

ПРИЈЕМАНО: 28.06.2021			
Сл. ред.	Бр. у к.	Датум одобрења	
05	310/28	-	-

Наставно-научном већу
Природно-математичког факултета

Већу за природно-математичке науке
Универзитета у Крагујевцу

ИЗВЕШТАЈ КОМИСИЈЕ О ОЦЕНИ УРАЂЕНЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ/ ДОКТОРСКОГ УМЕНЧКОГ ПРОЈЕКТА

На седници Наставно-научног већа, Природно-математичког факултета у Крагујевцу одржаној 28.04.2021. године (бр. 230/VIII-1) и на седници Већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу одржаној 12.05.2021. (бр. IV-01-348/9) одређени смо за чланове Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације кандидата **Невене Васовић** под насловом

„Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа“.

Невена Васовић је поднела рукопис своје докторске дисертације Наставно-научном већу Природно-математичког факултета на оцену. Чланови Комисије су детаљно прегледали рукопис, проценили квалитет дисертације и указали кандидату на потребне корекције. Кандидат је усвојио све предлоге Комисије и уградио их у финалну верзију чиме су се стекли сви услови да Комисија поднесе следећи **Извештај**:

1. Опис докторске дисертације

Теорије Ортогоналних полинома, Гаусових квадратурних формула и њихових модификација једне су од најважнијих области истраживања у Нумеричкој анализи и теорији апроксимације. Докторска дисертација **„Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа“**, припада области Нумеричке анализе и теорије апроксимације.

Текст рукописа дисертације написан је на 84 стране и састоји се од Сажетка на српском и енглеском језику, Предговора, Листе слика и Листе табела, текста дисертације који је подељен у пет глава, одељка Библиографија који садржи списак од 73 библиографске јединице и Прилога А. У рукопису дисертације се налази 18 слика и 5 табела. Саставни делови дисертације су и Биографија кандидата, као и насловне страна радова у којима су објављени резултати дисертације, а који су публиковани или прихваћени за штампу у врхунским међународним часописима.

Прве две главе су прегледног карактера и представљају теоријску основу истраживања.

Глава 1 Ортогонални полиноми на реалној правој. У првој глави је дат кратак преглед основних резултата теорије ортогоналних полинома на реалној правој. Дате су и

основне особине класичних ортогоналних полинома. На крају ове главе дати су методи за конструкцију ортогоналних полинома.

Глава 2 Квадратурне формуле. У другој глави дат је кратак осврт на интерполационе процесе који се користе приликом нумеричке интеграције, а посебно су описане интерполационе квадратурне формуле и међу њима најбитније Гаусове квадратурне формуле.

У главама 3, 4 и 5 дати су оригинални резултати који су публиковани или прихваћени за штампу.

Глава 3 Полиномске модификације Чебишевљевих мера прве и друге врсте. У овој глави дате су неке особине полинома ортогоналних у односу на модификоване класичне Чебишевљеве мере прве и друге врсте. Ови проблеми третирану су у симболичком облику. Дати су коефицијенти трочлане рекурентне релације и диференцио-диференцијалне особине одговарајућих класа ортогоналних полинома.

Глава 4 Електростатичка интерпретација нула ортогоналних полинома. *Mathematica* пакет *RationalExpressionsES.m*. У овој глави најпре је дат преглед познатих резултата електростатичке интерпретације нула Јакобијевих полинома. Полазећи од претпоставке да се ради о логаритамском потенцијалу дата је електростатичка интерпретација нула полинома ортогоналних у односу на Чебишевљеву меру прве врсте.

У овој глави дате су неке примене функција имплементираних у софтверу *Mathematica* у проблемима конструктивне теорије ортогоналних полинома.

Глава 5 Ортогонални полиноми и генерализоване Гаус-Рисове квадратурне формуле. У овој глави проучаване су модификоване Гаусове квадратуре и одговарајући ортогонални полиноми. Дат је нумерички стабилан алгоритам за конструкцију модификованих Гаусових квадратурних формула, тј. генерализованих Гаус-Рисових квадратурних формула, што је даље омогућило нумеричку конструкцију одговарајуће класе ортогоналних полинома.

Прилог А. *Mathematica* код у пакету *RationalExpressionsES.m*

2. Значај и допринос докторске дисертације са становишта актуелног стања у Нумеричкој анализи и теорији апроксимације, посебно у теорији Ортогоналних полинома и Гаусових квадратурних формула

Докторска дисертација „Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа“, припада научној области Математика, односно ужој научној области Нумеричка анализа и теорија апроксимације. Ортогонали полиноми у великој мери прожимају нумеричку анализу и они се по први пут јављају као имениоци у верижним разломцима у другој половини 19. века. Њихова важна примена је у конструкцији квадратурних формула максималног или скоро максималног степена алгебарске тачности за интеграле са позитивном мером. Како је теорија класичних ортогоналних полинома (Лежандрови, Лагерови, Ермитови и други) у доброј мери развијена, шира класа полинома је и даље непознаница, као и разни аспекти њене примене.

Један од најважнијих проблема конструктивне теорије ортогоналних полинома јесте одређивање коефицијената трочлане рекурентне релације за неklasичне тежинске функције, као и конструкција коефицијената трочлане рекурентне релације за модификоване мере, добијене најчешће производом оригиналне мере са позитивним рационалним фактором $\frac{u(x)}{v(x)}$, где су $u(x)$ и $v(x)$ полиноми. Први резултати у овој области долазе од Кристофела и његовог рада из 1858., који је разматрао случај са само полиномском модификацијом мере ($v(x) = 1$) и изразио нове ортогоналне полиноме помножене са $u(x)$, у облику детерминанте, као линеарну комбинацију полазних ортогоналних полинома $\pi_{n+i}, i = 0, 1, \dots, l$. Сто година касније Уваров је решио случај када је $v(x) = 1$. Развоју конструктивне теорије ортогоналних полинома допринео је Волтер Гаучи, који је у својим радовима развио ефикасне алгоритме за нумеричко генерисање ортогоналних полинома, дао је анализу стабилности и неке нове примене истих, тако да је данас могућа конструкција многих нових класа ортогоналних полинома, као и њихова примена у различитим областима не само нумеричке математике, већ и у многим другим научним областима.

У овој дисертацији кандидата Невена Васовић добијени су коефицијенти трочлане рекурентне релације полинома ортогоналних у односу на меру

$$du(x) = \frac{|T_n(x)|^{2s}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

али када је степен $n = 2$ и $s > -1/2$. Размотрене су диференцо-диференцијалне особине ових полинома и дата је електростатичка интерпретација њихових нула. Ови проблеми третирану су у симболичком облику. У раду [Results Math. **69** (2016)], Миловановић и његови сарадници су истраживали полиноме ортогоналне у односу на меру (1), али када је параметар s природан број. Специјалан случај мере (1) када је $s = 1$ дат је у раду Гаучија и Лија [Aeq. Math. **46** (1993)]. Случај $n = 1$ и $s > -1/2$, као и уопштења Гегенбауерове мере разматрана су у раду Лашченова из 1953 [Gos. Ped. Inst. Uč. Zap. **89** (1953), 167-189].

У овој дисертацији дате су и особине полинома који су ортогонални у односу на једну модификацију Чебишевљевог мере друге врсте

$$du(x) = |\hat{U}_n(x)|^{2s} (1-x^2)^{s+1/2} dx, \quad n \geq 2, \quad (2)$$

али када је $n = 2$ и $s > -1/2$.

Резултати истраживања дисертације у овом делу повезани су и са теоријом s -ортогоналних и σ -ортогоналних полинома. У раду Миловановића [J. Comput. Appl. Math. **127** (2001)] дат је метод који је заснован на интерпретацији s -ортогоналности преко имплицитно дефинисане стандардне ортогоналности.

Важна примена ортогоналних полинома је у конструкцији квадратурних формула, па због тога један део докторске дисертације припада и овој области и односи се на одређивање ефикасног и нумерички стабилног алгоритма за конструкцију одговарајућих Гаусових квадратура, које се за различите мере интезивно истражују последњих педесетак година, посебно након Голуба и Велча (Mathematics of Computations, 1969). Интезивно се истражују и модификоване Гаусове квадратуре у разним правцима.

Недавно, у раду Миловановића (Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math., 2018) дат је ефикасан нумерички алгоритам за конструкцију, тзв. Гаус-Рисове квадратурне формуле.

У овој дисертацији дата је нумеричка конструкција модификованих Гаус-Рисових квадратурних формула и одговарајућих класа ортогоналних полинома на $(-1,1)$ у односу на производ Гегенбауерове и експоненцијалне тежине, тј.

$$\omega(t; x) = \exp(-xt^2) (1 - t^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}, \lambda > -\frac{1}{2}, \quad (3)$$

када је $x > 0$. Рисове квадратурне формуле су разматране раније у радовима из области квантне хемије (нпр. М. Dupuisa, J. Rys, Н. F. King [J. Chem. Phys. **65** (1976), 111 - 116; J. Comput. Chem. **4** (1983), 154- 157], као и у радовима D.W. Schwenke [Comput. Phys. Comm. **185** (2014), 762 - 763] и В. D. Ch. [Comput. Theor. Chem. **1074** (2015), 178 - 184]. У свом прегледном раду [J. Comput. Chem. **120** (2016)], Кинг је дао један нумерички интеграциони метод за одређивање коефицијената трочлане рекурентне релације Рисових полинома.

Све хипотезе од којих се полазило у истраживању у дисертацији, постављене су на основу до сада познатих резултата у конструктивној теорији ортогоналних полинома. У дисертацији је дата и електростатичка интерпретација нула полинома ортогоналних у односу на модификовану Чебишевљеву меру прве врсте. Почети истраживања у овој области налазе се у радовима Стилтјеса из 1885. и Cerea [Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23** (1975)]. Новија истраживања у овој области могу се наћи у радовима Исмаила [Pacific J. Math. **193** (2000), 355-369], [Random Matrices and Their Applications **40** (2001), 225-244] и Марселена и осталих [Linear Algebra Appl. **260** (1997), 258-272].

У дисертацији су коришћене разне **математичке методе истраживања**, специјално методе математичке, комплексне и нумеричке анализе, те још уже методе конструктивне теорије ортогоналних полинома и нумеричке интеграције. Поменуте методе су делом имплементирани и проверени уз интезивно коришћење софтвера Mathematica 10.0 и у оквиру њега имплементираниг пакета OrthogonalPolynomials, како у симболичким, тако и у нумеричким израчунавањима.

За решавање проблема конструктивне теорије ортогоналних полинома у овој дисертацији кандидат је користио Чебишевљев и модификован Чебишевљев алгоритам које је у својим радовима деведесетих година прошлог века описао W. Gautschi [SIAM J. Sci. Statist. Comput. **3** (1982) 282-317], а који су систематизовани у његовој књизи Orthogonal Polynomials: *Computation and Approximation*, Clarendon Press, Oxford (2004).

3. Оцена да је урађена докторска дисертација резултат оригиналног научног рада кандидата у области Нумеричке анализе и теорије апроксимације

На основу увида у постојећа истраживања и научне доприносе из области Нумеричке анализе и теорије апроксимације, посебно теорије Ортогоналних полинома и Гаусових квадратура, Комисија сматра да је докторска дисертација Невене Васовић, оригинално научно дело чија тема није била предмет досадашњих истраживања. То је

потврђено објављеним радовима у врхунским међународним часописима са SCI листе, на основу резултата до којих је Невена Васовић дошла у дисертацији.

4. Преглед остварених резултата кандидата у области Нумеричке анализе и теорије апроксимације, посебно теорије Ортогоналних полинома

Невена Васовић до сада има објављен један рад у часопису са SCI листе (катеорије M21) и још један рад који је прихваћен за штампу у часопису са SCI листе (катеорије M23) и има једно саопштење на скупу међународног значаја (M34), што укупно чини три библиографске јединице.

Научни радови објављени (или прихваћени за штампу) у научним часописима међународног значаја (M20):

[1] A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, N. Vasović: Recurrence relation and differential equation for a class of orthogonal polynomials, *Results Math.* **73** (2018), no. 1, 73:16. <https://doi.org/10.1007/s00025-018-0779-8> [ISSN 1422-6383, IF5Y(2017)=0.981, M21]

[2] G.V. Milovanović, N. Vasović: Orthogonal polynomials and generalized Gauss-Rys quadrature formulae, *Kuwait J. Sci.* **49**(1) (2022), 1-11 (прихваћен за штампу-потврда о прихватању рада) [ISSN 2307-4108, IF5Y(2019)=0.826, M23]

Саопштења на међународним скуповима (M34):

[1] A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, N. Vasović, Differential Equation for a Class of Orthogonal Polynomials, Second International Conference “Mathematics Days in Sofia”, July 10—14, Sofia, Bulgaria, 2017

5. Оцена о испуњености обима и квалитета у односу на пријављену тему

Планирани обим истраживачког рада, циљеви, методолошки приступ у остваривању истраживања, који су прецизирани у оквиру поступка предлагања теме докторске дисертације су реализовани.

6. Научни резултати докторске дисертације

Невена Васовић има на основу резултата из докторске дисертације објављена или прихваћена за штампу два рада са SCI листе, категорије M21 и M23, једно саопштење са скупа међународног значаја.

Научни радови објављени (или прихваћени за штампу) у научним часописима међународног значаја (M20):

[1] A.S. Cvetković, G.V. Milovanović, N. Vasović: Recurrence relation and differential equation for a class of orthogonal polynomials, *Results Math.* **73** (2018), no. 1, 73:16. <https://doi.org/10.1007/s00025-018-0779-8> [ISSN 1422-6383, IF5Y(2017)=0.981, M21]

[2] G.V. Milovanović, N. Vasović: Orthogonal polynomials and generalized Gauss-Rys quadrature formulae, Kuwait J. Sci. 49 (1) (2022), 1-11 (прихваћен за штампу-потврда о прихватању рада) [ISSN 2307-4108, IF5Y(2019)=0.826, M23]

Саопштења на међународним скуповима (M34):

[1] A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, N. Vasović, Differential Equation for a Class of Orthogonal Polynomials, Second International Conference “Mathematics Days in Sofia”, July 10—14, Sofia, Bulgaria, 2017

7. Примењивост и корисност резултата у теорији и пракси

Класични ортогонални полиноми имају широку примену у многим областима науке и инжењерства. Полиномска апроксимација један је од најприроднијих приступа реконструкцији функције на основу коначног скупа информација. Још неке традиционалне области интензивне примене јесу ортогонални развоји (генерализовани Фуријеови редови), нумеричка интеграција и различите гране физике и механике. Новија, савремена истраживања из теорије вероватноће и стохастичких процеса, теорије графова, кодирања, итд., такође се ослањају на знања из области ортогоналних полинома.

Насупрот њима полиноми ортогонални у односу на нестандартне тежине и мере имају много мању примењену примену. Разлог овоме су бројне тешкоће које прате њихово генерисање. У последње време са развојем специјализованих софтверских пакета у системима као што су Matlab и Mathematica, који користи недавни прогрес у симболичком израчунавању и нумеричком рачунању у аритметици произвољне дужине, постигнут је напредак како у методама везаним за израчунавања неklasичних ортогоналних полинома тако и у могућностима нових примена. Полиномске модификације Чебишевљевих мера прве и друге врсте, као и истраживање особина одговарајућих неklasичних ортогоналних полинома по први пут се системски раде у овој дисертацији.

Широка је палета области, како у науци, тако и у другим гранама људског стваралаштва, где се користе гаусовске квадратурне формуле. Разне модификације Гаусових квадратура, како и саме Гаусове квадратуре за специфичне неklasичне тежинске функције се интензивно истражују последњих тридесетак година. У радовима из области квантне хемије током седамдесетих година прошлог века, за нумеричко израчунавање двоструких интеграла којима се описује интеракција електрона, након редукције на једно-димензионалне интеграле предложене су тзв. Рисове квадратурне формуле, које су биле предмет истраживања током низа година. Циљ је интеграција парних алгебарских полинома екстремно високог степена у односу на експоненцијалну тежинску функцију e^{-xt^2} на интервалу $[0,1]$, где је x позитиван параметар.

У свом скоријем истраживању Миловановић је дао ефикасан нумерички алгоритам за израчунавање параметара ових квадратура, интерпретирајући их као квадратуре Гаусовог типа. У истраживању које је одрађено у дисертацији по први пут су проучавање

тзв. генерализане Гаус-Рисове квадратурне формуле у односу на производ поменуте експоненцијалне функције и ултрасферне Гегенбаурове тежинске функције, са посебним освртом на важне Чебишевљеве случајеве.

8. Начин презентовања резултата научној јавности

Научни резултати докторске дисертације презентовани су до сада на једном саопштењу међународног значаја и публиковани су у једном часопису и прихваћени за публикавање у још једном часопису који су од међународног значаја.

ЗАКЉУЧАК

Поднети рукопис дисертације кандидата **Невене Васовић** под насловом „**Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа**“, представља оригинални рад из области Нумеричке анализе и теорије апроксимације урађен под менторством **академика др Градимира Миловановића**.

Приказани резултати који се односе на истраживања особина некласичних ортогоналних полинома, тј. одређивање коефицијената одговарајуће трочлане рекурентне релације, као и више диференчно-диференцијалних особина ових полинома третирану су у симболичком облику.

За проучавање генерализане Гаус-Рисове квадратурне формуле одређен је ефикасан нумерички алгоритам за израчунавање одговарајућих класа ортогоналних полинома. Сви резултати су верификовани у софтверу Mathematica. Добијени резултати су од велике користи у многим гранама математике и технике, где се користи теорија ортогоналности, као Гаусове и њима сродне квадратуре.

Квалитет научних резултата докторске дисертације верификован је публикавањем у виду два научна рада и једним саопштењем на међународној конференцији.


Сходно наведеном, мишљења смо да су испуњени сви научни, стручни и административни услови за прихватање наведене докторске дисертације, као оригиналног научног рада. У том смислу предлажемо Наставно-научном већу Природно-математичког факултета и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу да Невени Васовић одобри јавну одбрану докторске дисертације под наведеним насловом.

У Крагујевцу и Нишу.

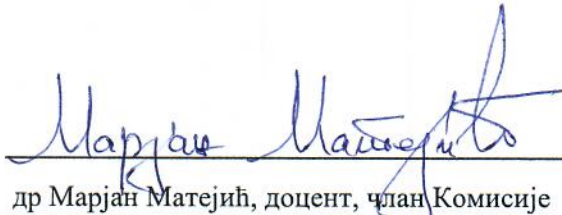
Комисија:



др Марија Станић, редовни професор, председник Комисије
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Ужа научна област: Математичка анализа са применама



др Татјана Томовић, доцент, члан Комисије
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Ужа научна област: Математичка анализа са применама



др Марјан Матејић, доцент, члан Комисије
Електронски факултет, Универзитет у Нишу
Ужа научна област: Математика

Радоворног ДАС Математичке сагласно.



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

П.	05.07.2021.		
Ор.			
05	37/7-2	-	-

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Поштовани Декане,

Молим да се прописани поступак припреме за одбрану докторске дисертације “Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа”, кандидата Невене Васовић даље настави. У прилогу дописа достављам Извештај о позитивној оцени ментора на Извештај о провери на оригиналност докторске дисертације.

У Београду, 02.07.2021.



Академик др Градимир В. Миловановић
Редовни професор у пензији
Математички институт САНУ, Београд

П:	05.07.2021.		
Ор:	БРЕДНОСТ		
05	37/7-3	-	-

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ОЦЕНА МЕНТОРА О ИЗВЕШТАЈУ О ПРОВЕРИ ОРИГИНАЛНОСТИ
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ ОДНОСНО ДОКТОРСКОГ УМЕТНИЧКОГ
ПРОЈЕКТА

НАЗИВ ДИСЕРТАЦИЈЕ	Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа
Кандидат	Невена М. Васовић
Ментор	Академик др Градимир В. Миловановић, редовни професор у пензији, Математички институт САНУ, Београд
Датум пријема потпуног извештаја о провери оригиналности докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта	02.07.2021.

- Као ментор предложене докторске дисертације изјављујем да је горе наведена дисертација резултат оригиналног научно-истраживачког рада, тј. да представља резултат рада кандидата Невене М. Васовић.
- Као ментор предложене докторске дисертације изјављујем да су у горе наведеној дисертацији поштована академска правила цитирања и навођења извора, што потврђује и попис библиографије, која садржи укупно 73 референце, уредно цитираних у тексту дисертације.
- Софтвером за проверу оригиналности утврђено је да у дисертацији укупно подударане износи 6%. Овај степен подударности је већим делом последица цитата библиографских података о коришћеној литератури. Попударност која је присутна у деловима: *Ортогонални полином на реалној правој, Квадратурне формуле и Електростатичка интерпретација нула. Mathematica пакет aRunTestES*, се односи на дефиниције и опште познату теорију из ових области. Сви наводи су уредно цитирани. Подударност (од 2%) у делу *Полиномске модификације Чебишељевих мера прве и друге врсте*, се односи на публиковане резултате докторандових истраживања, који су проистекли из његове дисертације. С обзиром да највећи делови дисертације немају подударане са текстовима из других извора и представљају резултат оригиналног рада

докторанда, изјављујем да се може констатовати да аутоматизованом претрагом није утврђено постојања плагијаризма.

- На основу свега изнетог, а у складу са чланом 7, Правилника о поступку провере на плагијаризам, Универзитета у Крагујевцу, **изјављујем да извештај указује на оригиналност докторске дисертације, те се прописани поступак за њену одбрану може наставити (ПОЗИТИВНА ОЦЕНА).**

Датум 02.07.2021. г.

ПОТПИС МЕНТОРА

