



НАСТАВНО-НАУЧНОМ ВЕЋУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

ВЕЋУ ЗА ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ  
УНИВЕРЗИТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

## ИЗВЕШТАЈ КОМИСИЈЕ О ОЦЕНИ УРАЂЕНЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

На седници Већа Докторске школе математике одржаној 18.04.2022. године, на седници Наставно-научног већа Природно-математичког факултета у Крагујевцу одржаној 27.04.2022. године (бр. 230/X-1) и на седници Већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу одржаној 18.05.2022. године (бр. IV-01-352/9) одређени смо за чланове Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације кандидата **Богдана Пирковића** под насловом

„Contribution to the theory of random environment integer-valued autoregressive processes”.

Кандидат је поднео рукопис своје докторске дисертације Наставно-научном већу Природно-математичког факултета на оцену. Чланови Комисије су детаљно прегледали рукопис, проценили квалитет дисертације и указали кандидату на корекције које је неопходно обавити. Кандидат је усвојио све предлоге Комисије и уградио их у финалну верзију, чиме су се стекли сви услови да Комисија поднесе следећи

## ИЗВЕШТАЈ

### 1. Опис докторске дисертације

Докторска дисертација „Contribution to the theory of random environment integer-valued autoregressive processes” припада области Математичке статистике. Полазне основе докторске дисертације чине резултати досадашњих истраживања у области целобројних ауторегресивних (INAR) временских серија. INAR временске серије увели су McKenzie (1985) са једне стране, и Al-Osh и Alzaid (1987) са друге стране, користивши потпуно независне приступе. Freeland (2010) је први увео INAR модел који може узети како позитивне, тако и негативне вредности, док су Настић и остали (2016) представили појам случајне околине и INAR модела у случајној околини. Предложена дисертација бави се

развојем INAR модела који узимају вредности преко читавог скупа целих бројева, развојем INAR модела у случајној околини и њиховим међусобним комбиновањем.

Текст дисертације написан је у потпуности на енглеском језику. Текст садржи 117 страница и састоји се од четири поглавља, закључка, списка литературе и три прилога. Списак литературе садржи 50 референци. Саставни део дисертације су и Резиме на енглеском и српском језику, Предговор и Биографија аутора. У рукопису дисертације налази се 28 слика и 21 табела.

**Поглавље 1 - Историјски преглед развоја INAR модела.** Прво поглавље је уводног карактера и представља теоријску основу истраживања. Конципирано је тако да уведе основне појмове и резултате који се надаље користе у дисертацији. Поглавље је подељено је на 4 секције. Прва секција доноси неке битне дефиниције и мотивацију за настанак INAR модела. У другој секцији дат је историјски преглед развоја INAR модела од настанка па све до данашњих дана. Трећа секција бави се битним расподелама које се у великој мери користе у наставку текста. У четвртој секцији наведена су тврђења, доказана од стране других аутора, која ће бити коришћена при доказивању теорема и ставова у наредним поглављима ове дисертације.

Оригинални резултати докторске дисертације изложени су у поглављима 2, 3 и 4, као и у прилогима А, В и С.

**Поглавље 2 - Идентификација и предвиђање латентних компоненти INAR временских серија са асиметричном Skellam-овом маргиналном расподелом.** Друго поглавље наслоњено је на резултате дате у Freeland-овом раду из 2010. године. Прве две секције овог поглавља детаљно описују INAR временске серије са симетричном, односно асиметричном Skellam-овом маргиналном расподелом које узимају вредности на читавом скупу целих бројева. Ове временске серије представљају основу за оригиналне резултате изложене у наредним секцијама. У трећој секцији предложене су статистике за идентификацију и предвиђање латентних компоненти INAR временских серија са асиметричном Skellam-овом маргиналном расподелом. Примена добијених резултата на симулираним низовима података дата је у четвртој секцији. Пета секција приказује примену резултата на подацима из реалног живота.

**Поглавље 3 - INAR модел у случајној околини са дискретним Лапласовим маргиналним расподелама.** У трећем поглављу, кандидат је приступио конструкцији новог нестационарног INAR модела у случајној околини који може узети вредности на читавом скупу целих бројева. Конструкција модела дата је у првој секцији. У другој секцији описане су неке особине модела. Трећа секција бави се оценом непознатих параметара модела. Примена модела на симулираним подацима дата је у четвртој секцији. У петој секцији, квалитет модела је додатно испитан на реалним низовима података.

**Поглавље 4 - Нова техника за оцену стања околине података који одговарају уопштеној INAR временској серији вишег реда у случајној колини.** Ово поглавље садржи јединствену адаптацију K-means технике за кластеровање података. Модификована техника, назvana RENNES метода, показала се веома погодном за оцењивање стања околине реализација које одговарају уопштеној RrINAR временској серији вишег реда. У првој секцији изложена је конструкција RENNES методе. Друга и трећа секција баве се применом

новоуведене технике кластеровања на симулираним низовима података. Ефикасност RENNES методе потврђена је на реалним подацима у оквиру четврте секције. Додатно, многи резултати који се тичу примене RENNES методе на симулираним и реалним низовима података изложени су у прилогима А, В и С. На овај начин, кандидат је успешно повећао прегледност читавог рукописа дисертације.

**Закључак.** У залучку су сумирани резултати читаве дисертације. Поред тога, изложени су и могући правци за даље истраживање.

## **2. Значај и допринос докторске дисертације са становишта актуелног стања у одређеној научној области**

Докторска дисертација „*Contribution to the theory of random environment integer-valued autoregressive processes*“ припада научној области Математика, односно ужој научној области Математичка статистика. Први INAR модел у случајној околини (random environment INAR model) уведен је 2016. године, а касније су настала и бројна уопштења овог модела. Дати резултати из литературе представљали су добру полазну основу за истраживање и добијање оригиналних научних резултата.

У овој дисертацији кандидат Богдан Пирковић обједињује два правца истраживања. Први правац се односи на конструкцију нових целобројних ауторегресивних временских серија у случајној околини који могу узети како позитивне, тако и негативне вредности. На овај начин, добијене су нове могућности у моделирању низова података са целобројним вредностима. Додатно, како је оцена стања околине сваке реализације један од кључних корака за моделирање реалних (стварних) процеса помоћу новоуведених модела у случајној околини, други правац истраживања обухвата прилагођавање постојећих метода кластеровања тако да оцене стања буду што прецизније.

У дисертацији су изложени оригинални резултати који су настали као продукт научног истраживања кандидата. Најпре, уведене су нове статистике за идентификацију и предвиђање латентних компоненти INAR временских серија са асиметричном Skellam-овом маргиналном расподелом. Затим, конструисан је нови нестационарни INAR модел у случајној околини са дискретним Лапласовим маргиналним расподелама. Овај модел омогућио је ефикасније моделирање података који узимају како позитивне, тако и негативне вредности. Поред тога, у дисертацији је изложен нови метод за оцену стања околине података који одговарају уопштеној INAR временској серији вишег реда у случајној колини. Овај метод, назван RENNES, показао се ефикаснијим од стандардне K-means технике која се до сада углавном користила за потребе оцењивања стања околине.

Све хипотезе од којих се полазило у истраживању постављене су на основу до сада познатих резултата из области INAR временских серија. Кандидат је најпре кренуо од хипотезе да је комбиновањем стационарних INAR модела који могу узети и позитивне и негативне вредности и ненегативних INAR модела у случајној околини могуће конструисати нове INAR моделе у случајној околини који узимају вредности преко читавог скупа целих бројева. Друга хипотеза претпоставља да је укључивањем оцена свих параметара INAR модела вишег реда у случајној околини (параметра расподеле, тининг параметра и реда

модела) у процес кластеровања могуће унапредити преформансе K-means технике, која је најчешће коришћена за оцену стања околине.

У дисертацији су коришћене методе карактеристичне за увођење нових модела. Најпре су конструисани нови модели који задовољавају постављене критеријуме о стационарности и скупу допустивих вредности модела. Након тога су изведене нове технике за оцену непознатих параметара. Ефикасност тако добијених оцена тестирана је на симулираним низовима података. На самом крају, квалитет модела испитан је над адекватно одабраним реалним низовима података, при чему је квалитет модела одређен на основу вредности стандардне грешке предвиђања (RMS).

### **3. Оцена да је урађена докторска дисертација резултат оригиналног научног рада кандидата у одговарајућој научној области**

На основу увида у постојећа истраживања и научне доприносе из области Математичке статистике, Комисија сматра да је докторска дисертација кандидата Богдана Пирковића оригинално научно дело. Резултати изнети у оквиру докторске дисертације нису били предмет досадашњих истраживања. Изнете тврђење могу се поткрепити објављеним радовима у међународним часописима са SCI листе, насталим на основу резултата до којих је кандидат дошао у дисертацији.

### **4. Преглед остваренх резултата рада кандидата у одређеној научној области**

Кандидат Богдан Пирковић до сада има објављена два научна рада у међународним часописима са SCI листе (категорије M22), као и једно саопштење са скупа међународног значаја (категорије M34) штампано у изводу.

#### **Научни радови објављени у научним часописима међународног значаја (M20)**

- [1] M. S. Đorđević, M. M. Ristić, **B. A. Pirković** (2021) Identifying latent components of the TINAR model, *Filomat*, **35**(13), 4469-4482. (ISSN:0354-5180, M22, IF2020=0.844, 197/330, Category: Mathematics)  
<https://doi.org/10.2298/FIL2113469D>

- [2] **B. A. Pirković**, P. N. Laketa, A. S. Nastić (2021) On generalized random environment INAR models of higher order: estimation of random environment states, *Filomat*, **35**(13), 4545-4576. (ISSN:0354-5180, M22, IF2020=0.844, 197/330, Category: Mathematics)  
<https://doi.org/10.2298/FIL2113545P>

#### **Саопштења са скупова међународног значаја штампана у изводу (M34):**

- [1] **B. A. Pirković**, P. N. Laketa, A. S. Nastić (2021) Random Environment Estimation Method for Generalized Random Environment INAR Models of Higher Order, *Third International Workshop on Nonlinear Analysis and its Applications*, Niš, Serbia, October 13-16, 2021 Book of Abstracts-page 40.

## **5. Оцена о испуњености обима и квалитета у односу на пријављену тему**

Обим истраживачког рада, циљеви, хипотезе и методолошки приступ у остваривању истраживања, који су планирани у оквиру поступка предлагања теме докторске дисертације, у потпуности су реализовани.

## **6. Научни резултати докторске дисертације**

Сви научни резултати које је кандидат Богдан Пирковић до сада остварио (два научна рада у међународним часописима са SCI листе и једно саопштење са скупа међународног значаја), а који су наведени у тачки 4, настали су на основу резултата изнетих у докторској дисертацији. Овим је кандидат успешно испунио услове за одбрану дисертације предвиђене Правилником о пријави, изради и одбрани докторске дисертације Универзитета у Крагујевцу и Правилником о реализацији заједничких докторских академских студија математике који је донело Веће Докторске школе математике. Додатно, кандидат има још један научни рад који се ослања на резултате из дисертације. Овај рад је у процесу објављивања.

## **7. Применљивост резултата у теорији и пракси**

Најважнији теоријски (научни) резултати који представљају научни допринос ове дисертације су:

- формулатија статистика за идентификацију и предвиђање латентних компоненти INAR временске серије са асиметричном Skellam-овом маргиналном расподелом, под условом да је познат низ реализација поменуте временске серије;
- оцена непозатих параметара INAR временске серије са асиметричном Skellam-овом маргиналном расподелом;
- конструкција новог нестационарног INAR модела у случајној околини који може узети како позитивне, тако и негативне вредности;
- низ теорема којима се описују особине новоуведеног модела;
- адаптација Yule-Walker методе и методе условно најмањег квадрата у циљу успешног оцењивања непознатих параметара модела;
- конструкција нове технике кластеровања која се користи за оцену стања околине реализација које одговарају уопштеној RrINAR временској серији.

**Применљивост резултата у теорији.** Уопштавање резултата из другог и трећег поглавља докторске дисертације води ка решавању проблема моделирања нестационарних целобројних низова података са компликованијом корелационом структуром. Поред тога, процес адаптације K-means технике изложен у четвртом поглављу може се применити и на друге технике кластеровања података.

**Применљивост резултата у пракси.** Сви резултати изложени у докторској дисертацији успешно су примењени на одговарајућим низовима података из реалног живота. На тај начин, недвосмислено је потврђена применљивост резултата у пракси. Поред примена описаних у оквиру текста дисертације, наведени резултати могу наћи практичну примену у медицини, телекомуникацијама, играма на срећу и бројним другим сферама живота.

## 8. Начин презентовања резултата научној јавности

Научни резултати докторске дисертације презентовани су јавности кроз два научна рада у истакнутим међународним часописима (категорије M22). Део резултата приказан је у трећем раду који се налази у процесу објављивања. Поред тога, део резултата из докторске дисертације представљен је научној јавности на међународном научном скупу *Third International Workshop on Nonlinear Analysis and its Applications*.

## ЗАКЉУЧАК

Поднети рукопис дисертације кандидата Богдана Пирковића под насловом „**Contribution to the theory of random environment integer-valued autoregressive processes**“ представља оригинални рад из области Математичке статистике под менторством проф. др Александра Настића.

Приказани оригинални научни резултати, као што су нове статистике за идентификацију и предвиђање латентних компоненти INAR временских серија са асиметричном Skellam-овом маргиналном расподелом, нови нестационарни INAR модел у случајној околини са дискретним Лапласовим маргиналним расподелама и унапређени метод за оцену стања околине података који одговарају уопштењу INAR временској серији вишег реда у случајној колини, донели су нове могућности у моделирању низова података са целобројним вредностима и низова података нестационарног карактера.

Квалитет научних резултата докторске дисертације верификован је публиковањем два рада у истакнутим међународним часописима са SCI листе (категорије M22) и саопштењем са скупа међународног значаја (категорије M34) штампаним у изводу.

Сходно наведеном, мишљења смо да су испуњени сви научни, стручни и административни услови за прихваташе наведене докторске дисертације као оригиналног научног рада. У том смислу, са задовољством предложемо Наставно-научном већу Природно-математичког факултета и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу да Богдану Пирковићу одобре јавну одбрану докторске дисертације под наведеним насловом.

У Крагујевцу, 10.07.2022.

**Комисија:**

Божидар Поповић

др Божидар Поповић (председник комисије)

ванредни професор Природно-математичког факултета Универзитета Црне Горе

научна област: Математика

Марија Милошевић

др Марија Милошевић

редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Нишу

научна област: Математика

Предраг Поповић

др Предраг Поповић

ванредни професор Грађевинско-архитектонског факултета Универзитета у Нишу

научна област: Математика

Миодраг Ђорђевић

др Миодраг Ђорђевић

ванредни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Нишу

научна област: Математика

Слађана Димитријевић

др Слађана Димитријевић

доцент Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу

ужа научна област: Математичка анализа са применама

ПР 24.06.2022  
Оп ЕИОС  
05 37/4-2 - -

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
ДЕКАНУ ФАКУЛТЕТА

ОЦЕНА МЕНТОРА О ИЗВЕШТАЈУ О ПРОВЕРИ ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ  
ДИСЕРТАЦИЈЕ ОДНОСНО ДОКТОРСКОГ УМЕТНИЧКОГ ПРОЈЕКТА

НАЗИВ ДИСЕРТАЦИЈЕ	Contribution to the theory of random environment integer-valued autoregressive processes
Кандидат	Богдан Пирковић
Ментор	др Александар Настић
Датум пријема потпуног извештаја о провери оригиналности докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта	22. 06. 2022.

1. Као ментор предложене дисертације изјављујем да је горе наведена докторска дисертација оригинално дело тј. да представља резултат рада кандидата Богдана Пирковића.
2. Као ментор предложене дисертације изјављујем да су у горе наведеној докторској дисертацији поштована сва академска правила цитирања и навођења извора.
3. Софтвером за проверу оригиналности утврђено је да у дисертацији подударање текста износи 10%. Највећи део поклапања (чак 6%) забележен је у односу на претходно објављени научни рад у којем је кандидат први аутор и који је проистекао из саме докторске дисертације. Поред тога, сам научни рад је уредно цитиран на више места у оквиру дисертације. Нешто већи проценат поклапања изазван је и чинjenicom да је комплетна дисертација написана на енглеском језику. Један део поклапања односи се на обавезне додатке дисертације (уводна реч аутора, садржај), као и тзв. општа места и податке. Остали део поклапања се односи на списак литературе, основне формуле, делове наслова слика и табела. Наглашавам да су поклапања у оквиру формула само делимична, и да готово да нема формула које су у потпуности преузете из других извора.

Имајући све то у виду, као ментор предложене дисертације изјављујем да се може констатовати да аутоматском претрагом није утврђено постојање плахијаризма. На основу тога, а у складу са чланом 7. Правилника о поступку провере на плахијаризам на Универзитету у Крагујевцу, изјављујем да извештај указује на оригиналност докторске дисертације, те се прописани поступак припреме за њену одбрану може наставити. (позитивна оцена).

Датум

23.06.2022.

ПОТПИС МЕНТОРА

Александар Настић

ДОКТОРСКА ШКОЛА МАТЕМАТИКЕ  
Кнеза Михаила 35, Београд



Београд, 31.07.2022.

На седници одржаној електронским путем 31. јула 2022. године, Веће Докторске школе математике донело је

### ОДЛУКУ

којом се потврђује једногласно прихватање индивидуалних извештаја о оцени докторске дисертације кандидата Богдана Пирковића, пријављеној на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу.

Одлуку достављамо архиви и Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу.

Председник Већа Докторске школе:

Академик Стеван Пилиповић