

$$\lambda(s) = \omega(\tilde{s}) = \frac{c_0}{\rho} = constant \neq 0. \tag{2.141}$$

Диференцирањем једначине (2.136) по s и применом Картанових формула и релације (2.141), налазимо да је

$$\tilde{\alpha}^{'} = (1 - m\rho\tau)T + \rho\lambda\tau N - m\rho B. \tag{2.142}$$

Користећи услов $\langle \tilde{\alpha}^{'}, \tilde{\alpha}^{'} \rangle = 0$ следи да је

$$\rho = \frac{2m}{\lambda^2\tau^2 + 2\tau}. \tag{2.143}$$

Како су ρ, m и λ константе, закључујемо да је

$$\tau = constant \neq 0. \tag{2.144}$$

Диференцирањем релације (2.142) по s и применом Картанових формула и релација (2.141) и (2.144), налазимо да је

$$\tilde{\alpha}'' = (-\rho\lambda\tau^2)T + (1 - 2m\rho\tau)N - \rho\lambda\tau B. \tag{2.145}$$

Скаларним квадрирањем претходне релације добијамо

$$\langle\tilde{\alpha}'', \tilde{\alpha}''\rangle = 1 - 4m\rho\tau + 4\rho^2\tau^2 + 2\rho^2\lambda^2\tau^3, \tag{2.146}$$

Помоћу релација (2.143) и (2.146) следи

$$\langle\tilde{\alpha}'', \tilde{\alpha}''\rangle = 1, \tag{2.147}$$

што значи да је s параметар псеудо дужине лука криве $\tilde{\alpha}$. Отуда је

$$\tilde{T} = \tilde{\alpha}', \quad \tilde{N} = \tilde{\alpha}''. \tag{2.148}$$

Помоћу релација (2.135) и (2.141) добијамо да је

$$\tilde{B} = \frac{1}{\lambda}(mN + \lambda B - n\tilde{N}). \tag{2.149}$$

Помоћу услова $\langle\tilde{N}, \tilde{B}\rangle = 0$ и релација (2.145), (2.148) и (2.149) следи да је

$$m - \rho(2\tau + \tau^2\lambda^2) - n = 0, \tag{2.150}$$

што заједно са релацијом (2.143) даје

$$m = -n = \pm 1. \tag{2.151}$$

Сада релација (2.149) може да се запише у облику

$$\tilde{B} = \frac{1}{\lambda}(mN + \lambda B + m\tilde{N}). \tag{2.152}$$

Диференцирањем последње релације по s и применом Картанових формула, добијамо

$$\tilde{B}' = -\frac{m\tau}{\lambda}T + \tau N - \frac{m}{\lambda}B + \frac{m}{\lambda}\tilde{N}'. \tag{2.153}$$

Скаларним множењем претходног израза са $\tilde{N}$ и користећи релације (2.145) и (2.148), долазимо до релације

$$\langle\tilde{B}', \tilde{N}\rangle = -\frac{m\tau}{\lambda}\langle T, \tilde{N}\rangle + \tau\langle N, \tilde{N}\rangle - \frac{m}{\lambda}\langle B, \tilde{N}\rangle = \tau. \tag{2.154}$$

С друге стране, на основу Картанових формула криве $\tilde{\alpha}$ важи

$$\langle \tilde{B}', \tilde{N} \rangle = \tilde{\tau}. \tag{2.155}$$

Дакле,

$$\tilde{\tau} = \tau. \tag{2.156}$$

Скаларним множењем релације (2.152) са B и применом релација (2.143), (2.145) и (2.148), добијамо

$$\langle B, \tilde{B} \rangle = -\frac{2\tau^2}{\lambda^2\tau^2 + 2\tau}, \tag{2.157}$$

одакле следи да је

$$\tau = -\frac{2\langle B, \tilde{B} \rangle}{\lambda^2\langle B, \tilde{B} \rangle + 2}, \tag{2.158}$$

чиме је доказ комплетиран. □

Следећа теорема даје услове при којима трансформација нул Картанових кубних кривих представља Баклундову трансформацију тих кривих, а њен доказ је аналоган доказу претходне теореме.

Теорема 2.28. *([39]) Нека је $\varphi : \alpha \to \tilde{\alpha}$ трансформација нул Картанових кривих α и $\tilde{\alpha}$ у простору $\mathbb{R}^3_1$ параметризованих параметрима псеудо дужине лука s и $\tilde{s}$ чији су Картанови репери $\{T, N, B\}$ и $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ редом, тако да су испуњени услови:*

(i) права која спаја одговарајуће тачке α и $\tilde{\alpha}$ налази се у пресеку оскулаторних равни $B^{\perp} = span\{N, B\}$ и $\tilde{B}^{\perp} = span\{\tilde{N}, \tilde{B}\}$;

(ii) одсечак праве $[\alpha\tilde{\alpha}]$ има јединичну дужину;

(iii) $\langle \tilde{\alpha} - \alpha, T \rangle = \langle \tilde{\alpha} - \alpha, \tilde{T} \rangle = \langle \tilde{\alpha} - \alpha, N \rangle s = \langle \tilde{\alpha} - \alpha, \tilde{N} \rangle s$.

Тада су α и $\tilde{\alpha}$ нул Картанове кубне криве.

Претпоставимо да је вртложно влакно у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ апроксимирано вектором положаја нул Картанове криве $\gamma(s,t)$. Аналогно доказу који је изложен у поглављу 2.5 за псеудо нул криве, у раду [39] је доказано да вектор брзине $v(s,t) = \gamma_t(s,t)$ нул Картанове криве $\gamma(s,t)$ има правац тангентног вектора $T(s,t)$ те криве. Такође је у истом раду доказано да су еволуционе једначине кривине и торзије нул Картанове криве облика

$$\kappa(s,t) = 1, \quad \tau(s,t) = e^{c_0(s-t)+c_1},$$

при чему $c_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

На основу следећих двеју теорема следи да нул Картанова крива и њен Картанов репер генеришу Хашимото површи које представљају решења једначине вртложног влакна нул Картанове криве.

Теорема 2.29. *([39]) Нека је α нул Картанова крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ са Картановим репером $\{T, N, B\}$ и S преносна површ дата једначином*

$$x(s,t) = T(s) + t(p(s)T(s) + q(s)N(s) + r(s)B(s)),$$

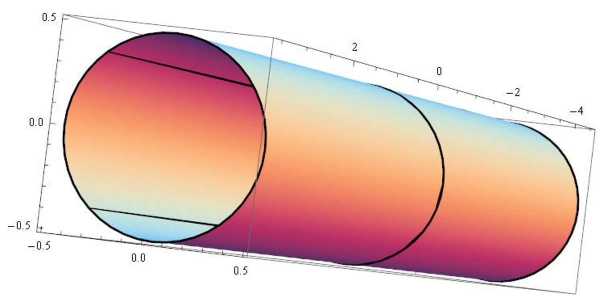
при чему су $p(s)$, $q(s)$ и $r(s)$ произвољне диференцијабилне функције и s параметар псеудо дужине лука криве α. Тада је површ S решење једначине вртложног влакна

$$x_t = x_s \times x_{ss}$$

ако и само ако је:

(i) α нул Каратанова хелиса са торзијом $\tau(s) \neq 0$, а S недегенеративна Хашимото површ са параметарском једначином (слика 3)

$$x(s,t) = T(s) + t(-\tau T(s) + B(s));$$



Слика 3: Недегенеративна Хашимото површ

(ii) α нул Каратанова кубна крива, а S светлосна Хашимото површ са параметарском једначином

$$x(s,t) = T(s) + tB(s).$$

Теорема 2.30. *([39]) Нека је α нул Картанова крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ са Картановим репером $\{T, N, B\}$ и S преносна површ дата једначином*

$$x(s,t) = B(s) + t(p(s)T(s) + q(s)N(s) + r(s)B(s)),$$

при чему су $p(s)$, $q(s)$ и $r(s)$ произвољне диференцијабилне функције и s параметар псеудо дужине лука криве α. Тада је површ S решење једначине вртложног влакна ако и само ако је α нул Каратанова хелиса са торзијом $\tau(s) \neq 0$, а S недегенеративна Хашимото површ са ненул преносима и параметарском једначином

$$x(s,t) = B(s) + t(-\tau^3 T(s) + \tau^2 B(s)).$$

2.7 Закључак

Ректификационе, нормалне и оскулаторне криве у еуклидском простору имају геометријску особину да њихов вектор положаја у односу на изабрани координатни почетак увек лежи у ректификационој, нормалној, или оскулаторној равни редом. B.Y Chen је 2003. године дефинисао ректификационе криве. Такође, B.Y. Chen и F. Dillen су 2005. године открили да постоји веза између ректификационих кривих и Дарбуовог вектора (центроида), који има важну улогу у кинематици и помоћу кога су уведене криве константне прецесије. Ректификационе, нормалне и оскулаторне криве се такође могу посматрати и у простору Минковског. Једно од питања које се наметнуло при њиховом проучавању, било је да ли постоје релације између ове три врсте кривих. У овој глави су изложене релације између ректификационих и нормалних кривих у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$. У односу на изабрани преградни сноп светлосне равни са једначином $x = y$, доказано је да су праве једине ректификационе криве које се пројектују на нормалну криву и одређене су експлицитне параметарске једначине просторне нормалне криве која се пројектује у псеудо нул ректификациону W-криву. Ове релације се даље могу проширити и на остале врсте кривих, као и на просторе већих димензија.

Пар Манхајмових кривих у еуклидском простору први је дефинисао L.P. Eisenhart 1960. године. Њихово уопштење у еуклидском простору $\mathbb{R}^4$ увели су H. Matsuda и S. Yorozu 2009. године. Испитивање уопштених Манхајмових кривих у простор-времену Минковског $\mathbb{R}^4_1$ је доста обимније него у еуклидском простору $\mathbb{R}^4$, због постојања три могућа каузална карактера одговарајуће равни придружене криве која садржи вектор главне нормале полазне криве. У овој глави је дата карактеризација уопштених нул Манхајмових кривих и доказано је да не постоје уопштене псеудо нул и парцијално нул Манхајмове криве. Најзахтевнији део при одређивању карактеризације било је добијање релације између репера полазне и придружене криве. Зависно од тога да ли је раван одређена векторским пољима бинормала придружене уопштене Манхајмове криве просторна или временска, уопштеној нул Манхајмовој кривој придружена је временска, односно просторна крива и експлицитно су одређени репери таквог пара кривих. У случају када је посматрана раван одређена векторским пољима бинормала придружене уопштене Манхајмове криве светлосна, добијено је да је придружена уопштена Манхајмова крива такође нул Картанова крива. У простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ проблем је доста једноставнији. Наиме, у овој глави је доказано да не постоје нул Манхајмове криве, као и да су једине псеудо нул Манхајмове криве са првом кривином $\kappa(s) \neq 0$ псеудо нул кружнице. Манхајмове криве се такође могу испитивати у семи-еуклидском простору $\mathbb{R}^n_\nu$ димензије $n > 4$ и индекса $\nu > 1$.

Баклундова трансформација псеудосферних површи је пресликавање које задовољава одговарајуће услове и има важну улогу у теорији солитона и интеграбилних система. Баклундову трансформацију еуклидских кривих увели су A. Calini и T. Ivey 1998. године као трансформацију која чува торзију тих кривих. У простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$, Баклундове трансформације просторних и временских кривих дефинисали су H. Simsek и M. Özdemir 2016. године. Међутим, поставило се питање да ли постоји крива која представља Баклундову трансформацију псеудо нул криве или нул Картанове криве, као и да ли је могуће одредити услове при којима је пресликавање псеудо нул кривих или нул кривих Баклундова трансформација тих кривих. Баклундова трансформација нул Картанових и псеудо нул кривих, уведена у овој глави, је специфична у односу на Баклундову трансформацију просторних и временских кривих по томе што представља пресликавање конгруентних хелиса, а не кривих чије су кривине различите, а торзије једнаке истој константи. Следећи корак у проучавању ове врсте кривих може бити одређивање Баклундове трансформације криве у еуклидском простору $\mathbb{R}^4$, или у протор-времену Минковског $\mathbb{R}^4_1$.

Једначину вртложног влакна, као модел кретања 1-димензионалног вртложног влакна у идеалном флуиду, увео је R.S. Da Rios 1906. године. Вектор положаја 1-димензионалног вртложног влакна се може апроксимирати кривом $\alpha(s,t)$ која еволвира у складу са једначином вртложног влакна и која је параметризована параметром дужине лука s у сваком тренутку t. Крива која еволвира генерише Хашимото површ, а вектор брзине те криве у еуклидском простору има правац бинормале криве. У простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$, једначина вртложног влакна просторне и временске криве добијена је у радовима G. Muniraje и G. Lakshmanana 2010. године. Код тих кривих, вектор брзине криве има правац њене бинормале. У овој глави је испитано да ли у случају псеудо нул кривих и нул Картанових кривих вектор брзине има исти такав правац, ако оне еволвирају у складу са једначином вртложног влакна. Добијен је интересантан резултат, да вектор брзине псеудо нул криве има правац главне нормале, а вектор брзине нул Картанове криве правац тангенте. Такође су добијене просторне, временске и светлосне Хашимото површи, које представљају решења једначине вртложног влакна псеудо нул и нул Картанове криве у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$. У могућим даљим истраживањима, било би од значаја испитати облик једначине вртложног влакна који је апроксимиран кривом у простор-времену Минковског $\mathbb{R}^4_1$ и одредити параметарске једначине тако насталих Хашимото површи.

3 Специјалне врсте репера у простору Минковског

У овој глави дајемо оригиналне резултате докторске дисертације који су публиковани у раду [43], а који се односе на добијање *Бишопових репера* (*репера који минимално ротирају, релативно паралелних адаптираних репера*) псеудо нул кривих и нул Картанових кривих у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$. У том циљу, користићемо технику која није аналогна еуклидском случају. Наиме, Бишопов репер се у еуклидском случају може добити ротацијом векторских поља главне нормале N и бинормале B око тангентног векторског поља T. Поменута ротација се реализује у нормалној равни криве. Међутим, код псеудо нул кривих ротација помоћу које се добијају векторска поља Бишоповог репера се не реализује у једној равни (Теорема 3.2). Неке од могућих примена Бишопових репера псеудо нул и нул Картанових кривих су класификација Дарбуових хелиса k-типа, Баклундових трансформација, Манхајмових и Бертранових кривих, итд.

3.1 Бишопов репер псеудо нул криве

Најпре ћемо увести Бишопов репер $\{T_1, N_1, N_2\}$ псеудо нул криве у простору $\mathbb{R}^3_1$ који је псеудо ортонормиран, тј. векторска поља тог репера задовољавају услове

$$\begin{aligned} \langle T_1, T_1\rangle = 1, \quad \langle N_1, N_1\rangle = \langle N_2, N_2\rangle = 0, \\ \langle T_1, N_1\rangle = \langle T_1, N_2\rangle = 0, \;\; \langle N_1, N_2\rangle = 1. \end{aligned}$$

Према томе, он садржи један просторни вектор $T(s)$ и два светлосна линеарно независна вектора $N_1(s)$ и $N_2(s)$.

Дефиниција 3.1. ([43]) *Бишопов репер* $\{T_1, N_1, N_2\}$ псеудо нул криве α у простору $\mathbb{R}^3_1$ је позитивно оријентисан псеудо ортонормирани репер који садржи тангентно векторско поље T_1 и два релативно паралелна светлосна нормална векторска поља N_1 и N_2.

Под релативном паралелношћу векторских поља N_1 и N_2 подразумевамо да су нормалне компоненте њихових извода по природном параметру s једнаке нули. Векторско поље N_1' у односу на базу $\{T_1, N_1, N_2\}$ има декомпозицију облика

$$N_1' = aT_1 + bN_1 + cN_2,$$

где су a, b и c произвољне диференцијабилне функције по s. Нормална компонента векторског поља N_1' је векторско поље $bN_1 + cN_2$. Како је нормална компонента векторског поља N_1' једнака нули, следи да је векторско поље N_1' колинеарно са T_1. Исто се закључује и за векторско поље N_2'. Пошто је $\langle N_1, N_1' \rangle = 0$, векторско поље N_1' припада светлосној равни $N_1^{\perp} = span\{T_1, N_1\}$. Векторско поље N_1' у тој равни минимално ротира ако је колинеарно са T_1 или N_1. Када би било колинеарно са N_1, тада би се Френеов и Бишопов репер поклапали, што није могуће. Према томе, векторска поља N_1' и T_1 су колинеарна. Аналогно се доказује да су векторска поља N_2' и T_1 колинеарна. Теорема која следи даје релацију између Френеовог и Бишоповог репера псеудо нул криве, као и једначине Бишоповог репера. На основу те теореме, постоје два могућа Бишопова репера псеудо нул криве у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$.

Теорема 3.1. *([43]) Нека је α природно параметризована псеудо нул крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ са кривином $\kappa(s) = 1$ и торзијом $\tau(s)$. Тада релација између Бишопов репера $\{T_1, N_1, N_2\}$ и Френеовог репера $\{T, N, B\}$ криве α гласи:*

(i)

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\kappa_2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

а једначине Бишоповог репера су облика

$$\begin{bmatrix} T_1' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2 & \kappa_1 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

при чему су $\kappa_1(s) = 0$ и $\kappa_2(s) = \bar{c}e^{\int \tau(s)ds}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ прва и друга Бишопова кривина криве α редом.

(ii)

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_1 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

а једначине Бишоповог репера су облика

$$\begin{bmatrix} T_1' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2 & \kappa_1 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

при чему су $\kappa_1(s) = \bar{c}e^{\int \tau(s)ds}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$ и $\kappa_2(s) = 0$ прва и друга Бишопова кривина криве α редом.

У следећој теореми дата је геометријска интерпретација релације (3.1).

Теорема 3.2. *([43]) Нека је α природно параметризована псеудо нул крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ са Френеовим репером $\{T, N, B\}$, кривином $\kappa(s) = 1$ и торзијом $\tau(s)$. Ако је Бишопов репер $\{T_1, N_1, N_2\}$ ове криве дат релацијом (3.1), при чему је $\kappa_2(s)$ друга Бишопова кривина, тада је:*

(i) $R_\varphi(N) = N_1$, где је R_φ хиперболичка ротација за хиперболички угао $\varphi(s) = -\ln(\kappa_2(s))$ око просторне осе у правцу вектора $e_3 = (0, 0, 1)$;

(ii) $(R_{-\omega} \circ R_{-\theta} \circ R_\omega)(B) = N_2$, где је R_ω ротација за угао $\omega(s) = -\int \kappa_2(s)ds$ око светлосне осе у правцу вектора $e_0 = (1, 1, 0)$, а $R_{-\theta}$ хиперболичка ротација за хиперболички угао $-\theta = -\int \tau(s)ds - \ln \bar{c}$ око просторне осе у правцу вектора $e_3 = (0, 0, 1)$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Доказ. Из Френеових једначина псеудо нул криве α имамо да је

$$N'(s) = \tau(s)N(s).$$

Нека је $N(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, при чему су x_1, x_2 и x_3 неке диференцијабилне функције. Помоћу релације (3.3) добијамо

$$(x_1'(s), x_2'(s), x_3'(s)) = (\tau(s)x_1(s), \tau(s)x_2(s), \tau(s)x_3(s)),$$

одакле је

$$x_1(s) = e^{\int \tau(s)ds + a}, \quad x_2(s) = e^{\int \tau(s)ds + b}, \quad x_3(s) = e^{\int \tau(s)ds + c},$$

где су $a, b, c \in \mathbb{R}$ константе. Како је $\kappa_2(s) = \bar{c}e^{\int \tau(s)ds}$, заменом у претходној релацији налазимо да је

$$x_1(s) = \frac{1}{\bar{c}}\kappa_2(s)e^a, \quad x_2(s) = \frac{1}{\bar{c}}\kappa_2(s)e^b, \quad x_3(s) = \frac{1}{\bar{c}}\kappa_2(s)e^c,$$

где је $\bar{c} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Стога је

$$N(s) = \kappa_2(s)\bar{A},$$

при чему је $\bar{A} = \dfrac{1}{\bar{c}}(e^a, e^b, e^c)$ константан вектор. Пошто је N нул вектор, имамо да је

$$0 = \langle N(s), N(s)\rangle = \langle \kappa_2(s)\bar{A},\, \kappa_2(s)\bar{A}\rangle = \kappa_2^2(s)\langle \bar{A}, \bar{A}\rangle,$$

одакле следи да је $\bar{A}$ константан нул вектор. До на изометрије простора $\mathbb{R}^3_1$ можемо узети да је $\bar{A} = (1, 1, 0)$, па је вектор главне нормале облика

$$N(s) = (\kappa_2(s), \kappa_2(s), 0).$$

Применом хиперболичке ротације R_φ на вектор N за хиперболички угао $\varphi = -\ln(\kappa_2(s))$ око просторне осе у правцу вектора $e_3 = (0,0,1)$, добијамо

$$R_\varphi(N) = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_2 \\ \kappa_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa_2} N = (1,1,0) = N_1,$$

чиме је доказан први део (i) теореме.

Да бисмо доказали други део теореме, користимо релацију $T' = N = (\kappa_2(s), \kappa_2(s), 0)$. Интеграљењем претходне једнакости, налазимо да је јединични тангентни вектор облика

$$T(s) = \left(\int \kappa_2(s)ds, \int \kappa_2(s)ds, 1 \right).$$

С обзиром да Бишопов вектор $N_2(s)$ испуњава услове

$$\langle T_1, N_2 \rangle = \langle N_2, N_2 \rangle = 0, \ \ \langle N_1, N_2 \rangle = 1,$$

следи да је

$$N_2(s) = \left(-\frac{(\int \kappa_2(s)ds)^2}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{(\int \kappa_2(s)ds)^2}{2}, -\int \kappa_2(s)ds \right).$$

Помоћу релације (3.1), налазимо да је вектор бинормале $B(s)$ облика

$$B(s) = \left(-\frac{(\int \kappa_2(s)ds)^2}{2\kappa_2(s)} - \frac{1}{2\kappa_2(s)}, \frac{1}{2\kappa_2(s)} - \frac{(\int \kappa_2(s)ds)^2}{2\kappa_2(s)}, -\frac{\int \kappa_2(s)ds}{\kappa_2(s)} \right).$$

Сада добијени вектор B ротирамо око светлосне осе у правцу вектора N_1 за угао $\omega(s) = -\int \kappa_2(s)ds$ и добијамо

$$R_\omega(B) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\omega^2}{2} & -\frac{\omega^2}{2} & \omega \\ \frac{\omega^2}{2} & 1 - \frac{\omega^2}{2} & \omega \\ \omega & -\omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{(\int \kappa_2(s)ds)^2}{2\kappa_2(s)} - \frac{1}{2\kappa_2(s)} \\ \frac{1}{2\kappa_2(s)} - \frac{(\int \kappa_2(s)ds)^2}{2\kappa_2(s)} \\ -\frac{\int \kappa_2(s)ds}{\kappa_2(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\kappa_2(s)} \\ \frac{1}{2\kappa_2(s)} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

На добијени вектор примењујемо хиперболичку ротацију $R_{-\theta}$ око просторне осе у правцу вектора $e_3 = (0,0,1)$ за хиперболички угао $-\theta(s) = -\int \tau(s)ds - \ln \bar{c}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, одакле је

$$(R_{-\theta} \circ R_\omega)(B) = \begin{bmatrix} \cosh(-\theta) & \sinh(-\theta) & 0 \\ \sinh(-\theta) & \cosh(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\kappa_2(s)} \\ \frac{1}{2\kappa_2(s)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

На крају, добијени нул вектор ротирамо за угао $-\omega(s) = \int \kappa_2(s)ds$ око светлосне осе у правцу вектора N_1 што имплицира да је

$$(R_{-\omega} \circ R_{-\theta} \circ R_{\omega})(B) = \begin{bmatrix} 1+\frac{\omega^2}{2} & -\frac{\omega^2}{2} & -\omega \\ \frac{\omega^2}{2} & 1-\frac{\omega^2}{2} & -\omega \\ -\omega & \omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = N_2,$$

чиме је доказан и други део (ii) теореме. □

Аналогно, геометријска интерпретација релације (3.2) дата је у следећој теореми.

Теорема 3.3. *([43]) Нека је α природно параметризована псеудо нул крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ са Френеовим репером $\{T, N, B\}$, кривином $\kappa(s) = 1$ и торзијом $\tau(s)$. Ако је Бишопов репер $\{T_1, N_1, N_2\}$ ове криве дат релацијом (3.2), при чему је $\kappa_1(s)$ прва Бишопова кривина, тада је:*

(i) $R_\varphi(N) = N_2$, где је R_φ хиперболичка ротација за хиперболички угао $\varphi(s) = -\ln(-\kappa_1(s))$ око просторне осе у правцу вектора $e_3 = (0,0,1)$;

(ii) $(R_{-\omega} \circ R_{-\theta} \circ R_{\omega})(B) = N_1$, где је R_ω ротација за угао $\omega(s) = -\int \kappa_1(s)ds$ око светлосне осе у правцу вектора $e_0 = (1,1,0)$, а $R_{-\theta}$ хиперболичка ротација за хиперболички угао $-\theta = -\int \tau(s)ds - \ln(-\bar{c})$ око просторне осе у правцу вектора $e_3 = (0,0,1)$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$.

3.2 Бишопов репер нул Картанове криве

У овом поглављу ћемо дефинисати и описати Бишопов репер и Бишопове кривине нул Картанове криве у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$. Бишопов репер је ортонормирани репер који садржи један просторни и два светлосна линеарно независна вектора. Посебно ћемо размотрити случај када је друга Картанова кривина нул Картанове криве једнака нули и у том случају закључити да се Картанов репер те криве поклапа са њеним Бишоповим репером.

Дефиниција 3.2. ([43]) *Бишопов репер* $\{T_1,\ N_1,\ N_2\}$ негеодезијске нул Картанове криве α у простору $\mathbb{R}^3_1$ је позитивно оријентисан псеудо ортонормирани репер који садржи тангентно векторско поље T_1, релативно паралелно просторно векторско поље N_1 и релативно паралелно светлосно трансверзално векторско поље N_2.

Векторска поља N_1 и N_2 су *релативно паралелна*, ако су њихови изводи по параметру псеудо дужине лука колинеарни са векторским пољем N_2, што је еквивалентно услову да је нормална компонента векторских поља N_1' и N_2' једнака нули.

Теорема 3.4. *([43]) Нека је α нул Картанова крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ параметризована параметром псеудо дужине лука s, са кривином $\kappa(s) = 1$ и торзијом $\tau(s)$. Тада релација између Бишоповог репера $\{T_1, N_1, N_2\}$ и Картановог репера $\{T, N, B\}$ криве α гласи:*

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 1 & 0 \\ \frac{\kappa_2^2}{2} & -\kappa_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

док су једначине Бишоповог репера облика

$$\begin{bmatrix} T_1' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_2 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

при чему је прва Бишопова кривина $\kappa_1(s) = 1$, а друга Бишопова кривина $\kappa_2(s)$ задовољава Рикатијеву диференцијалну једначину $\kappa_2'(s) = -\dfrac{1}{2}\kappa_2^2(s) - \tau(s)$.

Доказ. Како је α нул Картанова крива са позитивно оријентисаним Картановим репером $\{T, N, B\}$, векторска поља овог репера испуњавају услове

$$\begin{gathered} \langle T, T\rangle = \langle B, B\rangle = 0,\ \langle N, N\rangle = 1, \\ \langle T, B\rangle = -1,\ \langle T, N\rangle = \langle N, B\rangle = 0, \end{gathered} \tag{3.5}$$

и задовољавају релације

$$T \times N = -T,\ \ N \times B = -B,\ \ B \times T = N.$$

Ако је $\{T_1, N_1, N_2\}$ Бишопов репер криве α, тада је

$$\begin{gathered} \langle T_1, T_1\rangle = \langle N_2, N_2\rangle = 0,\ \ \langle N_1, N_1\rangle = 1, \\ \langle T_1, N_1\rangle = \langle N_1, N_2\rangle = 0,\ \ \langle T_1, N_2\rangle = -1. \end{gathered}$$

Такође важе и релације

$$T_1 \times N_1 = -T_1,\ \ N_1 \times N_2 = -N_2,\ \ N_2 \times T_1 = N_1.$$

С обзиром да је N_1 релативно паралелно векторско поље, следи да је

$$N_1' = \kappa_1 N_2, \tag{3.6}$$

при чему је $\kappa_1(s)$ произвољна диференцијабилна функција. Такође је

$$N_2' = -\kappa_2\, N_2, \tag{3.7}$$

где је $\kappa_2(s)$ произвољна диференцијабилна функција. Помоћу релација (3.6) и (3.7) и користећи декомпозицију векторског поља T_1' у односу на Бишопов репер, налазимо да је

$$T_1' = \kappa_2 T_1 + \kappa_1 N_1. \tag{3.8}$$

На основу релација (3.6), (3.7) и (3.8) следи важи релација (3.4). Како је T_1 тангентно нул векторско поље, можемо узети да је

$$T_1 = T. \tag{3.9}$$

Пошто је $\langle T_1,\, N_1\rangle = 0$, биће и $\langle T,\, N_1\rangle = 0$, одакле следи да вектор N_1 припада нормалној равни $T^{\perp}$. Отуда је

$$N_1 = aT + bN, \tag{3.10}$$

где су $a(s)$ и $b(s)$ произвољне диференцијабилне функције. Из услова $\langle N_1, N_1\rangle = 1$ и релације (3.5), добијамо да је $b(s) = \pm 1$. Претпоставимо најпре да је $b(s) = 1$. Тада је

$$N_1 = aT + N. \tag{3.11}$$

Остаје да одредимо векторско поље N_2. Користећи услове (3.5) и (3.6) и релације (3.9) и (3.11), добијамо треће векторско поље Бишоповог репера

$$N_2 = \frac{a^2}{2} T + aN + B. \tag{3.12}$$

Потребно је још да одредимо функцију a. Диференцирањем релације (3.9) по s, добијамо

$$T_1' = T' = N = N_1 - aT = N_1 - aT_1. \tag{3.13}$$

Релације (3.7) и (3.13) имплицирају да је

$$\kappa_1(s) = 1, \quad \kappa_2(s) = -a. \tag{3.14}$$

Диференцирањем релације (3.11) по s, применом Картанових формула криве α и релација (3.6), (3.14) следи да друга Бишопова кривина $\kappa_2(s)$ задовољава Рикатијеву диференцијалну једначину

$$\kappa_2'(s) = -\frac{1}{2}\kappa_2^2(s) \,-\, \tau(s). \tag{3.15}$$

Тиме је доказано да важи релација (3.3). Ако претпоставимо да је $b(s) = -1$, добијамо негативно оријентисан Бишопов репер, што је контрадикција. $\square$

Ако је α нул Картанова кубна крива, тада је њена торзија $\tau(s) = 0$. Заменом $\tau(s) = 0$ у Рикатијевој диференцијалној једначини (3.15) следи да је друга Бишопова кривина $\kappa_2(s) = 0$, или $\kappa_2(s) = 2/s$. На тај начин добијамо следећу последицу претходне теореме, на основу које се може закључити да од свих нул Картанових кривих у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$, једино нул Картанова кубна крива има два Бишопова репера од којих се један поклапа са њеним Картановим репером.

Последица 3.1. *([43]) Нека је $\alpha(s)$ нул Картанова кубна крива у простору $\mathbb{R}^3_1$ параметризована параметром псеудо дужине лука s. Тада релација између Бишоповог репера $\{T_1, N_1, N_2\}$ и Картановог репера $\{T, N, B\}$ криве α гласи:*

(i)

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 1 & 0 \\ \frac{\kappa_2^2}{2} & -\kappa_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

док су једначине Бишоповог репера облика

$$\begin{bmatrix} T_1' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_2 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

при чему је прва Бишопова кривина $\kappa_1(s) = 1$, а друга Бишопова кривина $\kappa_2(s) = \frac{2}{s}$;

(ii)

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

док су једначине Бишоповог репера облика

$$\begin{bmatrix} T_1' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_2 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

при чему је прва Бишопова кривина $\kappa_1(s) = 1$, а друга Бишопова кривина $\kappa_2(s) = 0$.

3.3 Закључак

Релативно паралелан адаптирани репер увео је R.L. Bishop 1975. године као репер који има својство минималне ротације у смислу да садржи два релативно паралелна векторска поља. Такав репер се у еуклидском случају може добити ротацијом Френеовог репера око тангентног векторског поља криве за одговарајући угао. У 3-димензионалном простору Минковског, Бишопов репер просторних и временских кривих су дефинисали M. Özdemir и A. A. Ergin 2008. године.

Међутим, постојало је отворено питање да ли такав репер имају псеудо нул криве и нул Картанове криве, с обзиром да репери поменутих кривих садрже по два нул векторска поља. У овој глави је приказано добијање таквих репера. Прецизније, доказано је да постоје две могућности за Бишопов репер псеудо нул криве и једна могућност за Бишопов репер нул Катранове криве, осим ако је она нул Картанова кубна крива. Наиме, таква крива има два Бишопова репера, од којих се један поклапа са њеним Картановим репером. Добијени репери могу имати широку примену у испитивању геометријских особина псеудо нул и нул Картанових кривих. На пример, Бишопови репери би се могли применити у класификацији псеудо нул и нул Манхајмових кривих, као и за извођење Баклундових трансформација псеудо нул и нул Картанових кривих.

Могуће даље истраживање ових репера се огледа у чињеници да још није испитано да ли постоји репер са својством минималне ротације дуж криве која лежи на површи у простору Минковског. Осим тога, један од праваца даљег истраживања јесте и испитивање могућности да се дефинише Бишопов репер псеудо нул криве и парцијално нул криве у простор-времену Минковског $\mathbb{R}^4_1$.

4 Специјалне врсте површи у простору Минковског

У поглављу 1.12 је напоменуто да раван која садржи профилну криву увијене површи може бити било ког каузалног карактера, а ако је та раван светлосна и увијена површ која настаје је искључиво светлосна. Међутим, у раду [44] је уведена нова класа увијених површи - *увијене површи друге врсте*, које могу бити просторне, временске или светлосне, иако је раван која садржи профилну криву светлосна. У овој глави наводимо оригиналне резултате докторске дисертације који су објављени у раду [44].

4.1 Увијене површи друге врсте

Увијене површи друге врсте које ћемо сада дефинисати, представљају уопштење ротационих површи. Оне се добијају наметањем следећих услова. Профилна крива је равна крива која лежи у светлосној равни, оса око које ротирамо криву припада истој равни, док нам је за другу осу око које ротира светлосна раван неопходно да уочимо нул трансверзални вектор тангентног снопа те равни ([44]).

Како је рестрикција метричког тензора простора $\mathbb{R}^3_1$ на светлосној равни π дегенеративна, *радикални (нул) простор тангентне равни* $T_P\pi$ у свакој тачки $P \in \pi$ је подпростор $Rad(T_P\pi)$ дефинисан са

$$Rad(T_P\pi) = \{v \in T_P\pi \mid \langle u, v\rangle = 0, \forall u \in T_P\pi\}. \tag{4.1}$$

Светлосна раван је тангентна раван светлосног конуса, па садржи једну његову изводницу. Осим нул вектора који представља правац изводнице, светлосна раван не садржи друге светлосне векторе. Нека је v светлосни вектор светлосне равни $T_P\pi$. Тада је $T_P\pi^\perp$ управо вектор v, па је

$$Rad(T_P\pi) = T_P\pi^\perp. \tag{4.2}$$

Ако са $S(T_P\pi)$ означимо векторски сноп комплементаран са $Rad(T_P\pi)$ у $T_P\pi$, тада је

$$T_P\pi = Rad(T_P\pi) \oplus S(T_P\pi), \tag{4.3}$$

при чему је $S(T_P\pi)$ *преградни (скрин) векторски сноп* на π. Преградни векторски сноп чине просторни вектори и он није јединствен. С друге стране, за уочени преградни сноп $S(T_P\pi)$, постоји јединствени светлосни трансверзални векторски сноп $ltr(T_P\pi)$ комплементаран са $T_P\pi$ у $T_P\mathbb{R}^3_1|_\pi$.

Као што је напоменуто у поглављу 1.3, на основу Теореме 1.1 постоји следећа декомпозиција простора $\mathbb{R}^3_1$

$$\mathbb{R}^3_1|_\pi = Rad(T_P\pi) \oplus S(T_P\pi) \oplus ltr(T_P\pi). \tag{4.4}$$

Претходну декомпозицију користимо при увођењу *светлосних површи друге врсте* у простору $\mathbb{R}^3_1$.

Дефиниција 4.1. ([44]) *Увијена површ друге врсте* у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ је ротациона површ добијена ротацијом профилне криве око осе која лежи у светлосној равни π профилне криве, док истовремено раван π ротира око осе чији је правац одређен светлосним трансверзалним вектором $ltr(T_P\pi)$ равни π.

С обзиром да светлосни трансверзални векторски сноп $ltr(T_P\pi)$ светлосне равни π није јединствен, за различите изборе ових снопова добијамо различите параметризације увијених површи друге врсте, што имплицира да добијене површи могу имати произвољан каузални карактер. Ако светлосна раван π има једначину $x = z$, тада је $Rad(T_P\pi) = span\{(1,0,1)\}$, па светлосни трансверзални векторски сноп равни π може имати правац вектора $a_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$, $a_2 = (0,1,-1)$, $a_3 = \left(-1, \sqrt{3}, -2\right)$, итд.

4.2 Класификација светлосних увијених површи друге врсте

У овом поглављу ћемо класификовати светлосне увијене површи друге врсте. У том циљу, претпоставимо да профилна крива α припада светлосној равни π са једначином $x = z$. Тада њена параметарска једначина гласи

$$\alpha(t) = (t, f(t), t), \tag{4.5}$$

где је $f(t)$ произвољна диференцијабилна функција. Размотрићемо две могућности у зависности од каузалног карактера осе l у равни π око које ротира профилна крива α.

(A) Оса l је просторна права.

Изаберимо у равни π просторну праву l која пролази кроз тачку $P(b,0,b)$ у правцу вектора $e_1 = (0,1,0)$. Ротацијом профилне криве α око праве l, добијамо параметризацију површи

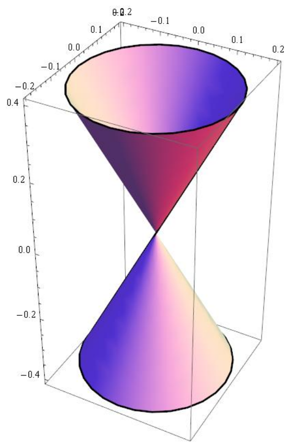
$$\tilde{x}(s,t) = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cosh(cs) & 0 & \sinh(cs) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(cs) & 0 & \cosh(cs) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ f(t) \\ t \end{bmatrix},$$

при чему је $\varphi = cs$, $c \in \mathbb{R}$ Лоренцов угао ротације. Како је за $c = 0$ поменута ротација идентичко пресликавање, претпоставићемо да је $c \neq 0$. Док крива α ротира око осе l, раван π која садржи криву α ротира око осе чији је правац одређен светлосним трансверзалним вектором $a_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$. Како се обе ротације врше истовремено, користићемо исти параметар s. На тај начин, добијамо следећу параметризацију увијене површи друге врсте у матричном облику ([44])

$$x(s,t) = \begin{bmatrix} 1-\frac{s^2}{2} & s & -\frac{s^2}{2} \\ -s & 1 & -s \\ \frac{s^2}{2} & -s & 1+\frac{s^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b + t\cosh(cs) + t\sinh(cs) \\ f(t) \\ b + t\cosh(cs) + t\sinh(cs) \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

У теореми која следи су дате параметарске једначине светлосних увијених површи друге врсте са параметризацијом (4.6).

Теорема 4.1. *([44]) Светлосна увијена површ друге врсте у тродимензионалном простору Минковског са параметризацијом (4.6) је светлосни конус са параметарском једначином (слика 4)*



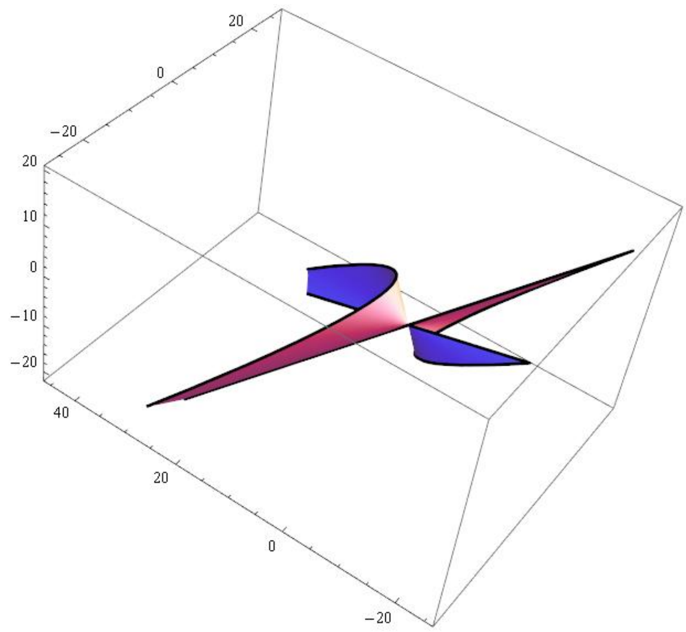
Слика 4: Светлосни конус

$$x(s,t) = t((1-s^2)e^{cs}, -2se^{cs}, (1+s^2)e^{cs}), \tag{4.7}$$

$c \in \mathbb{R}_0$*, или светлосна преносна површ чија је параметризација облика (слика 5)*

$$x(s,t) = ((1-s^2)b, -2bs, (1+s^2)b) + t\left(\frac{s^2-1}{2}, s, -\frac{s^2+1}{2}\right), \tag{4.8}$$

$b \in \mathbb{R}_0$*, чији преноси имају правац бинормале псеудо нул базне криве.*



Слика 5: Светлосна преносна површ са псеудо нул базном кривом

Доказ. Претпоставимо да светлосна увијена површ друге врсте има параметризацију (4.6). Коефицијенти прве фундаменталне форме те површи су облика

$$\begin{array}{rcl} E(s,t) &=& 4(b+te^{cs})^2+4ctf(t)e^{cs}, \\ F(s,t) &=& 2f(t)e^{cs}-2f'(t)(b+te^{cs}), \\ G(s,t) &=& f'^2(t). \end{array}$$

Како је посматрана површ светлосна, из услова $EG-F^2=0$ добија се систем једначина

$$\begin{array}{rcl} 2tf(t)f'(t)-f(t)^2 &=& 0, \\ ctf(t)f'^2(t)+2bf(t)f'(t) &=& 0, \end{array}$$

који има само два решења $f(t)=b=0$ и $f(t)=0, b\neq 0$. Размотрићемо ове две могућности посебно.

(i) Ако је $f(t)=b=0$, добија се параметризација светлосне увијене површи друге врсте облика (4.7).

(ii) Ако је $f(t)=0, b\neq 0$ настаје светлосна преносна површ са параметризацијом

(4.9) $x(s,t)=((1-s^2)b,-2bs,(1+s^2)b)+t((1-s^2)e^{cs},-2se^{cs},(1+s^2)e^{cs}),$

где је $\alpha(s) = ((1-s^2)b, -2bs, (1+s^2)b)$ псеудо нул базна крива. Вектор бинормале те криве гласи

$$B(s) = sgn(b)\left(\frac{s^2-1}{2}, s, -\frac{s^2+1}{2}\right), \tag{4.10}$$

па уочавамо да преноси

$$\beta(s) = e^{cs}\,(1-s^2, -2s, 1+s^2)$$

преносне површи (4.9) имају правац вектора бинормале $B(s)$ криве α. С обзиром на поменуту особину и користећи релације (4.9) и (4.10), добијамо параметризацију облика (4.8). □

(Б) Оса l је светлосна права.

Изаберимо светлосну праву l у равни π која пролази кроз тачку $P(0,b,0)$ у правцу вектора $e_2 = (1,0,1)$. Ротацијом профилне криве α око осе l, добијамо параметризацију

$$\tilde{x}(s,t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\frac{c^2s^2}{2} & cs & \frac{c^2s^2}{2} \\ -cs & 1 & cs \\ -\frac{c^2s^2}{2} & cs & 1+\frac{c^2s^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ f(t) \\ t \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Како је за $c = 0$ поменута ротација идентичко пресликавање, захтеваћемо да је $c \neq 0$. Док крива α ротира око осе l, раван π која садржи профилну криву α истовремено ротира око осе која има правац нул трансверзалног вектора $e_3 = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$. Тиме настаје увијена површ друге врсте чија је параметризација у матричном облику ([44])

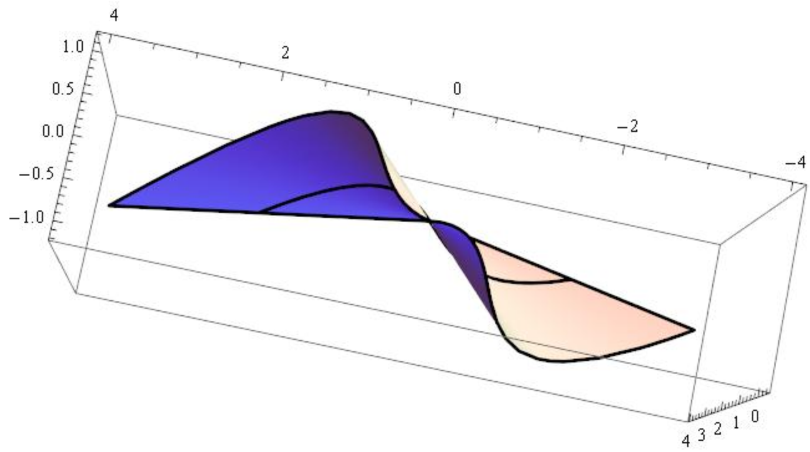
$$x(s,t) = \begin{bmatrix} 1-\frac{s^2}{2} & s & -\frac{s^2}{2} \\ -s & 1 & -s \\ \frac{s^2}{2} & -s & 1+\frac{s^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t+csf(t) \\ b+f(t) \\ t+csf(t) \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Коефицијент $c \neq 0$ имплицира да су брзине ротација у општем случају различите, без обзира на то што се изводе истовремено, због чега су параметризоване истим параметром.

Теорема 4.2. *([44]) Светлосна увијена површ друге врсте у тродимензионалном простору Минковског са параметризацијом (4.12) је светлосна преносна површ облика (слика 6)*

$$x(s,t) = bc(s(s^2-1), 2s^2, s(-1-s^2)) + t(1-s^2, -2s, 1+s^2), \tag{4.13}$$

$b, c \in \mathbb{R}_0$, *са нул преносима и базном кривом која лежи на светлосном конусу.*



Слика 6: Светлосна преносна површ са нул преносима

Доказ. Претпоставимо да светлосна увијена површ друге врсте има параметризацију (4.12). Коефицијенти њене прве фундаменталне форме гласе

$$\begin{aligned} E(s,t) &= \langle x_s, x_s \rangle = 4c^2s^2f(t)^2 + 8cstf(t) + 4t^2 + 4bcf(t) + 4cf(t)^2, \\ F(s,t) &= \langle x_s, x_t \rangle = 2bcsf'(t) + 2b + 2f(t) - 2tf'(t), \\ G(s,t) &= \langle x_t, x_t \rangle = f'^2(t). \end{aligned}$$

Ако је $EG - F^2 = 0$, добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} f(t)^2 f'^2(t) - b^2 f'^2(t) &= 0, \\ 8ctf(t)f'^2(t) - 4bcf'(t)(2b + 2f(t) - 2tf'(t)) &= 0, \\ f'^2(t)(4t^2 + 4bcf(t) + 4cf^2(t)) - (2b + 2f(t) - 2tf'(t))^2 &= 0. \end{aligned}$$

Систем једначина има два решења $f(t) = b = 0$ и $f(t) = -b \neq 0$. Размотрићемо ове две могућности посебно.

(i) Ако је $f(t) = b = 0$, тада се права l и профилна крива α поклапају што је контрадикција.

(i) Ако је $f(t) = -b \neq 0$, заменом ове једнакости у релацији (4.12) добијамо да је светлосна увијена површ друге врсте светлосна преносна површ са параметризацијом (4.13). Базна крива α ове површи са параметризацијом

$$\alpha(s) = bc(s(s^2 - 1), 2s^2, s(-1 - s^2))$$

лежи на светлосном конусу, док су преноси те површи нул вектори. □

4.3 Класификација недегенеративних увијених површи друге врсте

У овом поглављу ћемо навести параметризације недегенеративних увијених површи друге врсте које су равне или минималне и које су добијене у раду [44]. Такође ћемо изложити класификацију недегенеративних увијених површи друге врсте које имају константну Гаусову или средњу кривину. Притом ћемо претпоставити да је параметризација тих површи облика (4.6) или (4.12). Аналогно претходном поглављу 4.2, размотрићемо две могућности за каузални карактер осе ротације l, која може бити просторна или нул права.

(A) Оса ротације l је просторна права.

Теорема 4.3. *([44]) Недегенеративна увијена површ друге врсте у простору* $\mathbb{R}^3_1$ *са параметризацијом (4.6) је равна ако и само ако је део конуса*

$$x(s,t) = t((1-s^2)e^{cs} + ds, d - 2se^{cs}, (1+s^2)e^{cs} - ds), \tag{4.14}$$

чија директриса лежи на псеудосфери $\mathbb{S}^2_1(d)$*,* $d \in \mathbb{R}^+_0$*,* $c \in \mathbb{R}_0$*.*

Доказ. Да бисмо класификовали равне недегенеративне увијене површи друге врсте са параметризацијом (4.6), одредићемо коефицијенте друге фундаменталне форме

$$L(s,t) = \frac{[x_{ss}, x_s, x_t]}{||x_s \times x_t||}, \quad M(s,t) = \frac{[x_{st}, x_s, x_t]}{||x_s \times x_t||}, \quad N(s,t) = \frac{[x_{tt}, x_s, x_t]}{||x_s \times x_t||},$$

те површи. Они су облика

$$\begin{aligned} L(s,t) &= \frac{1}{W(s,t)}[8t^2e^{3cs} + e^{2cs}(8btf(t) + 16bt + 4ct^2f'(t)) \\ &\quad + e^{cs}(8c^2 + 4bctf'(t) + 2c^2tf(t)f'(t))], \\ M(s,t) &= \frac{1}{W(s,t)}\,[e^{2cs}(4f(t) - 4tf'(t)) + e^{cs}(2cf(t)f'(t) - 4bf'(t) \\ &\quad - 2ctf'^2(t))], \\ N(s,t) &= \frac{1}{W(s,t)}\,(-2)f(t)f''(t)e^{cs}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где је норма нормалног вектора површи означена са

$$W(s,t) = ||x_s \times x_t|| = \sqrt{|EG - F^2|} \neq 0.$$

Тада је $LN - M^2 = 0$ ако и само ако важи следећи систем једначина:

$$\begin{aligned}
-16f(t)f''(t)t^2 - (4f(t) - 4tf'(t))^2 &= 0,\\
-2f(t)f''(t)(8ctf(t) + 16bt + 4ct^2f'(t)) - 2(4f(t) &-\\
4tf'(t))(2cf(t)f'(t) - 4bf'(t) - 2ctf'^2(t)) &= 0,\\
-2f(t)f''(t)(8b^2 + 4bctf'(t) + 2c^2tf(t)f'(t)) &-\\
(2cf(t)f'(t) - 4bf'(t) - 2ctf'^2(t))^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Претходни систем једначина има јединствено решење $f(t) = ct, c \neq 0$ и $b = 0$. Заменом $f(t) = ct$ и $b = 0$ у релацији (4.6), добија се параметризација конуса (4.14) са теменом у координатном почетку чија је директриса крива

$$\alpha(s) = ((1 - s^2)e^{cs} + ds, d - 2se^{cs}, (1 + s^2)e^{cs} - ds).$$

која лежи на псеудосфери $\mathbb{S}^2_1(d)$, $d \in \mathbb{R}^+_0$. □

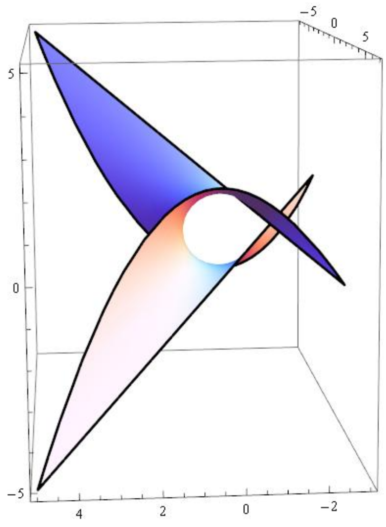
Теорема 4.4. *([44]) Не постоје минималне недегенеративне увијене површи друге врсте са параметризацијом (4.6) у простору* $\mathbb{R}^3_1$.

Доказ. Претпоставимо да постоји минимална недегенеративна увијена површ друге врсте са параметризацијом (4.6). Користећи услов $EN - 2FM + GL = 0$ добија се систем једначина:

$$\begin{aligned}
-8f(t)f''(t)t^2 + 8t^2f'^2(t) - (4f(t) - 4tf'(t))^2 &= 0,\\
-2f(t)f''(t)(8bt + 4ctf(t)) + 8ctf(t)f'^2(t) + 16btf'^2(t) &+\\
4ct^2f'^3(t) - (4f(t) - 4tf'(t))(2cf(t)f'(t) - 8bf'(t) &-\\
2ctf'^2(t)) &= 0.\\
-8f(t)f''(t)b^2 + f'^2(t)(8b^2 + 4bctf'(t) + 2c^2tf(t)f'(t)) &+\\
4bf'(t)(2cf(t)f'(t) - 4bf'(t) - 2ctf'^2(t)) &= 0.
\end{aligned}$$

Претходни систем једначина има јединствено решење $f(t) = 0$. Међутим, тада је $EG - F^2 = 0$, што је контрадикција. □

Такође се могу класификовати и површи са константном Гаусовом кривином.



Слика 7: B-скрол

Теорема 4.5. *([44]) Недегенеративна увијена површ друге врсте у простору $\mathbb{R}^3_1$ са параметризацијом (4.6) има константну Гаусову кривину $K = c_0 \neq 0$ ако и само ако је део:*

(i) B-скрола са параметризацијом (слика 7)

$$x(s,t) = \left(\frac{s}{\sqrt{c_0}} + \frac{\sqrt{c_0}}{2}t(1-s^2), \frac{1}{\sqrt{c_0}} - \sqrt{c_0}st, -\frac{s}{\sqrt{c_0}} + \frac{\sqrt{c_0}}{2}t(1+s^2)\right), \tag{4.16}$$

где $c_0 \in \mathbb{R}^+$;

(ii) псеудосфере $\mathbb{S}^2_1(\frac{1}{\sqrt{c_0}})$ чија параметризација гласи

$$\begin{aligned} x(s,t) \;=\; & ((1-s^2)(b+te^{cs}) + \frac{s}{\sqrt{c_0}}, -2s(b+te^{cs}) + \frac{1}{\sqrt{c_0}}, \\ & (1+s^2)(b+te^{cs}) - \frac{s}{\sqrt{c_0}}), \end{aligned} \tag{4.17}$$

где $c_0 \in \mathbb{R}^+$ и $b \in \mathbb{R}_0$.

Доказ. Претпоставимо да постоји недегенеративна увијена површ друге врсте у простору $\mathbb{R}^3_1$ са параметарском једначином (4.6) и константном Гаусовом кривином $K = c_0 \neq 0$. Тада је

$$LN - M^2 = c_0\lambda(EG - F^2), \tag{4.18}$$

при чему је $\lambda = \langle U, U \rangle$, где је

$$U(s,t) = \frac{x_s \times x_t}{\|x_s \times x_t\|}$$

јединични вектор нормале посматране недегенеративне површи. Коефицијенти E, F и G прве фундаменталне форме су облика

$$\begin{aligned} E(s,t) &= 4(b+te^{cs})^2 + 4ctf(t)e^{cs}, \\ F(s,t) &= 2f(t)e^{cs} - 2f'(t)(b+te^{cs}), \\ G(s,t) &= f'^{\,2}(t). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Како је $\|x_s \times x_t\| = \sqrt{|EG - F^2|}$, то ће λ и $EG - F^2$ бити супротног знака. Имајући ово на уму, користећи коефицијенте друге и прве фундаменталне форме (4.15), (4.19), као и релацију (4.18), долазимо до система једначина:

$$\begin{aligned} 16f(t)f''(t)t^2 + [4f(t) - 4tf'(t)]^2 - c_0[8f(t)f'(t)t + 4f^2(t)]^2 &= 0, \\ -2f(t)f''(t)[8ctf(t) + 16bt + 4ct^2f'(t)] - 2[4f(t) - 4tf'(t)][2cf(t)f'(t) &- \\ 4bf'(t) - 2ctf'^2(t)] + 2c_0[8f(t)f'(t)t + 4f^2(t)][4ctf(t)f'^2(t) &- \\ 8bf(t)f'(t)] &= 0, \\ -2f(t)f''(t)[8b^2 + 4bctf'(t) + 2c^2tf(t)f'(t)] - [2cf(t)f'(t) &- \\ -4bf'(t) - 2ctf'^2(t)]^2 + c_0[4ctf(t)f'^2(t) - 8bf(t)f'(t)]^2 &= 0. \end{aligned}$$

Решење претходног система једначина гласи: (i) $a = 0$ и $f(t) = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$; (ii) $a \neq 0$ и $f(t) = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$.

(i) Ако је $a = 0$ и $f(t) = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$, заменом претходних једнакости у релацији (4.6), добијамо преносну површ облика

$$x(s,t) = \left((1-s^2)te^{cs} + \frac{s}{\sqrt{c_0}}, -2ste^{cs} + \frac{1}{\sqrt{c_0}}, (1+s^2)te^{cs} - \frac{s}{\sqrt{c_0}}\right), \tag{4.20}$$

са нул базном кривом

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{c_0}}, \frac{1}{\sqrt{c_0}}, -\frac{s}{\sqrt{c_0}}\right) \tag{4.21}$$

и нул преносима

$$\beta(s) = e^{cs}(1-s^2, -2s, 1+s^2). \tag{4.22}$$

Нормализујући преносе, можемо узети да је $\langle \alpha'(s), \beta(s) \rangle = 1$. Одатле закључујемо да је преносна површ B-скрол (слика 7).

(ii) Ако је $a \neq 0$ и $f(t) = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$, увијена површ друге врсте има параметризацију облика (4.17) и представља псеудосферу $\mathbb{S}_1^2(\frac{1}{\sqrt{c_0}})$ са центром у координатном почетку. $\square$

Следећа теорема важи за недегенеративне увијене површи друге врсте константне средње кривине које нису минималне и доказује се аналогно претходној, па њен доказ изостављамо.

Теорема 4.6. *([44]) Недегенеративна увијена површ друге врсте $x(s,t)$ у простору $\mathbb{R}_1^3$ са параметризацијом (4.6) има константну средњу кривину $H = h_0 \neq 0$ ако и само ако је део:*

(i) B-скрола са параметризацијом

$$x(s,t) = (\frac{s}{h_0} + \frac{h_0}{2}t(1-s^2), \frac{1}{h_0} - h_0 st, -\frac{s}{h_0} + \frac{h_0}{2}t(1+s^2)),$$

где $h_0 \in \mathbb{R}^+$;

(ii) псеудосфере $\mathbb{S}_1^2(h_0)$ са параметризацијом

$$x(s,t) = ((1-s^2)(b+te^{cs}) + \frac{s}{h_0}, -2s(b+te^{cs}) + \frac{1}{h_0}, (1+s^2)(b+te^{cs}) - \frac{s}{h_0}),$$

где $h_0, c \in \mathbb{R}_0^+$ и $b \in \mathbb{R}_0$.

(Б) Оса ротације l је светлосна права.

У овом случају недегенеративна увијена површ друге врсте има параметризацију облика (4.12). Коефицијенти друге фундаменталне форме те површи гласе

$$\begin{aligned} L(s,t) &= \frac{1}{W(s,t)}[8c^3s^3f^2(t)f'(t) + s^2(16c^2tf(t)f'(t) + 8c^2f^2(t)) \\ &\quad +s(16ctf(t) + 8ct^2f'(t) + 12c^2f^2(t)f'(t) + 8bc^2f(t)f'(t)) \\ &\quad +8t^2 + 4ctf(t)f'(t) + 8bf(t) + 8cf^2(t)], \\ M(s,t) &= \frac{1}{W(s,t)}\,[4bc^2f'^2(t)s^2 + 4cs(f(t)f'(t) - tf'^2(t) \\ &\quad +2bf'(t)) + 4tf'(t) + 2bcf'^2(t) + 4f(t) + 4b], \\ N(s,t) &= -\frac{2}{W(s,t)}f''(t)(b+f(t)), \end{aligned} \tag{4.23}$$

где је са

$$W(s,t) = ||x_s \times x_t|| = \sqrt{|EG - F^2|} \neq 0$$

означена норма нормалног вектора површи који може бити просторни или временски. Аналогно случају (A), може се доказати следећа теорема.

Теорема 4.7. *([44]) Не постоје равне недегенеративне увијене површи друге врсте са параметризацијом (4.12) у простору* $\mathbb{R}^3_1$.

Доказ. Претпоставимо да постоје равне недегенеративне увијене површи друге врсте са параметризацијом (4.12). Користећи релацију (4.23), следи да је $LN - M^2 = 0$ ако и само ако важи следећи систем једначина:

$$\begin{aligned}
16b^2c^4f'^4(t) &= 0,\\
-16c^3f^2(t)f'(t)f''(t)(b+f(t)) - 32bc^3f'^2(t)(f(t)f'(t) &-\\
tf'^2(t) + 2bf'(t)) &= 0,\\
-2f''(t)(b+f(t))(16c^2tf(t)f'(t) + 8c^2f^2(t)) - 16(cf(t)f'(t) &-\\
ctf'^2(t) + 2bcf'(t))^2 - 8bc^2f'^2(t)(-4tf'(t) &+\\
2bcf'^2(t) + 4f(t) + 4b) &= 0,\\
-2f''(t)(b+f(t))(16ctf(t) + 8ct^2f'(t) + 12c^2f^2(t)f'(t) &+\\
8bc^2f(t)f'(t)) - 8(cf(t)f'(t) - tcf'^2(t) &+\\
2bcf'(t))(-4tf'(t) + 2bcf'^2(t) + 4f(t) + 4b) &= 0,\\
-2f''(t)(b+f(t))(8t^2 + 4ctf(t)f'(t) + 8bcf(t) + 8cf^2(t)) &-\\
(-4tf'(t) + 2bcf'^2(t) + 4f(t) + 4b)^2 &= 0.\\
-8f(t)f''(t)t^2 + 8t^2f'^2(t) - (4f(t) - 4tf'(t))^2 &= 0,\\
-2f(t)f''(t)(8bt + 4ctf(t)) + 8ctf(t)f'^2(t) + 16btf'^2(t) &+\\
4ct^2f'^3(t) - (4f(t) - 4tf'(t))(2cf(t)f'(t) - 8bf'(t) &-\\
2ctf'^2(t)) &= 0.\\
-8f(t)f''(t)b^2 + f'^2(t)(8b^2 + 4bctf'(t) + 2c^2tf(t)f'(t)) &+\\
4bf'(t)(2cf(t)f'(t) - 4bf'(t) - 2ctf'^2(t)) &= 0.
\end{aligned}$$

Јединствено решење претходног система једначина гласи $f(t) = -b$, што имплицира да је $x(s,t)$ светлосна површ. Међутим, то је у супротности са претпоставком, па важи тврђење теореме. □

Следећа теорема се слично доказује.

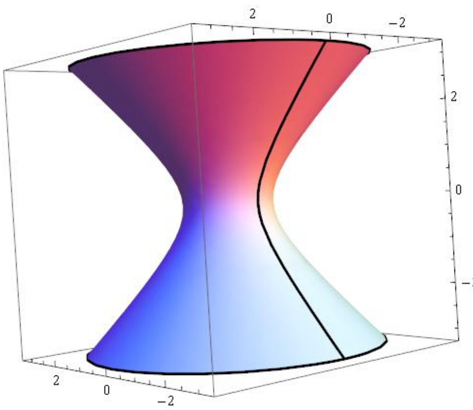
Теорема 4.8. *([44]) Не постоје минималне недегенеративне увијене површи друге врсте са параметризацијом (4.12) у простору* $\mathbb{R}^3_1$.

С друге стане, за површи са константном Гаусовом или средњом кривином важе последња два тврђења.

Теорема 4.9. *([44]) Недегенеративна увијена површ друге врсте у простору $\mathbb{R}^3_1$ са параметризацијом (4.12) има константну Гаусову кривину $K = c_0 \neq 0$ ако и само ако је део псеудосфере $\mathbb{S}^2_1(\frac{\sqrt{c_0}}{c_0})$ са параметарском једначином (слика 8)*

$$\begin{aligned} x(s,t) \;&=\; ((1-s^2)(t+cs(\tfrac{\sqrt{c_0}}{c_0}-b))+s\tfrac{\sqrt{c_0}}{c_0}, \tfrac{\sqrt{c_0}}{c_0}-2s(t+cs(\tfrac{\sqrt{c_0}}{c_0}-b)), \\ &\quad (1+s^2)(t+cs(\tfrac{\sqrt{c_0}}{c_0}-b))-s\tfrac{\sqrt{c_0}}{c_0}), \end{aligned}$$

где $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_0$, $c_0 \in \mathbb{R}^+_0$ и $\sqrt{c_0}/c_0 \neq b$.



Слика 8: Псеудосфера

Теорема 4.10. *([44]) Недегенеративна увијена површ друге врсте у простору $\mathbb{R}^3_1$ са параметризацијом (4.12) има константну средњу кривину $H = h_0 \neq 0$ ако и само ако је део псеудосфере $\mathbb{S}^2_1(\frac{1}{h_0})$ са параметарском једначином*

$$\begin{aligned} x(s,t) \;&=\; ((1-s^2)(t+cs(\tfrac{1}{h_0}-b))+\tfrac{s}{h_0}, \tfrac{1}{h_0}-2s(t+cs(\tfrac{1}{h_0}-b)), \\ &\quad (1+s^2)(t+cs(\tfrac{1}{h_0}-b))-\tfrac{s}{h_0}), \end{aligned}$$

где $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_0$, $h_0 \in \mathbb{R}^+_0$ и $1/h_0 \neq b$.

4.4 Закључак

Увијене површи у еуклидском простору $\mathbb{E}^3$ увео је A. Gray 1998. године. Оне настају када профилна равна крива ротира око тачке у равни криве, при чему та раван ротира око праве која лежи у тој равни. Због тога се увијене површи такође називају и двоструко ротационим површима. У 3-димензионалном простору Минковског, двоструко ротационе површи су дефинисали и класификовали W. Goemans и I.Van de Woestyne 2013. године. Они су доказали да ако профилна крива лежи у светлосној равни, тада су двоструко ротационе површи светлосне равни или светлосни конуси.

Међутим, постојао је отворен проблем да се дефинишу двоструко ротационе површи у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ чија профилна крива лежи у светлосној равни, али тако да оне буду просторне или временске. У овој глави је представљено решење тог проблема - услов да светлосна раван ротира око неке праве из те равни је замењен условом да она ротира око светлосне праве која има правац светлосног трансверзалног вектора. На тај начин, добијене су просторне, временске и светлосне двоструко ротационе површи. Спроведена је детаљна анализа дегенеративних и недегенеративних увијених површи друге врсте. Разматрани су случајеви када је оса ротације светлосна или просторна и одређене су експлицитне параметарске једначине увијених површи друге врсте.

Доказано је да светлосне увијене површи друге врсте у простору Минковског $\mathbb{R}^3_1$ могу бити светлосни конуси или светлосне преносне површи. Такође је доказано да не постоје минималне недегенеративне увијене површи друге врсте. У односу на посматрани светлосни трансверзални векторски сноп, дато је неколико експлицитних параметризација Б-скролова и псеудосфера које представљају недегенеративне увијене површи друге врсте са константном Гаусовом и средњом кривином.

Међутим, светлосни трансверзални векторски сноп није јединствен. Зато би било од интереса наставити даља истраживања у смислу да се промени избор скрин дистрибуције у светлосној равни, што би директно утицало на избор светлосног трансверзалног векторског снопа, као и на параметризацију двоструко ротационе површи чиме би се добиле нове класе тих површи.

Литература

[1] M. Akyiğit, S. Ersoy, I. Özgür, M. Tosun, *Generalized timelike Mannheim curves in Minkowski space-time*, Mathematical Problems in Engineering (2011) Article ID 539378, 19 pages.

[2] R. J. Arms, F. R. Hama, *Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring*, Phys. Fluids 8(4) (1965) 553–559.

[3] A.V. Bäcklund, *Zur Theorie der partiellen differentialgleichungen erster ordnung.* Math. Ann. XVII,285 (1880)

[4] A.V. Bäcklund, *Concerning Surfaces with Constant Negative Curvature*, New era Printing Co., Lancaster (1905)

[5] V. Banica, E. Miot, *Evolution, interaction and collisions of vortex filaments*, Differential and Integral Equations 26 (2012) 25 pages.

[6] M. Barros, A. Ferrandez, P. Lucas, M. Merono, *Solutions of the Betchov-Da Rios soliton equation: a Lorentzian approach*, J. Geom. Phys. 31 (1999) 217–228.

[7] M. Barros, A. Ferrandez, P. Lucas, M. Merono, *Solutions of the Betchov-Da Rios soliton equation in the anti-De Sitter* 3*-space*, New approaches in Nonlinear analysis, Hadronic Press (1999) 51–71.

[8] A. Bejancu, K. Duggal, *Degenerate hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds*, Bull. Inst. Politehnie Iasi Vol. 37 (1991) 13-22.

[9] M. Bekkar, H. Zoubir, *Surfaces of Revolution in the 3-Dimensional Lorentz -Minkowski Space Satisfying* $\Delta x^i = \lambda^i x^i$, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 3 (24) (2008) 1173–1185.

[10] R. Betchov, *On the curvature and torsion of an isolated vortex filament*, J. Fluid Mech. 22 (1965) 471.

[11] L. R. Bishop, *There is more than one way to frame a curve*, Amer. Math. Monthly, 82 (3) (1975) 246–251.

[12] W. B. Bonnor, *Curves with null normals in Minkowski space-time*, A random walk in relativity and cosmology, Wiley Easten Limited (1985) 33–47.

[13] W. B. Bonnor, *Null curves in a Minkowski space-time*, Tensor, 20 (1969) 229–242.

[14] B. Bükcu, M. K. Karacan, *Bishop motion and Bishop Darboux rotation axis of the timelike curve in Minkowski 3-space*, Kochi J. Math. 4 (2009) 109–117.

[15] B. Bükcu, M. K. Karacan, *On the slant helices according to Bishop frame of the timelike curve in Lorentzian space*, Tamkang J. Math. 39 (3) (2008) 255–262.

[16] A. Calini, T. Ivey, *Bäcklund transformations and knots of constant torsion*, J. Knot Theory and Its Ramifications, 7 (1998) 719–746.

[17] B. Y. Chen, F. Dillen, *Rectifying curves as centrodes and extremal curves*, Bull. Inst. Math. Academia Sinica, 33 (2) (2005) 77–90.

[18] B. Y. Chen, *When does the position vector of space curve always lie in its rectifying plane?*, Amer. Math. Monthly, 110 (2003) 147–152.

[19] B. Y. Chen, *Rectifying curves and geodesics on a cone in the Euclidean 3-space*, Tamkang J. Math. 48 (2017) 209-214.

[20] J. H. Choi, T. H. Kang, Y. H. Kim, *Mannheim curves in* 3*-dimensional space forms*, Bull. Korean Math. Soc. 50 (4) (2013) 1099–1108.

[21] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Saddle River, 1976.

[22] L. S. Da Rios, *On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of an shape*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 22 (1906) 117.

[23] Q. Ding, *A note on the NLS and Schrödinger flow of maps*, Phy. Letter A., 248 (1998) 49–56.

[24] Q. Ding, J. Inoguchi, *Schrödinger flows, binormal motion for curves and second AKNS-hierarchies*, Chaos Soliton Frac. 21 (2004) 669–677.

[25] K. L. Duggal, *A Report on Canonical Null curves and Screen Distributions for Lightlike Geometry*, Acta Appl. Math. 95 (2007) 135–149.

[26] K. L. Duggal, D. H. Jin, *Null curves and hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2007.

[27] L. P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces (Dover Edition)*, Dover Publication, 1960.

[28] M. Erdogdu, M. Özdemir, *Geometry of Hasimoto surfaces in Minkowski* 3*-space*, Math. Phys. Anal. Geom. 17 (2014) 169–181.

[29] M. Erdogdu, *Parallel frame of non-lightlike curves in Minkowski space-time*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 12 (2015) 16 pages.

[30] S. Ersoy, M. Tosun, H. Matsuda, *Generalized Mannheim curves in Minkowski space-time* $\mathbb{E}_1^4$, Hokaido Math. J. 41 (3) (2012), 441–461.

[31] A. Ferrandez, A. Gimenez, P. Lucas, *Null generalized helices and the Betchov-Da Rios equation in Lorentz-Minkowski spaces*, Proceedings of the XI Fall Workshop on Geometry and Physics, Madrid (2004) 215–221.

[32] W. Goemans, I. Van de Woestyne, *Constant curvature twisted surfaces in Euclidean and Minkowski 3-Space*, Proceedings of the conference "Riemannian Geometry and Applications to Engineering and Economics-RIGA", Bucharest, Romania (2014) 117–130.

[33] W. Goemans, I. Van de Woestyne, *Twisted Surfaces in Euclidean and Minkowski 3-Space*, Pure and Applied Differential Geometry: 2013, J. Van der Veken, I. Van de Woestyne, L. Verstraelen and L. Vrancken (Editors), Shaker Verlag (Aachen, Germany), 143–151.

[34] W. Goemans, I. Van de Woestyne, *Twisted Surfaces with Null Rotation Axis in Minkowski 3-Space*, Results in Math. 70 (2016) 81–93.

[35] F. Gökcelik, Z. Bozkurt, I. Gök, F. N. Ekmekci, Y. Yayli, *Parallel transport frame in 4-dimensional Euclidean space* E^4, Caspian J. Math. Sci. 3 (2014) 91–103.

[36] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, Florida, 1998.

[37] M. Grbović, K. İlarslan, E. Nešović, *On generalized null Mannheim curves in Minkowski space-time*, Publications de l' Institut Mathematique, Nouvelle serie, tome 99 (133) (2016) 77–98.

[38] M. Grbović, K. İlarslan, E. Nešović, *On null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space*, J. Geom. 105 (1) (2014) 177–183.

[39] M. Grbović, E. Nešović, *On Bäcklund transformation and vortex filament equation for null Cartan curve in Minkowski 3-space*, Math. Phys. Anal. Geom. 23 (2016) 1–15.

[40] M. Grbović, E. Nešović, *On Bäcklund transformation and vortex filament equation for pseudo null curves in Minkowski 3-space*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 13 (6) (2016) 1650077 (14 pages).

[41] M. Grbović, E. Nešović, *On generalized Bishop frame of null Cartan curve in Minkowski 3-space*, Krag. J. Math. 43 (4) (2019) 559–573.

[42] M. Grbović, E. Nešović, *On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time*, Novi Sad J. Math. 46 (1) (2016) 159–170.

[43] M. Grbović, E. Nešović, *On the Bishop frames of pseudo null and null Cartan curves in Minkowski 3-space*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 461 (2018) 219–233.

[44] M. Grbović, E. Nešović, A. Pantić, *On the second kind twisted surfaces in Minkowski 3-space*, IEJG 8 (2) (2015) 9–20.

[45] M. Grbović, E. Nešović, *Some relations between rectifying and normal curve in Minkowski 3-space*, Math. Commun. 17 (2012) 655–664.

[46] N. Gürbüz, *The motion of timelike surfaces in timelike geodesic coordinates*, Int. J. Math. Anal. 4 (2010) 349–356.

[47] N. Gürses, Ö. Bektas, S. Yüce, *Special Smarandache curves in $\mathbb{R}^3_1$*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, Math. Stat. 65 (2) (2016) 143–160.

[48] H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid. Mech. 51 (1972) 477–485.

[49] C. C. Hsiung, *A first Course in Differential Geometry*, International Press, Somerville, 1997.

[50] K. Ilarslan, E. Nešović, M. Petrović - Torgašev, *Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space*, Novi Sad J. Math. 33 (2) (2003) 23–32.

[51] K. Ilarslan, E. Nešović, *Some charactherizations of null, pseudo null and partially null rectifying curves in Minkowski space-time*, Taiwanese J. Math. 12 (5) (2008) 1035–1044.

[52] K. Ilarslan, E. Nešović, *Some relations between normal and rectifying curves in Minkowski space-time*, Int. Electron. J. Geom. 7 (1) (2014) 26–35.

[53] K. Ilarslan, E. Nešović, *Spacelike and timelike normal curves in Minkowski space-time*, Publ. Inst. Math., Nouv. Ser. 85 (99) (2009) 111–118.

[54] K. İlarslan, E. Nešović, *Timelike and null normal curves in Minkowski space* E_1^3, Indian J. pure appl. Math. 35 (7) (2004) 881–888.

[55] K. İlarslan, *Spacelike Normal Curves in Minkowski Space* $\mathbb{E}_1^3$, Turk. J. Math. 29 (1) (2005) 53–63.

[56] T. A. Ivey, *Helices, Hasimoto surfaces and Bäcklund transformations*, Canad. Math. Bull. 43 (4) (2000) 427–439.

[57] M. Jolić, *Krive u prostoru Minkovskog - master rad*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2016.

[58] W. Kühnel, *Differential geometry: curves-surfaces-manifolds*, Braunschweig, Wiesbaden, 1999.

[59] J. W. Lee, *No Null-Helix Mannheim curves in the Minkowski space* E_1^3, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (2011), Article ID 580537, 7 pages.

[60] H. Liu, *Ruled surfaces with lightlike ruling in Minkowski* 3 *-space*, J. Geom. Phys. 59 (2009) 74–78.

[61] H. Liu, F. Wang, *Mannheim partner curves in 3-space,* J. Geom. 88 (2008), 120–126.

[62] R. López, *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz - Minkowski Space*, IEJG 7 (2014), 44–107.

[63] H. Matsuda, S. Yorozu, *On generalized Mannheim curves in Euclidean 4-space* E_1^3*,* Nihonkai Math. J. 20 (2009), 33–56.

[64] G. Muniraja, G. Lakshmanan, *Motion of space curves in 3-dimensional Minkowski space* $\mathbb{R}_1^3$*,* $SO(2,1)$ *spin equation and defocusing nonlinear Schrödinger equation*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 7 (6) (2010), 1043–1049.

[65] S. Z. Nemeth, *Bäcklund transformations of constant torsion curves in 3-dimensional constant curvature spaces*, Italian J. Pure Appl. Math. 7 (2000), 125–138.

[66] S. Z. Nemeth, *Bäcklund transformation of n-dimensional constant torsion curves*, Publ. Math. 53 (1998), 271–279.

[67] E. Nešović, *Diferencijalna geometrija krivih u prostoru Minkovskog*, Doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac, 2002.

[68] E. Nešović, U. Özturk, E. B. Koc Özturk, *On k-type pseudo null Darboux helices in Minkowski* 3*-space*, J. Math. Anal. Appl. 439 (2) (2016), 690–700.

[69] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[70] T. Otsuki, *Differential Geometry*, (In Japanese), Asakura Publishing Co. Ltd., 1961.

[71] M. Özdemir, A. C. Cöken, *Bäcklund transformation for non-lightlike curves in Minkowski 3-space*, Chaos, Solitons & Fractals 42 (2009), 2540–2545.

[72] M. Özdemir, A. A. Ergin, *Parallel frames of non-lightlike curves*, Missouri J. Math. Sci. 20 (2) (2008), 127–137.

[73] M. Özdemir, M. Erdogdu, H. Simsek, A. A. Ergin, *Bäcklund transformation for spacelike curves in the Minkowski space-time*, Kuwait J. Sci. 41 (3) (2014), 63–80.

[74] H. B. Oztekin, M. Ergut, *Null Mannheim curves in the Minkowski 3-space E_1^3*, Turk. J. Math. 35 (2011), 107–114.

[75] C. Rogers, W. K. Schief, *Bäcklund and Darboux transformations, Geometry of Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge University press, Cambridge, 2002.

[76] W. Schief, W. K. Rogers, *Binormal motion of curves of constant curvature and torsion*, Proc. R. Soc. Lond. A. 455 (1999), 3163–3188.

[77] H. Simsek, M. Özdemir, *Bäcklund's theorem for n-dimensional Lorentzian submanifold in the Minkowski space E_1^{2n-1}*, Results Math. 69 (1) (2016), 201–223.

[78] G. Stanilov, G. Slavova, *Classification of some twisted surfaces and power series of such surfaces*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 59 (6) (2006), 593–600.

[79] J. Walrave, *Curves and surfaces in Minkowski space*, Doctoral thesis, K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven, 1995.

[80] Y. C. Wong, *On an explicit characterization of spherical curves*, Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1) (1972), 239–242.

[81] S. Yilmaz, *Position vectors of some special space-like curves according to Bishop frame in Minkowski space* E_1^3, Sci. Magna 5 (1) (2009), 48–50.

[82] S. Yilmaz, M. Turgut, *A new version of Bishop frame and an application to spherical images*, J. Math. Anal. Appl. 371 (2010), 764–776.

Биографија

Милица Грбовић је рођена 23.02.1984. године у Крагујевцу. Основну школу *„Свети Сава”* завршила је као носилац дипломе *„Вук Караџић”* и ученик генерације. *„Прву крагујевачку гимназију”* завршила је 2003. године као носилац дипломе *„Вук Караџић”*. Током основног и гимназијског школовања учествовала је на такмичењима из математике и физике до републичког и савезног нивоа, где је и награђивана. Природно-математички факултет у Крагујевцу, смер математика-информатика, уписала је 2003. године и дипломирала 27. марта 2009. године са просечном оценом $9,46$.

Током студија била је стипендиста Министарства просвете и Министарства науке и технолошког развоја Републике Србије, града Крагујевца из фонда *„Академик Драгослав Срејовић”* и добитник је Eurobank EFG школарине за најбоље студенте Србије у оквиру пројекта *„Инвестирамо у европске вредности”*.

Докторске студије из математике на Природно–математичком факултету у Крагујевцу уписала је 2009. године, а затим 2016. године по новом студијском програму.

Од 2010. до 2013. године радила је као истраживач-приправник, а од 2013. као истраживач-сарданик на Институту за математику и информатику Природно–математичког факултета у Крагујевцу. Од 2014. године запослена је као асистент за ужу научну област Геометрија на истом Институту.

Ангажована је као предавач у Математичкој радионици младих од 2008. године, активан је члан Друштва математичара Србије, а од 2016. је секретар Друштва математичара Србије - Подружница Крагујевац. Такође, била је члан организационог одбора XIV Serbian Mathematical Congress, May 16 - 19, Kragujevac, Serbia, XIX Geometrical Seminar, August 28 - September 4, 2016, Zlatibor, Serbia и на XX Geometrical Seminar, Vrnjačka Banja, Serbia, May 20-24, 2018.

Милица Грбовић активно се бави научно–истраживачким радом из области диференцијалне геометрије. Има објављених пет радова са SCI листе, од чега један категорије M21, један категорије M22 и три категорије M23, као и четири рада у часописима националног значаја и два саопштења са међународних конференција штампана у изводу.

Научни радови објављени у научним часописима међународног значаја (M20)

1. M. Grbović, E. Nešović, *Some relations between rectifying and normal curve in Minkowski 3-space*, Math. Commun. 17 (2012) 655–664. (M23)

2. M. Grbović, K. İlarslan, E. Nešović, *On generalized null Mannheim curves in Minkowski space-time*, Publications de l' Institut Mathematique, Nouvelle serie, tome 99 (133) (2016) 77–98. (M23)

3. M. Grbović, E. Nešović, *On Bäcklund transformation and vortex filament*

equation for null Cartan curve in Minkowski 3-space, Math. Phys. Anal. Geom. 23 (2016) 1–15. **(M22)**

4. M. Grbović, E. Nešović, *On Bäcklund transformation and vortex filament equation for pseudo null curves in Minkowski 3-space*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 13 (6) (2016) 1650077 (14 pages). **(M23)**

5. M. Grbović, E. Nešović, *On the Bishop frames of pseudo null and null Cartan curves in Minkowski 3-space*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 461 (2018) 219–233. **(M21)**

Научни радови објављени у научним часописима националног значаја (М50)

1. M. Grbović, K. İlarslan, E. Nešović, *On null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space*, J. Geom. 105 (1) (2014) 177–183. **(M51)**

2. M. Grbović, E. Nešović, A. Pantić, *On the second kind twisted surfaces in Minkowski 3-space*, IEJG 8 (2) (2015) 9–20. **(M51)**

3. M. Grbović, E. Nešović, *On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time*, Novi Sad J. Math. 46 (1) (2016) 159–170. **(M51)**

4. M. Grbović, E. Nešović, *On generalized Bishop frame of null Cartan curve in Minkowski 3-space*, Krag. J. Math. 43 (4) (2019) 559–573. **(M51)**

Саопштења на међународним научним скуповима штампана у изводу (М34)

1. M. Grbović, *On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time*, XVIII Geometrical Seminar, Vrnjačka Banja, Serbia, May 25-28, 2014

2. M. Grbović, E. Nešović, *On generalized Bishop frame of null Cartan curve in Minkowski 3-space*, XIV Serbian Mathematical Congress, May 16 - 19, Kragujevac, Serbia

MATHEMATICAL COMMUNICATIONS
Math. Commun. **17**(2012), 655–664

Some relations between rectifying and normal curves in Minkowski 3-space

Milica Grbović[1] and Emilija Nešović[1,*]

[1] *Department of Mathematics and Informatics, University of Kragujevac, Radoja Domanovića 12, SRB-34 000 Kragujevac, Serbia*

Received June 6, 2011; accepted June 1, 2012

Abstract. In this paper, we obtain explicit parameter equations of spacelike rectifying curves in E_1^3 whose projection onto spacelike, timelike and lightlike plane of E_1^3 is a normal curve. We also obtain explicit parameter equations of spacelike normal curves in E_1^3 whose projection onto lightlike plane of E_1^3, with respect to a chosen screen distribution, is a rectifying W-curve.

AMS subject classifications: 53C50, 53C40

Key words: Minkowski 3-space, rectifying curve, normal curve, curvature

1. Introduction

In the Euclidean space $\mathbb{E}^3$ there exist three classes of curves, so-called *rectifying, normal and osculating curves* satisfying Cesaro's fixed point condition ([10]) meaning that rectifying, normal and osculating planes of such curves always contain a particular point. If all normal or osculating planes of a curve in $\mathbb{E}^3$ pass through a particular point, then the curve is spherical or planar, respectively. It is also known that if all rectifying planes of a non-planar curve in $\mathbb{E}^3$ pass through a particular point, then the ratio of torsion and curvature of such curve is a non-constant linear function ([1]). Some characterizations of rectifying curves in Minkowski 3-space E_1^3 are given in [7]. In particular, there exists a simple relationship between rectifying curves and Darboux vectors (centrodes), which play some important roles in mechanics, kinematics as well as in differential geometry in defining the curves of constant precession ([2]). Normal curves in Minkowski 3-space are characterized in [5,6]. Spacelike and timelike normal curves in E_1^3 always lie in some quadric and null normal curves in E_1^3 are the null straight lines.

It is a quite interesting problem to obtain explicit parameter equations of rectifying and normal curves in Minkowski 3-space. In order to obtain such equations, it is natural to impose some extra condition on the corresponding curve. In this paper, we obtain explicit parameter equation of spacelike rectifying curve in E_1^3 assuming that orthogonal projection of such curve onto spacelike or timelike plane of E_1^3 is a normal curve. We prove that the straight lines are the only rectifying curves in E_1^3 whose projection onto lightlike plane with respect to a chosen screen distribution is

*Corresponding author. *Email addresses:* grbovic@yahoo.com (M. Grbović), emilija@kg.ac.rs (E. Nešović)

J. Geom.

DOI 10.1007/s00022-013-0205-z

Journal of Geometry

On null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space

Milica Grbović, Kazım İlarslan and Emilija Nešović

Abstract. In this paper, we prove that there are no null Mannheim curves in Minkowski 3-space. We also prove that the only pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space are pseudo null straight lines and pseudo null circles whose Mannheim partner curves are pseudo null straight lines. Finally, we give some examples of pseudo null Mannheim curves in E_1^3.

Mathematics Subject Classification (2010). 53C50, 53C40.

Keywords. Minkowski 3-space, Mannheim curve, curvature.

1. Introduction

In the Euclidean space E^3 a regular smooth curve α is called *Mannheim curve*, if there exist another regular smooth curve α^* such that at the corresponding points of the curves, the principal normal lines of α coincide with the binormal lines of α^*, under bijection $\Phi : \alpha \to \alpha^*$ [2]. Then α^* is called a *Mannheim mate curve* (partner curve) of α and $\{\alpha, \alpha^*\}$ is called a *Mannheim pair* of curves. It is well-known that α is a Mannheim curve in E^3 if and only if its the first and the second curvature satisfy the equality [2]

$$\kappa_1 = a(\kappa_1^2 + \kappa_2^2),$$

for some positive constant a. In Euclidean spaces, Mannheim curves are characterized in [3,6,7] and [8]. In Minkowski spaces, non-null Mannheim partner curves with non-null principal normals are studied in [1] and [6]. Null Mannheim curves in Minkowski 3-space are characterized in [5] and [9].

In this paper, we prove that there are no null Mannheim curves in Minkowski 3-space. Hence characterizations of null Mannheim curves given in [5] and [9] are not valid. We also prove that the only pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space are pseudo null straight lines and pseudo null circles whose

Published online: 25 December 2013

International Electronic Journal of Geometry
Volume 8 No. 2 pp. 9-20 (2015) ©IEJG

ON THE SECOND KIND TWISTED SURFACES IN MINKOWSKI 3-SPACE

MILICA GRBOVIĆ, EMILIJA NEŠOVIĆ AND ANICA PANTIĆ

(Communicated by Kazım İLARSLAN)

Abstract. In this paper, we introduce the notion of the second kind twisted surfaces in Minkowski 3-space. We classify all non-degenerate second kind twisted surfaces in terms of flat, minimal, constant Gaussian and constant mean curvature surfaces, with respect to a chosen lightlike transversal bundle. We also prove that a lightlike second kind twisted surfaces, with respect to a chosen lightlike transversal vector bundle, are the lightcones, the lightlike binormal surfaces over pseudo null base curve and the lightlike ruled surfaces with null rulings whose base curve lies on lightcone.

1. Introduction

In the Euclidean 3-space, *twisted surfaces* are introduced by A. Gray in [5] to generalize the construction used to produce the Möbius strip and the twisted Klein bottle. These surfaces arise by rotating a profile curve lying in its supporting plane π about a fixed point in π (i.e. about an axis spanned by the orthogonal complement of π), while simultaneously the supporting plane π rotates about an axis lying in it [2]. Hence twisted surfaces represent generalizations of the surfaces of the revolution and also can be called a *double rotational surfaces*. In the Euclidean and Minkowski space, twisted surfaces are classified in terms of flat, minimal, constant Gaussian and constant mean curvature surfaces in [2] and [3].

In Minkowski 3-space, the supporting plane π of the twisted surface profile curve can be a spacelike, a timelike or a lightlike. If the supporting plane π is a lightlike, the obtained twisted surfaces are only lightlike (lightlike planes or lightlike cones, see [4] page 5). This situation motivated us to introduce the *second kind twisted surfaces* in Minkowski 3-space, as a new kind of the twisted surfaces, whose profile curve lies in a lightlike supporting plane, but which can be a spacelike, a timelike and a lightlike. More precisely, we define the second kind twisted surfaces as the surfaces obtained by the rotation of a profile curve about an axis in its lightlike supporting plane π, while simultaneously the supporting plane π rotates about an axis spanned by a lightlike transversal vector $ltr(T\pi)$ of π. We classify all non-degenerate second

Date: Received: May 17, 2015 and Accepted: August 12, 2015.
2010 *Mathematics Subject Classification*. 53C50, 53C40.
Key words and phrases. Twisted surface, Lightlike transversal bundle, Lorentzian rotation.

International Journal of Geometric Methods in Modern Physics
Vol. 13, No. 6 (2016) 1650077 (14 pages)

DOI: 10.1142/S0219887816500778

On Bäcklund transformation and vortex filament equation for pseudo null curves in Minkowski 3-space

Milica Grbović* and Emilija Nešović†

Faculty of Science, University of Kragujevac
Department of mathematics and informatics
Kragujevac, Serbia
*milica.grbovic@kg.ac.rs
†nesovickg@sbb.rs

Received 6 January 2016
Accepted 11 March 2016
Published 20 April 2016

In this paper, we introduce Bäcklund transformation of a pseudo null curve in Minkowski 3-space as a transformation mapping a pseudo null helix to another pseudo null helix congruent to the given one. We also give the sufficient conditions for a transformation between two pseudo null curves in the Minkowski 3-space such that these curves have equal constant torsions. By using the Da Rios vortex filament equation, based on localized induction approximation (LIA), we derive the vortex filament equation for a pseudo null curve and prove that the evolution equation for the torsion is the viscous Burger's equation. As an application, we show that pseudo null curves and their Frenet frames generate solutions of the Da Rios vortex filament equation.

Keywords: Bäcklund transformation; vortex filament flow; pseudo null curve.

Mathematics Subject Classification 2010: 53C50, 53Z05

1. Introduction

In classical differential geometry, the Bäcklund transformation $f : \Sigma \to \Sigma'$ maps a pseudospherical surface Σ to a new pseudospherical surface Σ', such that the mentioned surfaces are connected by the tangent line segments of fixed lengths and the angle between the normal vector fields of the surfaces at the corresponding points is constant. Moreover, f takes asymptotic lines on Σ to asymptotic lines on Σ', having equal constant torsions. Hence Bäcklund transformation can be restricted to a transformation mapping constant torsion curve α in $\mathbb{E}^3$ to new curve $\bar{\alpha}$ in $\mathbb{E}^3$, having equal constant torsion $\bar{\tau} = \tau$, whereby the curvatures of α and $\bar{\alpha}$ are related by $\bar{\kappa} = \kappa - 2C \sin\beta$, [1]. In Minkowski 3-space, Bäcklund transformations of non-null curves with non-null Frenet vectors are obtained in [2]. For Bäcklund transformations of curves in hyperbolic 3-space and higher dimensional spaces, we refer to [3–6]. It is known that constant torsion curves have some applications in

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 99(113) (2016), 77–98 DOI: 10.2298/PIM1613077G

ON GENERALIZED NULL MANNHEIM CURVES IN MINKOWSKI SPACE-TIME

Milica Grbović, Kazim Ilarslan, and Emilija Nešović

ABSTRACT. We define generalized null Mannheim curves in Minkowski space-time and characterize them and their generalized Mannheim mate curves in terms of curvature functions, and obtain relations between their frames. We provide examples of such curves.

1. Introduction

In the Euclidean space $\mathbb{E}^3$ there are many associated curves (Bertrand mates, Mannheim mates, spherical images, evolutes, the principal-direction curves, etc.) the frame's vector fields of which satisfy some extra conditions. In particular, Mannheim curves in $\mathbb{E}^3$ are defined by the property that their principal normal lines coincide with the binormal lines of their mate curves at the corresponding points [**4, 7, 11**]. The parameter equation of a Mannheim curve α in $\mathbb{E}^3$ is given in [**4**] by $\alpha(t) = (\int h(t)\sin(t)dt, \int h(t)\cos(t)dt, \int h(t)g(t)dt)$, where $g\colon I \to \mathbb{R}$ is any smooth function and the function $h\colon I \to R$ is given by

$$h = \frac{(1+g^2+g'^2)^3 + (1+g^2)^3(g+g'')^2}{(1+g^2)^{3/2}(1+g^2+g'^2)^{5/2}}.$$

Mannheim curves and their partner curves in 3-dimensional space forms are studied in [**2**]. In the Euclidean 4-space, the notion of Mannheim curves is generalized in [**12**] as follows. A special Frenet curve $\alpha\colon I \to \mathbb{E}^4$ is called a *generalized Mannheim curve*, if there exists a special Frenet curve $\alpha^*\colon I^* \to \mathbb{E}^4$ and a bijection $\phi : \alpha \to \alpha^*$ such that the principal normal line of α at each point of α lies in the plane spanned by the first binormal and the second binormal line of α^*. The generalized spacelike Mannheim curves in Minkowski space-time, the Frenet frame of which contains only non-null vectors, are characterized in [**5**].

In this paper, we define the generalized null Mannheim curves in Minkowski space-time. We obtain the relations between the curvature functions and the frames

2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 53C50; Secondary 53C40.
Key words and phrases: generalized Mannheim curve, null Cartan curve, Minkowski space-time.
Communicated by Stevan Pilipović.

Novi Sad J. Math.
Vol. 46, No. 1, 2016, 159-170

ON GENERALIZED PARTIALLY NULL MANNHEIM CURVES IN MINKOWSKI SPACE-TIME

Milica Grbović[1] and Emilija Nešović[2]

Abstract. In this paper we define generalized partially null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski space-time E_1^4. We prove that there are no non-geodesic generalized partially null Mannheim curves in E_1^4, by considering the cases when the corresponding mate curve is a spacelike, timelike, null Cartan, partially null or pseudo null Frenet curve. We also answer the question: "Can a partially null Frenet curve be a generalized mate curve of the generalized pseudo null Mannheim curve in Minkowski space-time?"

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 53C50; 53C40

Key words and phrases: generalized Mannheim curves; partially null curves; Minkowski space-time

1. Introduction

In Euclidean 3-space there are many associated curves such as Bertrand mates ([5]), Mannheim mates ([9]), spherical images, evolutes, involutes, the principal-direction curves ([2]), etc., whose frame's vector fields satisfy some extra conditions. Mannheim curves in the Euclidean 3-space were discovered by A. Mannheim in 1887. They are defined as the curves having the property that their principal normal lines coincide with binormal lines of their mate curves at the corresponding points. It is well-known that a regular smooth curve in E^3 is a Mannheim curve if and only if its curvature functions κ and τ satisfy the relation $\kappa = a(\kappa^2 + \tau^2)$, for some positive constant a. Some characterizations of Mannheim curves in the Euclidean 3-space and Minkowski 3-space can be found in [7, 9].
Parameter equation of the Mannheim curve in E^3 is given by ([4])

$$\alpha(t) = (\int h(t)\sin(t)dt, \int h(t)\cos(t)dt, \int h(t)g(t)dt),$$

where $g : I \to R$ is any smooth function and the function $h : I \to R$ is given by

$$h = \frac{(1+g^2+g'^2)^3 + (1+g^2)^3(g+g'')^2}{(1+g^2)^{\frac{3}{2}}(1+g^2+g'^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

[1]Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Kragujevac, e-mail:milica_grbovic@yahoo.com

[2]Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Kragujevac, e-mail:nesovickg@sbb.rs

Math Phys Anal Geom (2016) 19:23
DOI 10.1007/s11040-016-9231-z

On Bäcklund transformation and vortex filament equation for null Cartan curve in Minkowski 3-space

Milica Grbović[1] · Emilija Nešović[1]

Received: 26 January 2016 / Accepted: 17 October 2016

Abstract In this paper we introduce Bäcklund transformation of a null Cartan curve in Minkowski 3-space as a transformation which maps a null Cartan helix to another null Cartan helix, congruent to the given one. We also give the sufficient conditions for a transformation between two null Cartan curves in the Minkowski 3-space such that these curves have equal constant torsions. By using the Da Rios vortex filament equation, based on localized induction approximation, we derive the vortex filament equation for a null Cartan curve and obtain evolution equation for it's torsion. As an application, we show that Cartan's frame vectors generate new solutions of the Da Rios vortex filament equation.

Keywords Bäcklund transformation · Vortex filament flow · Null Cartan curve

Mathematics Subject Classification 2010 53B30 · 53Z05 · 53C40

1 Introduction

Bäcklund transformations originated from studies of A.V. Bäcklund and S. Lie [2–4, 16, 17] and they play an important role in the theory of solitons and integrable systems. In 1883, Bäcklund proved that two focal surfaces Σ and $\bar{\Sigma}$ of the

✉ Emilija Nešović
nesovickg@sbb.rs

Milica Grbović
milica.grbovic@kg.ac.rs

1 Department of Mathematics and Informatics, University of Kragujevac, Faculty of Science, Radoja Domanovića 12, 34000, Kragujevac, Serbia

Published online: 17 November 2016

J. Math. Anal. Appl. 461 (2018) 219–233

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Mathematical Analysis and Applications

www.elsevier.com/locate/jmaa

On the Bishop frames of pseudo null and null Cartan curves in Minkowski 3-space

Milica Grbović, Emilija Nešović *

University of Kragujevac, Faculty of Science, Department of Mathematics and Informatics, Radoja Domanovića 12, 34000 Kragujevac, Serbia

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 7 February 2017
Available online 11 January 2018
Submitted by H.R. Parks

Dedicated to the memory of Acad. Prof. Dr. Mileva Prvanović

Keywords:
Bishop frame
Frenet frame
Cartan frame
Pseudo null curve
Null Cartan curve

A B S T R A C T

In this paper, we derive the Bishop frames of the pseudo null curve and show that its normal Bishop vectors N_1 and N_2 can be obtained by applying the hyperbolic rotation and the composition of three rotations about two lightlike and one spacelike axis to the Frenet vectors N and B respectively. We also derive Bishop frame of the null Cartan curve and show that among all null Cartan curves in $\mathbb{E}_1^3$, only the null Cartan cubic has two Bishop frames, one of which coincides with its Cartan frame. As an application, we obtain some solutions of the Da Rios vortex filament equation in terms of the Bishop frames of the pseudo null curves and null Cartan cubic.

1. Introduction

The *Bishop frame* or *relatively parallel adapted frame* $\{T, N_1, N_2\}$ of a regular curve in Euclidean 3-space is introduced by R.L. Bishop in [3]. It contains the tangential vector field T and two normal vector fields N_1 and N_2, which can be obtained by rotating the Frenet vectors N and B in the normal plane $T^{\perp}$ of the curve, in such a way that they become *relatively parallel.* This means that their derivatives N_1' and N_2' with respect to the arc-length parameter s of the curve are collinear with the tangential vector field T. Hence N_1' and N_2' make minimal rotation in the planes $N_1^{\perp}$ and $N_2^{\perp}$, respectively. For this reason, the Bishop frame is also known as the frame with *minimal rotation property.* Such frame is well defined even in the points where the Frenet curvature κ of the curve vanishes, which is not the case with the Frenet frame. The Frenet equations according to the Bishop frame in $\mathbb{E}^3$ have the form ([3])

* Corresponding author.
E-mail addresses: milica.grbovic@kg.ac.rs (M. Grbović), nesovickg@sbb.rs (E. Nešović).

https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.01.014
0022-247X/

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Милица Грбовић, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Крагујевцу, 4.3.2020. године,

Милица Грбовић

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Милица Грбовић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

$\boxed{6)}$ Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 4.3.2020. године,

Милица Грбовић

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/