УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милан Башић

ПРИМЕНА МАТРИЧНИХ ОПЕРАЦИЈА И ДЕКОМПОЗИЦИЈА У ОПТИМИЗАЦИЈИ ПРЕДИКТИВНИХ ГРАФОВСКИХ МОДЕЛА

Докторска дисертација

Крагујевац, 2022.

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF SCIENCE

Milan Bašić

APPLICATION OF MATRIX OPERATIONS AND DECOMPOSITIONS IN OPTIMIZATION OF PREDICTIVE GRAPHIC MODELS

Doctoral dissertation

Kragujevac, 2022.

Идентификациона страница докторске дисертације
I. Аутор
Име и презиме: Милан Башић
Датум и место рођења: 19.07.1979., Ниш
Садашње запослење: редовни професор на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу
II. Докторска дисертација
Наслов: Примена матрчних операција и декомпозиција у оптимизацији предиктивних графовксих модела
Број страница: 185
Број слика: 19
Број библиографских података: 79
Установа и место где је рад израдјен: Природно-математички факултет, Крагујевац
Научна област (УДК): Тероија графова, Нумеричке методе алгебре (519.17:519.61 (043.3))
Ментор: проф. др Игор Миловановић, редовни професор Електронског факултета Универзитета у Нишу
III. Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 29.12.2021.
Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: IV-01-189/8 од дана 16.03.2022.
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата: 1. др Игор Миловановић, редовни професор Електронског факултета у Нишу 2. др Предраг Станимировић, редовни професор Природно-математичког факултета у Нишу (председник комисије) 3. др Бојана Боровићанин, ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: 1. др Предраг Станимировић, редовни професор Природно-математичког факултета у Нишу (председник комисије) 2. др др Бојана Боровићанин, ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу 3. др Марјан Матејић, доцент Електронског факултета у Нишу
Датум одбране дисертације:

Садржај

Резиме

У овој дисертацији разматрано је унапређивање оптимизационих перформанси (неусмерених) графовских модела чија је предиктивна функција квадратна форма обележја, увођењем иновативних начина декомпоновања матрица придружених графовима. Уочено је да се сложеност извршавања модела смањује налажењем ефикасних метода за спектралну декомпозицију Лапласове матрице графа модела. Како се свака реална мрежа може на ефектан начин моделирати Кронекерским производом одређеног броја графова, у првом делу дисертације се анализирају апроксимативне методе спектралне декомпозиције Кронекерског производа два графа. Обзиром на то да се спектрална декомпозиција Лапласове матрице Кронекерског производа два графа не може извести употребом Лапласових матрица фактор-графова (ово се у литератури сматра отвореним проблемом), изведене су формуле у затвореној форми за апроксимирање спектра и сопствених вектора поменуте матрице коришћењем спектара и сопствених вектора (нормализованих) Лапласових матрица његових фактор-графова. У случају графа који није Кронекерски, матрица суседства модела је апроксимирана Кронекерским производом две графовске матрице максималног ранга, коришћењем сингуларне декомпозиције пермутационе матрице добијене из матрице суседства. Такође су представљена теоријска објашњења о стабилности апроксимација анализирањем метрике коефицијената корелације за апроксимиране сопствене векторе и метрике релативних грешака за апроксимиране сопствене вредности. На крају је дискутовано како свака од горе наведених апроксимација утиче на ефикасност модела у смислу тачности оцене параметара, средње-квадратне грешке модела и брзине конвергенције методе, узимајући у обзир графове модела добијене симулатором реалних мрежа.

У другом делу дисертације коришћене су идеје директне декомпозиције Лапласове матрице графа модела циркуларном декомпозицијом у циљу побољшања ефикасности модела. Даље су окарактерисани графови са одређеним спектралним својствима у класи циркулантних графова да би допринели ефикасној циркуларној декомпозицији графа модела. У случају једночлане декомпозиције коришћене су цикличне матрице на којима се спектрална декомпозиција ефикасно извршава, као што су матрице суседства графова малог дијаметра: унитарних Кејлијевих графова, Кронекерски производи циркулантних графова, графови са малим бројем сопствених вредности, итд. Повећањем дијаметра, повећава се и тачност естимације параметара модела, док се брзина конвергенције метода по правилу смањује. Зато су окарактери-

сани сви циркулатни графови са максималним дијаметром датог реда, као и графови који поседују минималну најмању сопствену вредност и минимални спектрални покривач у класи циркулантних графова датог реда (мали спектрални покривач по правилу имплицира већи дијаметар). Изведене су одређене анализе асимптотске сложености, као и нумеричка израчунавања којима је показано да употреба горњих теоријских резултата даје добре резултате по питању тачности модела у случају када је матрица суседства графа квази-периодична (Теплицова, блок-Теплицова, итд.).

Кључне речи

Графовски модели, Лаплсова матрица Кронекерског производа, спектрална декомпозиција, циркуларна декомпозиција, сингуларна декомпозиција, циркулантни графови, јако регуларни графови, минимална најмања сопствена вредност, мининмални спектрални покривач, дијаметар

Abstract

This thesis considers advancing optimization performances of the (undirected) graphical models whose predictive function is quadratic form of features by introducing innovative approaches to decomposition of the matrices associated to graphs. It has been noticed that the model complexity decreases when efficient methods of spectral decomposition of Laplacian matrix of a graph are being used. Considering that every real world network can be modeled as a Kronecker product of arbitrary number of graphs, first part of the thesis analyses approximate methods of spectral decomposition of Kronecker product of two graphs. Considering that the spectral decomposition of Laplacian matrix of Kronecker product of two graphs cannot be deduced using Laplacian matrices of factor-graphs (this is considered an open problem in the literature), closed form formulas for approximating spectre and eigenvectors of above-mentioned matrix by using the spectrum and the (normalised) eigenvectors of Laplacian matrices of its factor-graphs are provided in the chapter. In the case of a graph other than Kronecker, adjacency matrices are approximated by the Kronecker product of two maximum-ranking graph matrices, using singular decomposition of the permutation matrix derived from the adjacency matrix. Moreover, theoretical explanations of stability by analyzing the metric of the correlation coefficient for approximated eigenvectors and metrics of relative errors for approximation of their eigenvalues have also been presented. Finally, we discuss how any of the above mentioned approximations influences the model efficiency in terms of the accuracy of the parameter estimation, mean square error of the model and speed of convergence, on real world simulated graphs.

Second part of the thesis utilizes the idea of direct decomposition of Laplacian matrix of a graph by using circular decomposition, aiming to improve efficiency of the model. We provide a characterization of graphs with specific spectral properties in class of circular graphs that help efficient circular decomposition of a model graph. In the case of one-member decomposition, circular matrices that run spectral decomposition efficiently (such as adjacency matrices of the graphs with small diameter: unitary Cayley graphs, Kronecker products of circular graphs, graphs with small number of eigenvalues etc.) have been used. By increasing the diameter, accuracy of the parameter estimation of the model increases, whilst the speed of convergence decreases. Thus, the characterization of all circulant graphs with maximal diameter of a given order has been provided, as well as the graphs that contain the minimal least eigenvalue and minimal spread in the class of circulant graphs of a given order. We perform analysis of the asymptotic complexity, and additionally provide numerical computation that show that the usage of the above mentioned

theoretical results gives good results in term of model accuracy in the cases of quasi-periodic matrices (such as Toeplitz and block-Toeplitz matrices etc.).

Key words

Graphical models, Laplacian matrix of Kronecker graph product, spectral decomposition, circulant decomposition, singular value decomposition, circulant graphs, strongly regular graphs, minimal least eigenvalue, minimal spread, diameter

Предговор

Од рада Leonharda Eulera о седам Кенигсбершких мостова (1736), који слови за први писани рад у области теорије графова, теорија графова је нашла фундаменталне примене и одиграла значајну улогу у развоју других наука. Eulerova формула је имала велики значај у настајању опште и алгебарске топологије. У 19. веку, док је Listing уводио топологију, Cayley је отпочео проучавање стабала, вођен резултатима добијеним посматрањем одређених аналитичких форми насталих из диференцијалног рачуна. Cayley је повезао своје резултате о стаблима са тадашњим резултатима из области хемијске композиције. Технике у областима графова и топологије, употребљене су такође у раду физичара Gustava Kirchhoffa из 1845, у коме је успоставио чувене Киркохове законе у струјним колима између напона и јачине струје.

Теорија графова и данас има све значајнију примену у другим научним областима и технологији. Готово да нема научног поља у којем није заступљена, те ћемо навести само неке: биохемија (геноми), електроника (комуникационе мреже и теорија кодова), информатика (алгоритми и теорија израчунавања), рачунарске науке (статистичке базе података, комплексне мреже, квантно рачунарство, мултипроцесорски системи), вештачка интелигенција (истраживање података, компјутерски вид, препознавање патерна), комбинаторна оптимизација (експандери), операциона истраживања (планирање), итд. Поменимо примене техника теорије графова у доказивању фундаменталних и још увек актуелних резултата у другим областима теоријске математике. Доказујући егзистенцију упаривања у одређеним бесконачним бипартитним графовима Mikl*ó*s Laczkovich је дао позитиван одговор на чувено питање Alfreda Tarskog (постављено 1925) о могућој квадратури круга. Занимљиво је поменути и да је Thomas конструисао неизмерљив подскуп скупа реалних бројева $\mathbb{R}$ у Лебеговом смислу, само коришћењем комбинаторних техника на бипартитним графовима. Поменимо и то да је Babai доказао Nielson-Schreierovu теорему о подгрупама слободних група, као и друге резултате из те области, коришћењем Cayleyevih графова и његове леме о контракцији. У литератури се може наћи још много примера примена у другим математичким областима [17, 50].

Веома су значајне примене теорије графова у новијим истраживањима из области компјутерске биохемије. Коришћењем алгоритма за налажење минималног покривача скупа чворова врши се елиминација неких секвенци које доводе до конфликта, при мутацији ДНК. Исти алгоритам је користила група информатичара предвођена Ericom Filiolom за симулацију преношења вируса (worms) на великим компјутерским мрежама. Такође су дизајнирали оптималну стратегију за заштиту мрежа од вируса у реалном времену. Занимљиво је истаћи да мрежа GSM мобилне телефоније ради на само четири различите фреквенције, што је директна последица чувене теореме о четири боје (формулисао је Francis Guthrie 1852). Добро су познате примене алгоритама за бојење грана у проблемима планирања (распоред часова) и коришћење Хамилтонових контура у шаховским проблемима.

Данас је примена теорије графова највидљивија и најактуелнија у контексту описивања многих интеракција у природи и друштву, као на пример, протеин-протеин интеракције у протеинским мрежама, везе између пиксела слике, везе између корисника друштвене мреже, интеракције између кубитова током еволуција квантних систем итд., па се оне могу природно моделирати великим графовима [56, 66, 3, 10, 16]. У графовској репрезентацији проблема веома је важно унапред стечено знање о објектима који се стављају у граф (чворови графа) и типовима односа међу њима (типови грана графа). На пример, везе између докумената (чворови графа) могу се квантификовати на основу сличности њиховог садржаја, односи између парова научних радова могу се представити у терминима броја референци које их цитирају, односи међу здравственим установама се могу заснивати на сличности њихове специјализације [58, 67, 55]. Међутим, пошто скоро сви графови у стварном свету еволуирају током времена, било додавањем или уклањањем чворова или грана, појавила се потреба предикције овакvих процеса у графу, где примена само традиционалних предиктивних метода (мултиваријантна линеарна регресија или неуронска мрежа) не обезбеђује високу тачност предикције. Традиционални предиктивни методи су ипак неопходни за издвајање информација које недостају, идентификацију лажних интеракција, процену механизама развоја мреже, предвиђање нових грана и атрибута чворова, итд., али не и довољни. Зато се прибегло увођењу тзв. графовских (структурних) предиктивних модела, дизајнираних да инкорпорирају корелацију између излаза традиционалног (неструктурног) предиктора, како би се постигла већа тачност регресије.

Формално, под предиктивним моделом се подразумева временски зависан процес којим се трансформише знање о узорку популације на целу популацију (или популацију која је у некој врсти везе са датом), прецизније речено, то је функција којом се адекватно апроксимира скуп података у односу на одређени математички критеријум. Конструкција модела (детерминистички, недетерминстички, статистички, стохастички) високе тачности предикције у односу на задати проблем, зависи од домена проблема, својстава функције којом се врши предикција, али и врсте корелације између независних (улазних) променљивих модела и зависних (излазних) променљивих модела. Када излазне променљиве нису независне или немају исту расподелу, а то се дешава у случајевима када подаци имају неку врсту секвенцијалне, временске, просторне или временско-просторне корелације, тада се мора прибећи неком погоднијем начину моделирања корелације између излазних променљивих у структуираном скупу података. У дисертацији се разматрају типови модела у којима се подаци могу организовати тако да постоји релацијска зависност међу излазним променљивама, односно излази представљају чворове неког (тежинског) графа.

Теорија предиктивних модела заснованих на графовским везама између излаза (предиктивни графовски модели) последњих пар деценија бележи интензиван развој, готово у свакој научној области у којој је нашла примену и спектрална теорија графова, али и у многим практичним проблемима из области као што су биоинформатика, компјутерска визија, теорија социјалних мрежа, теорија одлучивања у реалном временом, трговање на берзи, интеграција података, метеорологија, итд. Идеја о увођењу графовских модела (Random Fields) се први пут јавља у просторним ауторегресивним моделима у чијој је конструкцији узета у обзир просторна корелација између података модела [2, 65]. Касније је у варијантама Гаусових процеса примењена идеја о укључивању у модел два типа информација: зависност између улазних променљивих и корелација између излазних променљивих [18]. Међу графовским моделима најпопуларнији тип модела је неусмерени графовски модел [46] (у литератури се користи још термин Conditional Random Fields). Неусмерени графовски модели су првобитно били дизајнирани за класификацију секвенцијалних података, а затим су нашли примену у многим областима као што су компјутерска визија и биоинформатика [45, 49]. Ови модели представљају алтернативу линеарним динамичким системима (Калмановим филтерима) који укључују претпоставку о независности излазних променљивих, за разлику од линеарних динамичких система. Функција графовских модела (функција обележја улазних података) је у поменутој литератури линеарна, док је у дисертацији анализирана квадратна функција.

Главни недостатак до сада проучаваних модела је што они не поседују задовољавајућу скалабилност са порастом броја чворова у графу (предиктивни модели у конкретним применама треба да процесирају велику количину података). Илустрације ради, време извршења модела може бити проблематично уколико је ред графа 10 000, чак иако је ниво гранске густине графа мањи од 50%, док је време извршења модела у 50 временских јединица, за редак граф реда 100 000, око 2 месеца. Разлог нескалабилности модела лежи у чињеници да оптимизациони метод модела током свог итеративног извршавања користи рачунски неефикасне операције над матрицама придруженим графу модела. Срећом, велики графови се често могу факторисати на мање целине, на пример, мотифе, заједнице или слојеве [52, 38, 31]. У том случају, користећи својства ових мањих структура, можемо одредити својства великих графова добијених коришћењем одређених операција из мањих. Због тога су у скорашњем периоду графовске операције почеле да се користе у теорији графовских модела као формалан начин записа одређених типова вишеслојних графовских топологија [31, 70, 42]. Графовско-матричне операције су пронашле значајну примену у интерконекцијским мрежама, масовним паралелним рачунарским архитектурама и дифузним шемама [32].

Конкретно, у теорији неусмерених графовских модела са квадратном функцијом обележја, идеја којом би се превазишао проблем велике сложености израчунавања модела предложена је у раду [35], где се за граф модела користила Кронекерска (тензорска) структура. Мотивација за коришћење овог графовског производа произилази из рада [47], где се показује да се реална графовска мрежа може ефектно моделирати Кронекерским графовима. У наведеном раду, дат је пример ефикасног моделирања Интернет графа са неколико стотина милиона хостова, помоћу подграфова који су степени малих графова у односу на Кронекерски производ. Међутим, ова идеја из рада [35] није спроведена, јер графовске фактор-матрице не наслеђују увек спектралне особине матрица из којих су настале у односу на типове композиција и факторизација, али и обрнуто, различити типови операција примењени на фактор-матрице не преносе нужно својства фактор-матрица на матрицу резултата, па су последично предиктивни резултати таквог модела били незадовољавајући.

Главни задатак докторске дисертације представља унапређивање оптимизационих перформанси (неусмерених) графовских модела чија је предиктивна функција квадратна форма обележја, увођењем иновативних начина декомпоновања матрица придружених графовима. Оптимизационе методе су тестиране путем различитих метрика модела на типовима графовских структура које ефектно моделирају реалну мрежу, као што су: random, scale-free, small world графови, али и оних који се јављају у применама: Кронекерски, Теплицови, квази-периодични, интегрални, пермутациони, итд. У дисертацији ће бити извршена систематизација одређених метода декомпозиција матрица које се могу употребити у оптимизацији модела, а затим и њихова компарација са новим методама. На одређеним класама графова забележени су резултати блиски оним који се добијају директним извршавањем модела уз реда величине мању сложеност метода. Како тополошке структуре графова могу у потпуности бити описане њиховим придруженим графовским матрицама, анализирамо поједина спектрална својства и инваријанте графова које ће се јавити у оптимизационом проблему: спектар Лапласове и нормализоване Лапласове матрице Кронекерског графа, коефицијент корелације сопствених вектора Лапласове и нормализоване Лапласове матрице, заборављени тополошки индекс, дијаметар циркуларних графова, спектар цикличне матрице, итд.

Дисертација садржи резултате из различитих области математичких и рачунарских наука: теорија графова, нумеричка линерна алгбера, теорија матрица, теорија вероватноће и статистике, теорија алгоритама итд.

Дисертација је базирана на одабраним оригиналним резултатима аутора који су публиковани у водећим међународним часописима, првенствено из области математике и рачунарских наука, али такође садржи и значајан број резултата који се овом приликом први пут појављују.

Дисертација је подељена у 4 поглавља:

1. Основни појмови и резултати

2. Графовски модели базирани на Кронекерским структурама

3. Циркуларна декомпозиција

4. Закључак,

а свако поглавље је подељено на неколико одељака, а одељци на пододељке. Дисертација садржи и два прилога са додатним илустрацијама резултата и помоћним кодовима.

У овој докторској дисертацији уведене су иновативне методе за декомпозицију Лапласових матрица графовских модела базираних на Кронекерском (тензорском) производу и циркуларној декомпозицији у циљу оптимизације таквих модела.

Прво поглавље је уводног карактера и оно је конципирано тако да обухвати формалне математичке дефиниције и резултате из области спектралне теорије графова, теорије матрица и теорије графовских модела, који представљају основ за даља разматрања појмова из матричне теорије графовских модела.

У другом поглављу су изведене апроксимативне формуле за Лапласов спектар и Лапласове сопствене векторе Кронекерског производа два графа користећи спектре и сопствене векторе (нормализованих) Лапласових матрица његових фактор-графова (проблем налажење аналитички тачних формула је још увек отворен). Такође су разматрана теоријска објашњења о стабилности апроксимација спектра и сопствених вектора Лапласове матрице Кронекерског производа два графа коришћењем метрика коефицијената корелације за апроксимиране сопствене векторе и релативних грешака за апроксимиране сопствене вредности. Односи између одређених коефицијената корелације се своде на односе између одређених тополошких индекса графа модела, па су у раду показане одређене неједнакости између њих. У другом одељку је дискутовано како свака горе наведена апроксимација утиче на ефикасност модела у смислу тачности регресије модела и брзине конвергенције оптимизационог метода графовског модела. Ефикасност предложених метода ће бити евалуирана нумеричким експериментима најпре за Кронекерске графове модела добијене из генератора различитих синтетичких мрежа, а затим ће граф модела бити апроксимиран најближим Кронекерским производом два графа у односу на Фробениусову норму.

Лапласова матрица графа модела се може апроксимирати употребом циркуларне декомпозиције уз анализу само одређеног броја циркуларних компоненти (одређени број сабирака декомпозиције) да би се полазна матрица апроксимирала матрицом нижег ранга, о чему ће бити речи у трећој глави. Из тог разлога ће бити дата карактеризација графова са одређеним спектралним својствима у класи циркуларних графова (графови са малим бројем различитих сопствених вредности, графови са малим дијаметром, графови са минималном најмањом сопственом вредношћу, графови са најмањим спектралним покривачем) што може допринети ефикасној циркуларној декомпозицији графа и/или већој тачности модела, а представљају резултате који су сами по себи новина у спектралној теорији графова. Ефикасност оптимизационих метода у смислу тачности модела и брзине конвергенције метода евалуиране су нумеричким експериментима за графове модела из различитих класа графова (Кронекерски, квази-периодични, Теплицови, циркулантни, графови добијени симулацијом реалних мрежа).

На крају, желим да изразим захвалност ментору проф. др Игору

Миловановићу, који је руководио израдом ове докторске дисертације, на веома корисним сугестијама и стручним саветима. Такође желим да се захвалим члановима комисије: проф. др Предрагу Станимировићу, проф. др Бојани Боровићанин и доц. др Марјану Матејићу чији предлози, конструктивне примедбе и сугестије су побољшале квалитет овог рада. Дугујем захвалност својој породици, колегама, коауторима и свим пријатељима који су ми, приликом израде дисертације, пружили неопходно разумевање и подршку.

1 Основни појмови и резултати

У овом поглављу су изложене формалне математичке дефиниције појмова који се користе у тези, а који представљају основ за даља разматрања појмова из матричне теорије графовских модела. У првом одељку дате су дефиниције основних појмова из теорије графова, док су у другом одељку уведене дефиниције и резултати спектралне теорије који се односе на елементе Перон-Фробенијусове теорије, као и теорије јако регуларних графова и блок дизајна. У трећем одељку наведене су дефиниције и особине неких класа специјалних матрица са посебним освртом на цикличне матрице које су коришћене у циркуларној декомпозицији графовских матрица. Четврти одељак садржи познате резултате о декомпозицији графова на простије графовске структуре, као и резултате о комбиновању графова у сложеније користећи граф-матричне операције, пре свега одређене типове графовских производа. Посебно су истакнута три фундаментална графовска производа: Декартов, Кронекерски (тензорски, директни) и јаки, као и типови композиција: спектрална, циркуларна и сингуларна. Коначно, у последњем одељку поглавља описан је графовски (структурни) пробабилистички модел чија фунцкија модела зависи како од обележја улазних промењивих, тако и од релационе структуре између излазних промењивих (графа модела). Карактеристике овог модела (пре свега у смислу сложености израчунавања) су коментарисане у светлу спектралне декомпозиције Лапласове матрице графа модела и броја итерација у градијентном методу за оцењивање параметара модела.

1.1 Формалне дефиниције теорије графова

На почетку дајемо неке основне дефиниције из теорије графова (пратимо књиге [26, 27, 36, 75]).

Дефиниција 1.1. *Граф G (енг.* graph*) је уређени пар* (V, E)*, где је*

$E \subseteq \binom{V}{2}$ *(скуп свих двоелементних подскупова скупа* V*). Елементи скупа* V *се зову чворови (енг.* vertex*), а елементи скупа* E *гране (енг.* edge*) графа* G*. Граф* $G = (V, E)$ *је усмерен или диграф, ако су гране усмерене тј.* $e = u \to v$*. Мултиграф је специјална врста графа, када је дозвољено више различитих грана које спајају два чвора, као и гране које спајају чвор са самим собом.*

У дисертацији ћемо најчешће разматрати неоријентисане графове без петљи и вишеструких грана (прости графови).

Дефиниција 1.2. *Два чвора графа* u *и* v *су суседна ако су спојена граном* $e = uv$*. Под скупом суседа чвора* $v \in V$ *графа* $G = (V, E)$ *(енг.* neighborhood*) подразумева се скуп* $N(v) = \{u \in V : vu \in E\}$ *суседа чвора* v*. Степен чвора* v *(енг.* degree*) је број суседа чвора* v*,* $deg(v) = |N(v)|$*. Најмањи степен графа* G *је* $\delta = \min_{v \in V} d(v)$*, а највећи степен графа* G *је* $\Delta = \max_{v \in V} d(v)$*.*

Дефиниција 1.3. *Граф* $G' = (V', E')$ *је подграф (енг.* subgraph*) графа* $G = (V, E)$*, ако важи* $V' \subseteq V$ *и* $E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$*. Граф* $G' = (V', E')$ *је индуковани подграф (енг.* induced subgraph*) графа* $G = (V, E)$*, ако важи* $V' \subseteq V$ *и* $E' = E \cap \binom{V'}{2}$*.*

Интуитивно јасне појмове пута, циклуса (контуре) и растојања између чворова, дефинисаћемо прецизно.

Дефиниција 1.4. *Шетња (енг.* walk*)* W *дужине* k *у графу* G *је низ* $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$ *чворова и грана тако да је* $e_i = v_{i-1}v_i$ *за* $i = 1, 2, \ldots, k$*. Чворови* v_0 *и* v_k *су крајњи чворови шетње* W*. Шетња је затворена уколико је* $v_0 = v_k$*. Стаза (енг.* trail*) је шетња у којој се ниједна грана не понавља. Пут (енг.* path*) је шетња у којој се ниједан чвор не понавља. Циклус (енг.* cycle*) је затворена стаза у којој се ниједан чвор не понавља, изузев првог и последњег.*

Чворови u и v графа G су повезани ако у G постоји пут чији су крајњи чворови баш u и v. За граф G кажемо да је *повезан* (енг. connected) ако су свака два његова чвора повезана - у супротном је граф неповезан и може се поделити на компоненте повезаности.

Дефиниција 1.5. *Ако су чворови* u *и* v *графа* G *повезани, тада је растојање* $d(u, v)$ *од чвора* u *до чвора* v *једнако дужини најкраћег пута између чворова* u *и* v*. Ексцентрицитет чвора* v *(енг.* eccentricity*) је једнак максималном растојању од* v *до свих осталих чворова, тј.* $\varepsilon(v) = \max_{u \in V} d(u, v)$*. Дијаметар графа* G *(енг.* diameter*) је највеће растојање између нека два чвора графа, тј.* $D(G) = \max_{u,v \in V} d(u, v)$*, док* *се радијус графа G (енг.* radius*) дефинише као најмањи ексцентрицитет међу чворовима, тј.* $r(G) = \min_{v \in V} \varepsilon(v)$.

Чворови минималног ексцентрицитета формирају центар графа.

Граф G је r-регуларан, $r \in N$, ако је степен сваког чвора једнак r, тј. $\delta = \Delta = r$. *Комплетан граф* са n чворова (енг. complete graph) је граф K_n, $n \in N$, са скупом чворова $\{1, 2, \ldots, n\}$, и за свако $1 \leq i, j \leq n$ важи $\{i, j\} \in E$. Граф $G = (V, E)$ је *бипартитан* (енг. bipartite graph) ако постоји партиција $\{A, B\}$ скупа чворова $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, тако да за сваку грану $e \in E$ важи да она спаја чвор из A са чвором из B. Граф G је *планаран* (енг. planar) ако се може нацртати у равни, тако да се никоје две гране не секу.

Дефиниција 1.6. *Унију графова* $G_1 = (V_1, E_1)$ *и* $G_2 = (V_2, E_2)$ *дефинишемо као граф* $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. *Спајање (енг.* join*) графова* $G_1 \vee G_2$ *се добија од графа* $G_1 \cup G_2$*, тако што спојимо граном сваки чвор из графа* G_1 *са сваким чвором из* G_2. *Комплемент* $\overline{G}$ *графа* $G = (V, E)$ *(енг.* complement*) је граф* $\overline{G} = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$*, дакле он садржи тачно оне гране које граф* G *нема.*

Дефиниција 1.7. *Нека је* G *прост граф,* $v \in V$ *произвољан чвор и* $e = uv$ *произвољна грана. Граф* $G' = G - v$ *је добијен брисањем чвора* v *и свих грана које су суседне са њим. Граф* $G - e$ *добијамо када из графа* G *уклонимо грану* $e = uv$.

Дефиниција 1.8. *Повезан граф без циклуса назива се стабло (енг.* tree*). Граф који не садржи циклусе, тј. граф чија је свака компонента повезаности стабло, назива се шума (енг.* forest*). Чвор степена* 1 *у графу* G *назива се лист или висећи чвор (енг.* leaf, pendant vertex*).*

Стабла имају вишеструку примену у различитим областима науке (при парсирању, компресији, за сортирање и претраживање података). Свако стабло можемо нацртати, тако што фиксирамо корен стабла, а затим цртамо све његове директне суседе у следећем нивоу, па онда суседе на растојању 2 у следећем нивоу и тако даље. Ово се ради алгоритмом претраге у ширину (енг. Breadth First Search). Како до сваког чвора постоји јединствен пут од корена, дубину стабла дефинишемо као највеће растојање од корена до осталих чворова. Врло важна структура података у програмирању је коренско бинарно стабло, где сваки чвор има највише два потомка.

Дефиниција 1.9. *Разапињуће стабло* $T = (V, E')$ *(енг.* spanning tree*) је подграф графа* $G = (V, E)$*, који је стабло и садржи све чворове и неке његове гране, тј.* $E' \subseteq E$.

За два графа са истим бројем чворова, која су повезана "на исти начин" кажемо да су изоморфни (енг. isomorphic).

Дефиниција 1.10. *Графови G и H са скупом чворова $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ су изоморфни, ако постоји пермутација тј. бијекција $p : V \to V$ чворова V, тако да је $(u, v) \in E(G)$ ако и само ако је $(p(u), p(v)) \in E(H)$. Тада пишемо $G \cong H$.*

Дефиниција 1.11. *Граф је уницикличан ако је повезан и садржи тачно један циклус, односно $n+1$ грану. Граф је бицикличан ако је повезан и садржи тачно два циклуса, односно $n + 2$ гране.*

Сада ћемо дефинисати још неке сложеније графовске инваријанте.

Дефиниција 1.12. *Граф G је k-повезан, ако не постоји скуп од $k - 1$ чворова чијим се уклањањем граф распада на неколико компоненти (односно чворна повезаност је $\geq k$). Чвор $v \in V$ графа G се назива артикулациони чвор (енг.* articulation vertex*) ако $G - v$ има више компоненти повезаности од G. Грана $e \in E$ графа G се назива мост (енг.* bridge*), ако $G - e$ има више компоненти повезаности од G.*

На основу претходне дефиниције важи да је повезани граф је 1-повезан, а 2-повезани граф (енг. biconnected graph) не садржи артикулациони чвор.

1.2 Елементи спектралне теорије графова

Графови се обично представљају графички цртањем тачке за сваки чвор и линије између два чвора који су суседни. Постоји много начина да се граф представи у меморији рачунара. Структура података која се користи зависи од особина графа и алгоритма који примењујемо. Теоретски се могу разликовати динамичке и матричне структуре, али се у пракси користе у комбинацији. Уколико се користи *листа суседа* (енг. neighbor list), тада за сваки чвор v чувамо листу чворова који су суседни са њим. Уколико се ради о *матрици суседства* (енг. adjacency matrix) - тада се користи матрица A_G димензија $n \times n$, где је n број чворова у графу G. Елемент a_{ij} је једнак броју грана које полазе из чвора i, а завршавају се у чвору j. Код тежинских графова на позицији (i, j) се налази тежина гране која повезује чворове i и j. Ако је граф прост и неусмерен, матрица је симетрична састављена само од 0 и 1, а на главној дијагонали се налазе нуле (матрица је симетрична уколико су елементи на позицијама (i, j) и (j, i) једнаки).

Неколико типова матрица се природно придружују графовима, као што су матрица инциденције (енг. incidence matrix), матрица растојања (енг. distance matrix), матрица путева (енг. path matrix) [43] и Лапласова матрица (енг. Laplace matrix), поред поменуте матрице суседства. Један од главних проблема матричне теорије графова је успостављање веза између графовских особина и алгебарских особина матрица придружених графовима.

Матрица инциденције, у ознаци I_G, је матрица чије врсте и колоне одговарају чворовима, односно гранама придруженог графа G, редом, при чему је елемент на позицији (i, j) матрице једнак 1 ако је чвор i инцидентан са граном j, у супротном је елемент једнак 0.

За дати граф $G = G(V, E)$ и матрицу суседства графа G, A_G, са D_G означимо квадратну матрицу димензије $|V| \times |V|$ дефинисану са

$$d_{ij} = \begin{cases} deg(v_i), & i = j \\ 0, & \text{у супротном.} \end{cases}$$

Лапласова матрица L_G графа G се дефинише као $L_G = D_G - A_G$.

Технике линеарне алгебре су незаменљиве у проучавању структуре и енумерације графова.

Дефиниција 1.13. *Сопствена вредност (енг.* eigenvalue*) матрице A је реалан број λ, ако матрична једначина*

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$$

има нетривијално решење, које називамо сопствени вектор (енг. eigenvector*). Сопствене вредности графа су сопствене вредности матрице суседства.*

Матрица је позитивно семидефинитна (енг. semidefinite) ако и само ако су све сопствене вредности ненегативне. Показује се да је Лапласова матрица L_G графа G позитивно семидефинитна.

Спектар графа (енг. graph spectrum) је скуп сопствених вредности матрице суседства, заједно са њиховим алгебарским вишеструкостима. Скуп свих сопствених вектора оператора A за сопствену вредност λ, заједно са нула вектором, у ознаци V_λ, назива се сопствени потпростор за λ. Вишеструкост за сопствену вредност λ је једнака $n - rang(\lambda I - A)$. Ако су различите сопствене вредности матрице A такве да важи $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$, а њихове вишеструкости $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_k)$, тада спектар графа означавамо са

$$Spec_G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \ldots & m(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

Сопствене вредности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ су нуле карактеристичног полинома (енг. characteristic polynomial) матрице A

$$P(x; A) = \det(xI - A) = (-1)^n \det(A - xI) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i).$$

Како је $P(x; A)$ моничан полином са целобројним коефицијентима, све његове рационалне нуле су целобројне, па су сопствене вредности матрице суседства или ирационалне или целобројне. У раду ћемо означавати са $P(x; G)$ карактеристични полином матрице суседства графа G. Ако је дат моничан полином, врло је тешко одредити да ли је он карактеристичан полином неког графа. Два графа су *коспектрална* (енг. cospectral) ако њихове матрице суседства имају исте сопствене вредности. Коспектрални графови не морају да буду изоморфни, али су изоморфни графови увек коспектрални.

Дефиниција 1.14. *Реална матрица је ненегативна ако је сваки њен елемент већи или једнак нули.*

У теорији ненегативних матрица посебну улогу игра појам неразложивости, што је еквивалентно појму јаке повезаности њихових диграфова. Квадратној матрици A реда n може се придружити диграф $D(A)$ реда n тако да је тежина гране (i, j) диграфа једнака управо $a_{i,j}$.

Дефиниција 1.15. *Квадратна матрица A реда n је неразложива (енг.* irreducibile*) ако је њен одговарајући диграф $D(A)$ јако повезан. У супротном, матрица је разложива. Диграф је јако повезан ако су свака два чвора повезана усмереним путем.*

Дефиниција 1.16. *Спектрални радијус $\rho(A)$ матрице A (енг.* spectral radius*) је максимум модула сопствених вредности.*

Спектрални радијус матрице не мора бити сопствена вредност чак и када су сопствене вредности матрице реалне. Спектрални радијус је радијус најмањег круга са центром у координатном почетку чија површ обухвата све сопствене вредности матрице. Овај круг се назива спектрални круг. Такође, спектрални радијус је једнак нули ако је матрица нилпотентна (видети Дефиницију 1.19), у супротном је строго позитиван. Уколико је матрица A ненегативна и неразложива, онда њен одговарајући диграф $D(A)$ има затворене шетње, па не може бити нилпотента тј. њен спектрални радијус је строго позитиван.

Перон-Фробениусова теорема (енг. Perron–Frobenius theorem) је најзначајнији резултат за сопствене векторе и сопствене вредности ненегативних матрица.

Теорема 1.1. *Претпоставимо да је A реална ненегативна неразложива матрица. Тада важе следећа тврђења:*

(i) *$\rho(A)$ је једнострука сопствена вредност од A. Ако је x сопствени вектор који одговара сопственој вредности ρ, онда су све координате вектора x различити од нуле и имају исти знак.*

(ii) *Ако је A_1 реална ненегативна $n \times n$ матрица таква да је $A_1 \leq A$, онда је $\rho(A_1) \leq \rho(A)$. Једнакост важи ако и само ако је $A_1 = A$.*

(iii) *Ако је θ сопствена вредност матрице A чији је модуо једнак $\rho(A)$, онда θ има облик $\theta = \rho(A)e^{\frac{2\pi i r}{m}}$ за неко $0 \leq r \leq m-1$. Штавише, сви циклуси у $D(A)$ имају дужину која је дељива са m.*

У даљем делу одељка ћемо дискутовати о неким применама Перон-Фробенијусове теореме.

Теорема 1.2 ([36])**.** *Нека је A матрица суседства повезаног графа X и нека је ρ спектрални радијус матрице A. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(i) *X је бипартитан.*

(ii) *Спектар матрице A је симетричан у односу на 0, тј. за сваку сопствену вредност θ, вредност $-\theta$ је такође сопствена вредност матрице A исте вишеструкости.*

(iii) *$-\rho$ је сопствена вредност матрице A.*

Теорема 1.3. *Нека је A ненегативна неразложива матрица реда n. Тада је*

$$\min_{1 \leq i \leq n} r_i \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} r_i,$$

где је $r_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ и $\rho(A)$ спектрални радијус матрице A. Једнакост на левој страни важи ако и само ако важи на десној и то само када је $r_1 = r_2 = \cdots = r_n$.

Ако је граф $k-$регуларан, тада је сума елемената врста матрице једнака константи k, тј. $r_1 = r_2 = \cdots = r_n$, па је у претходној теореми задовољена једнакост, односно $\rho(A) = k$. Према Теореми 1.1 (део (i)) важи да једнострукој сопственој вредности k одговара сопствени вектор који се састоји од јединица (што се лако показује), а сви остали вектори су њему ортогонални. Специјално, из претходне дискусије закључујемо да је $k-$регуларни граф бипартитан ако и само ако је $-k$ сопствена вредност матрице суседства графа.

У наставку ћемо размотрити тему јако регуларних графова прегледом основних резултата из ове теорије који ће бити даље коришћени у трећем поглављу. $r-$регуларни граф реда n назива се *јако регуларним* (енг. strongly regular) са параметрима (n, r, a, c) ако није комплетан, нити празан, а сваки пар суседних чворова има a заједничких суседа и сваки пар несуседних чворова има c заједничких суседних чворова.

Параметри јако регуларног графа нису независни један од другог. Заправо, између њих важе неједнакости $n-1 > r \geq c \geq 0$ и $r-1 \geq a \geq 0$. Штавише, може се добити следећа сложенија релација

$$r(r-a-1) = (n-r-1)c. \tag{1.1}$$

За више детаља погледати једначину (10.1) у [36, стр. 219].

Јако регуларни граф X назива се *примитиван* (енг. primitive) ако је сваки од графова X и $\overline{X}$ повезан, а у супротном је *непримитиван* (енг. imprimitive). Следећа лема даје карактеризацију класа непримитивних јако регуларних графова.

Лема 1.1. *[36] Нека је X јако регуларни граф са параметрима (n, r, a, c). Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

(a) X није повезан;

(б) $c = 0$;

(ц) $a = r - 1$;

(g) X је изоморфан са mK_{r+1}, за $m \geq 2$.

Једноставно се може показати да ако је X јако регуларан са параметрима (n, r, a, c), тада је и његов комплемент $\overline{X}$ јако регуларан са параметрима $(n, \overline{r}, \overline{a}, \overline{c})$, где је $\overline{r} = n - r - 1$, $\overline{a} = n - 2 - 2r + c$ и $\overline{c} = n - 2r + a$.

Лема 1.2. *[26] Повезан регуларни граф је јако регуларан ако и само ако има тачно три различите сопствене вредности.*

За јако регуларни граф X са параметрима (n, r, a, c), са r, θ и τ означавамо три различите сопствене вредности његове матрице суседства.

Лема 1.3. *[36] Матрица суседства јако регуларног графа са параметрима (n, r, a, c) има сопствене вредности r, θ и τ, које су дате формулама*

$$\theta = \frac{a - c + \sqrt{\Delta}}{2},$$
$$\tau = \frac{a - c - \sqrt{\Delta}}{2},$$

где је $\Delta = (a - c)^2 + 4(r - c)$.

Приметимо да из горњих формула следи да је

$$\theta\tau = c - r. \tag{1.2}$$

Будући да је $c \leq r$, важи да су θ и τ супротног знака, ако важи да је $\theta\tau \neq 0$.

Како је вишеструкост сопствене вредности r једнака 1 и збир сопствених вредности једнак трагу матрице суседства (што је једнако нули), вишеструкост се може израчунати на следећи начин

$$m_\theta + m_\tau = n - 1,$$
$$m_\theta\theta + m_\tau\tau = -r. \tag{1.3}$$

Из горњих израза можемо добити релацију (10.2) из [36], тј.

$$m_\theta = -\frac{(n-1)\tau + r}{\theta - \tau}, \quad m_\tau = \frac{(n-1)\theta + r}{\theta - \tau}. \tag{1.4}$$

Користећи ове једначине заједно са (1.1), можемо добити врло корисну релацију

$$m_\theta m_\tau (\theta - \tau)^2 = nr\overline{r}. \tag{1.5}$$

Релације (1.4) и (1.5) ће бити коришћене у Теореми 3.6.

(Два) блок-дизајн (енг. block-design) је фамилија Λ од b подскупова (блокова) скупа $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$, таква да за неке природне бројеве k и λ важе следећа својства:

i) сваки подскуп има k елемената;

ii) сваки пар елемената из S се налази у тачно λ подскупова.

У трећем поглављу ћемо користити следећу теорему:

Теорема 1.4. *[36] Сваки елеменӣ скуӣа S некоӣ блок-дизајна се ӣојављује у ӣачно r блокова, ӣри чему је*

$$r(k-1) = \lambda(v-1) \quad \text{и} \quad bk = vr.$$

Ако је $b = v$, онда блок-дизајн називамо *симеӣричним*. Ако је блок-дизајн симетричан, из претходне теореме следи $k = r$. Дакле, симетрични блок-дизајн се означава тројком параметара (v, k, λ).

Граф инциденције X блок-дизајна је граф чији је скуп чворова $S \cup \Lambda$, у којем су два чвора $x \in S$ и $B \in \Lambda$ суседна ако је $x \in B$. Граф инциденције блок-дизајна је бипартитни граф и његова матрица суседства има четири различите сопствене вредности.

1.3 Специјалне матрице теорије графова

У овом одељку дајемо преглед резултата о типовима матрица које се користе у другом и трећем поглављу. Већина резултата у овом одељку преузета је из [54].

Матрица димензије $m \times n$ чији су сви елементи једнаки нули назива се *нула-матрица* и означава се $O_{m\times n}$.

Матрица димензије $m \times n$ чији су сви елементи једнаки јединици назива се *један-матрица* и означава се $J_{m\times n}$.

Квадратна матрица реда n чији су сви елементи једнаки нули осим елемената на главној дијагонали који су једнаки јединици, назива се *иденӣичка маӣрица* (енг. identity matrix) и означава се I_n.

Квадратна матрица реда n која у свакој врсти и колони има само један елемент једнак јединици док су сви остали елементи једнаки нули, назива се *ӣермуӣациона маӣрица* (енг. permutation matrix) и означава се P_n (или само P ако се зна о ком реду матрице је реч).

Дефиниција 1.17. *Ако је A маӣрица димензије $m \times n$, ӣада се маӣрица B димензије $n \times m$ назива ӣрансӣонованом маӣрицом маӣрице A и обележава A^T, ако је сваки елеменӣ на ӣозицији (i, j) маӣрице B једнак елеменӣу (j, i) маӣрице A, ӣј. $b_{ji} = a_{ij}$.*

Дефиниција 1.18. *Ако је A маӣрица димензије $m \times n$ са комӣлексним елеменӣима, маӣрица C димензије $m \times n$, ӣде је $c_{ij} = \overline{a_{ij}}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, назива се коњуӣованом маӣрицом маӣрице A и обележава се са $\overline{A}$.*

Матрица $\overline{A^T}$ се назива коњуговано-транспонованом матрицом матрице A и означава се са A^H.

На основу горње дефиниције можемо рећи да је матрица симетрична ако је $A^T = A$.

У остатку одељка дајемо дефиниције неких специјалних типова матрица које ће бити коришћене у даљем тексту.

Дефиниција 1.19. *Кажемо да је квадратна матица A:*

i) *косо-симетрична ако је $A^T = -A$;*

ii) *ортогонална ако је $A^T A = I$;*

iii) *нилпотентна ако је $A^k = O$ за неки природан број k;*

iv) *идемпотентна ако је $A^2 = A$;*

v) *нормална ако је $AA^H = A^H A$;*

vi) *хермитска ако је $A^H = A$.*

Дефиниција 1.20. *Квадратна матрица $C = [c_{ij}]$ реда n је циклична матрица (енг.* cyclic matrix*), ако су бројеви $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ такви да је $c_{ij} = c_{j-_n i}$, за $1 \leq i, j \leq n$, где смо са $-_n$ означили одузимање по модулу n.*

Према претходној дефиницији матрица C има следећи облик: друга врста матрице C се добија из прве на тај начин што се број c_{n-1} са последњег места пребаци на прво, а сви остали елементи помере за једно место удесно. На сличан начин се из друге добија трећа, итд. Из последње врсте се истим поступком добија прва врста. Дакле, врсте ове матрице су цикличне пермутације прве врсте па се овим објашњава њена циклична природа и оправданост увођења назива.

Дефиниција 1.21. *Квадратна матица A реда n се назива Теплицовом (енг.* Toeplitz matrix*) ако има једнаке вредности на свакој дијагонали, тј. ако је следећег облика*

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_{-(n-1)} & \cdots & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

У том случају кажемо да је Теплицова матрица генерисана елементима $a_{-(n-1)}, \ldots, a_{-1}, a_0, \ldots, a_{n-1}$, односно њеном првом колоном и врстом.

Означимо са P следећу пермутациону матрицу која је циклична:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{n-1\times 1} & I_{n-1} \\ I_1 & O_{1\times n-1} \end{bmatrix}.$$

Тврђење 1.1. *Свака циклична матрица је полином матрице P, тј. важи*

$$C = c_0 I_n + c_1 P + c_2 P^2 + \ldots + c_{n-1} P^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P^i. \tag{1.6}$$

Следећом лемом и теоремом се одређују сопствене вредности и сопствени вектори пермутационе и цикличне матрице, редом.

Лема 1.4. *Сопствене вредности пермутационе матрице P реда n су $1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$ ($\omega_n = e^{2\pi\imath/n}$), при чему сопствена вредност ω_n^i за $1 \le i \le n-1$ одговара сопственом вектору*

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{ji} e_j, \tag{1.7}$$

где су $e_1, e_2, \ldots, e_n$ $n \times 1$ вектори стандардне базе простора R^n.

Користећи репрезентацију (1.6) и Лему 1.4 можемо доказати теорему која одређује спектар цикличне матрице.

Теорема 1.5. *Сопствене вредности цикличне матрице дате репрезентацијом (1.6) једнаке су $f(\omega_n^i)$ ($1 \le i \le n-1$), где је $f(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1}$. Сопственој вредности $f(\omega_n^i)$ одговара сопствени вектор дат релацијом (1.7).*

Матрица је *интегрална* уколико су јој све сопствене вредности целобројне. Граф се назива *интегралним* (енг. integral graph) ако му је одговарајућа матрица суседства интегрална [40, 4].

У наредном тврђењу представљамо карактеризацију цикличних интегралних матрица.

Нека је D_n скуп свих позитивних делиоца броја n, мањих од n. Означимо са

$$G_n(d) = \{k \ : \ \mathrm{nzd}(k, n) = d, \ 1 \le k \le n-1\}.$$

Теорема 1.6. *Циклична ненегативна матрица C дата репрезентацијом (1.6), где су бројеви $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ рационални, је интегрална ако и само је $c_i = c_j$ за свако $i, j \in G_n(d)$ и произвољни делилац $d \in D_n$.*

На основу Теорема 1.5 и 1.6 може се показати да се j-та сопствена вредност матрице C може записати на следећи начин

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \omega_n^{ji} = \sum_{d \in D_n} c_d c(j, \frac{n}{d}), \tag{1.8}$$

где смо са c_d означили вредност c_i за свако $i \in G_n(d)$ и са $c(j,n) = \sum_{i \in G_n(1)} \omega_n^{ij}$. Израз $c(j,n)$ познат је под називом *Рамануџанова сума* (енг. Ramanujan's sum) ([41, стр. 55]). Рамануџанова сума се може записати формулом у затвореном облику

$$c(j,n) = \mu(t_{n,j}) \frac{\varphi(n)}{\varphi(t_{n,j})}, \quad t_{n,j} = \frac{n}{\mathrm{nzd}(n,j)}, \tag{1.9}$$

где са μ означавамо Мебијусову функцију (енг. Möbius function) дефинисану као

$$\mu(n) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1 \\ 0, & \text{ако је } n \text{ дељив квадратом простог броја} \\ (-1)^k, & \text{ако је } n \text{ производ } k \text{ различитих простих бројева.} \end{cases}$$

Можемо уочити следећа основна својства Рамануџанових функција која ће бити коришћена у наставку.

Тврђење 1.2. *За произвољне природне бројеве n, j и делилац d броја n, важи*

$$c(0, n/d) \;=\; \varphi(n/d), \tag{1.10}$$

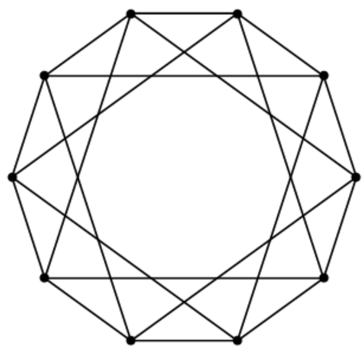
$$c(1, n/d) \;=\; \mu(n/d), \tag{1.11}$$

$$c(2, n/d) \;=\; \begin{cases} \mu(n/d), & n/d \in 2\mathbb{N}+1 \\ \mu(n/2d), & n/d \in 4\mathbb{N}+2 \\ 2\mu(n/2d), & n/d \in 4\mathbb{N} \end{cases} \tag{1.12}$$

$$c(n/p, n/d) \;=\; \begin{cases} \varphi(n/d), & p \mid d \\ -\frac{\varphi(n/d)}{p-1}, & p \nmid d. \end{cases} \tag{1.13}$$

Граф се назива *циркулантним* (енг. circulant) ако је он Кејлијев граф (енг. Cayley graph) циркулантне групе, односно ако је његова матрица суседства циклична. *Циркулантни граф* $G(n;S)$ је дефинисан скупом чворова $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ таквих да су чворови i и j суседни ако и само ако је $i-j \equiv s \pmod n$ за неко $s \in S$. Скуп S зовемо скупом *симбола* графа $G(n;S)$. Како тежиште нашег разматрања задржавамо на неусмереним графовима без петљи, претпоставићемо да је $S = n - S = \{n - s \mid s \in S\}$ и $0 \notin S$. Може се уочити да је степен графа $G(n;S)$ једнак $|S|$. Тежински циркулантни диграф $G(n;C)$ је тежински диграф реда n, чија је матрица суседства циклична, са првом врстом једнаком вектору $C = (c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

У случају нетежинских графова ($c_i \in \{0,1\}$), из Теореме 1.6 може се видети да је $G(n;C)$ интегралан ако и само ако важи да су два чвора a и b суседна уколико $a - b \in G_n(d)$ за неки $d \in D \subseteq D_n$. Одавде следи да је циркулантни граф са целобројним спектром једнозначно одређен редом n и скупом делилаца $D \subseteq D_n$, па их означавамо са $\mathrm{G}_n(D)$. Ако је $D = \{1\}$, онда се граф $\mathrm{G}_n(D)$ назива *унитарним Кејлијевим* (енг. unitary Cayley) и означава се са X_n [44, 62, 11, 6].



Слика 1: *Унитарни Кејлијев граф са* 10 *чворова*

1.4 Графовске операције и декомпозиције

У овом одељку најпре дајемо преглед резултата важнијих графовских операција (пре свега производа) и разматрамо у каквом су односу спектрална својства графовских матрица са графовском матрицом производа. Већина резултата овог пододељка преузета је из [54, 64].

Кронекерски (енг. Kronecker*), Декартов (енг.* Cartesian*), лексикографски (енг.* lexicographic product*) и јаки производ (енг.* strong product*)* графова G и H, означени са $G \otimes H$, $G \times H$, $G \bullet H$ и $G \boxplus H$, редом, дефинишу се као графови чији су скупови чворова $V(G) \times V(H)$, а дефиниције скупова грана су дате у следећој табели.

тип производа	симбол	$((g,h),(g',h')) \in E(G \square H)$
Кронекерски	$G \otimes H$	$(g,g') \in E(G) \wedge (h,h') \in E(H))$
Декартов	$G \times H$	$(g=g',(h,h') \in E(H)) \vee ((g,g') \in E(G), h=h')$
Лексикографски	$G \bullet H$	$(g,g') \in E(G) \vee (g=g',(h,h') \in E(H))$
Јаки производ	$G \boxtimes H$	$((g,h),(g',h')) \in E(G \times H) \cup E(G \otimes H)$

Графове G и H називамо фактор-графовима одређеног типа производа. У литератури се Кронекерски производ налази и под називима тензорски (енг. tensor) и директни (енг. direct) производ.

Дефиниција 1.22. *Кронекерски производ матрице A реда n и матрице B реда m је матрица реда nm, у ознаци $A \otimes B$, чији је елемент на позицији (I,J) дефинисан $(A \otimes B)_{I,J} = A_{i,j}B_{k,l}$, где се индекси i,j,k и l добијају као остаци и количници при дељењу индекса I и J са m, тј. $I = m(i-1)+k$, $J = m(j-1)+l$, $0 \leq l,k \leq m-1$.*

Кронекерска сума матрица A реда n и матрице B реда m је матрица реда nm, у ознаци $A \oplus B$, се дефинише као матрични збир Кронкерских производа матрица $A \otimes I_m$ и $B \otimes I_n$, тј.

$$A \oplus B = A \otimes I_m + B \otimes I_n.$$

У овом делу одељка дајемо релације између графовских матрица различитих типова производа и графовских матрица одговарајућих фактор-графова.

Матрица суседства Декартовог производа $G \times H$ је Кронекерска сума матрица суседства фактор-графова, тј. важи

$$A_{G \times H} = A_G \oplus A_H.$$

Нека су λ_i^G и λ_j^H сопствене вредности матрица A_G и A_H чије су одговарајући сопствени вектори v_i^G и v_j^H, редом, $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$. Тада се сопствене вредности и сопствени вектори матрице суседства графа $G \times H$ могу изразити у функцији сопствених вредности и сопствених вектора матрица суседства фактор-графова на следећи начин

$$A_{G \times H}(v_i^G \otimes v_j^H) = (\lambda_i^G + \lambda_j^H)(v_i^G \otimes v_j^H).$$

Матрица суседства Кронекерског производа $G \otimes H$ је Кронекерски производ матрица суседства фактор-графова, тј. важи

$$A_{G \otimes H} = A_G \otimes A_H.$$

Графови који се добијају као Кронекерски производ одређеног броја других графова у литератури су познати као *Кронекерски графови*. Пример Кронекерских графова су унитарни Кејлијеви графови за које важи

$$X_n \cong X_{p_1^{\alpha_1}} \otimes X_{p_2^{\alpha_2}} \otimes \cdots \otimes X_{p_k^{\alpha_k}}, \tag{1.14}$$

где је $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ канонска факторизација броја n. Ова особина је коришћена у раду [6] за налажење Хамилтонових контура унитарних Кејлијевих графова, а у дисертацији ће бити коришћена за налажење спектра ове класе графова на ефикасан начин.

Сопствене вредности и сопствени вектори матрице суседства графа $G \otimes H$ се могу изразити у функцији сопствених вредности и сопствених вектора матрица суседства фактор-графова

$$A_{G\otimes H}(v_i^G \otimes v_j^H) = (\lambda_i^G \lambda_j^H)(v_i^G \otimes v_j^H). \tag{1.15}$$

Матрица суседства јаког производа $G \boxtimes H$ се може добити коришћењем матрица суседства фактор графова, тј. важи

$$A_{G\boxtimes H} = A_G \oplus A_H + A_G \otimes A_H.$$

Сопствене вредности и сопствени вектори матрице суседства графа $G \boxtimes H$ се могу изразити у функцији сопствених вредности и сопствених вектора матрица суседства фактор-графова

$$A_{G\boxtimes H}(v_i^G \otimes v_j^H) = (\lambda_i^G + \lambda_j^H + \lambda_i^G \lambda_j^H)(v_i^G \otimes v_j^H).$$

За графове G и H реда n и m, редом, може се успоставити следећа релација између Лапласове матрице Декартовог производа $G \times H$ и Лапласових матрица фактор-графова

$$L_{G\times H} = L_G \otimes I_m + I_n \otimes L_H.$$

Нека су μ_i^G и μ_j^H сопствене вредности матрица L_G и L_H чије су одговарајући сопствени вектори ω_i^G и ω_j^H, редом, $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$. Тада се сопствене вредности и сопствени вектори Лапласове матице графа $G \times H$ могу изразити у функцији сопствених вредности и сопствених вектора Лапласове матрице фактор-графова на следећи начин, тј. важи

$$L_{G\times H}(\omega_i^G \otimes \omega_j^H) = (\mu_i^G + \mu_j^H)(\omega_i^G \otimes \omega_j^H).$$

За дати граф G, његов линијски граф (енг. line graph) $L(G)$ је граф такав да сваки чвор графа $L(G)$ представља грану у G и два чвора у $L(G)$ су суседна ако и само ако њима одговарајуће гране у G имају заједнички крајњи чвор (тј. инцидентне су).

За дату матрицу суседства A графа G подељену на блок-матрице једнаког реда
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix},$$
за граф H чија је матрица суседства дата са
$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & J - A_{1,2} \\ J - A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$
каже се да је добијен операцијом *Зајделовог пребацивања* (енг. Seidel switching) примењеном на граф G, у означи $\mathrm{SS}(G)$.

До краја одељка ћемо дати преглед матричних декомпозиција које користимо у раду.

Теорема 1.7. *(Спектрална декомпозиција, енг.* Spectral decomposition*) Свака нормална матрица A реда n може се на јединствен начин представити у облику*
$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k,$$
где су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ различити скалари (у општем случају комплексни бројеви) и $P_1, P_2, \ldots, P_k$ хермитске идемпотентне матрице различите од нула матрице, за које важе релације
$$P_i P_j = O_n,\ i \neq j,$$
$$P_1 + P_2 + \cdots + P_k = I.$$

Теорема 1.8. *(Сингуларна декомпозиција, енг.* Singular value decomposition*) Свака реална матрица A може се на јединствен начин представити као производ матрица $A = UDV^T$, где је матрица U реда m, матрица D димензије $m \times n$ и матрица V реда n за које важи*
$$U^T U = I_m,$$
$$V^T V = I_n.$$

Теорема 1.9. *(Циркуларна декомпозиција, енг.* Circulant decomposition*) Произвољна квадратна матрица A реда n се може представити као сума n цикличних матрица са релаксацијом (коефицијенти суме узимају вредности $n-$тог корена из јединице). Матрица A се може записати на следећи начин*

$$A = \sum_{j=1}^{n} C_j D_j,$$

где је C_j циклична матрица реда n и D_j дијагонална матрица за коју важи $D_j(p,p) = e^{i\frac{2jp}{n}}$.

1.5 Графовски модели

Традиционални неструктуирани предиктивни модели се не могу ваљано применити на многе проблеме из свакодневног живота кад излазне променљиве модела природно поседују структурирану зависност. Неструктуирани модели понекад имају стриктно дефинисане претпоставке, као што су независне и идентично расподељене случајне променљиве, што доводи често до ниске тачности у оптимизационим задацима модела. За разлику од неструктуираних предиктора, код структуираних модела оптимизациони задатак се састоји у истовременом предвиђању свих излаза на основу свих улазних података, коришћењем односа који постоје између вишеструких излаза. Најчешће, ти односи су зависни од конкретних примена, где су зависности унапред дефинисане и као такве могу бити представљене графовским моделима. У закључивању из просторно-временских података, неусмерени графовски модели (Markov Random Fields) [69] и једна њихова недавно предложена варијанта (Continuous Conditional Random Fields) [57] су међу најпопуларнијим графовским моделима. У овој дисертацији бавићемо се само неусмереним графовским моделима.

У неусмереним графовским моделима, као типовима структуираних модела, сваки од N вектора обележја $\mathrm{x} \in X \subseteq R^d$ (d је димензија вектора) интерагује са сваким од излаза $y_i \in R$, што је задато пресликавањем $f : X^N \to R^N$. Такође, излази имају другачију међусобну врсту утицаја. Ови односи између излаза дефинишу условну расподелу као функцију вектора обележја и излаза из којих се природно добија репрезентативан графовски модел. Условна расподела $P(\mathrm{y}|\mathrm{x})$ за графовски модел може бити представљена на следећи начин

$$P(\mathrm{y}|\mathrm{x}) = \frac{1}{Z(\mathrm{x}, \alpha, \beta)} exp\Big(\sum_{i=1}^{N} A(\alpha, y_i, \mathrm{x}) + \sum_{j\sim i} I(\beta, y_i, y_j, \mathrm{x})\Big),$$

где A представља функцију потенцијала придруживања K-димензионалног параметра α, I представља функцију интеракцијског потенцијала L-димензионалног параметра β, и $Z(\mathrm{x}, \alpha, \beta)$ је нормализована функција дефинисана са

$$Z(\mathrm{x}, \alpha, \beta) = \int\limits_{y} exp\Big(\sum_{i=1}^{N} A(\alpha, y_i, \mathrm{x}) + \sum_{j\sim i} I(\beta, y_i, y_j, \mathrm{x})\Big) dy.$$

Асоцијативни потенцијал A има сврху моделирања односа између улаза и излаза у подацима, док интеракцијски потенцијал I репрезентује интеракцију између излаза. У применама A и I се обично дефинишу као линеарна комбинација скупа фиксних функција f_k и g_l, где је $1 \leq k \leq K$ и $1 \leq l \leq M$ и представљају функције од α и β [46], тј.

$$A(\alpha, y_i, \mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k f_k(y_i, \mathrm{x}),$$
$$I(\beta, y_i, y_j, \mathrm{x}) = \sum_{l=1}^{M} \beta_l g_l(y_i, y_j, \mathrm{x}).$$

Доминација једног од потенцијала се огледа кроз тежине релевантних функција обележја, α_k и β_l, које ће бити утврђене у току процеса оптимизације. Тежине α_k и β_l такође имају утицај на функције обележја f_k и g_l унутар сваке од функција потенцијала, редом.

Ако су функције обележја дефинисане као квадратне функције од y [59], циљна функција $P(\mathrm{y}|\mathrm{x})$ постаје густина вероватноће вишедимензионалне Гаусове расподеле, где се оптимизациони задаци у закључивању могу обављати на ефикаснији начин. Овај модел је познат као Гаусов неусмерени графовски модел (у даљем тексту ГГМ). Овај модел се у литератури такође може срести и под називом Gaussian Conditional Random Field. У овом моделу, функција асоцијативног потенцијала је дефинисана као

$$A(\alpha, y_i, \mathrm{x}) = -\sum_{k=1}^{K} \alpha_k (y_i - R_k(\mathrm{x}))^2,$$

где је $R_k(\mathrm{x})$ k-ти неструктуирани предиктор (у применама он може бити: линеарна регресија, неуронска мрежа, итд.) који оцењује један излаз y_i узимајући у обзир x, док је функција интеракцијског потенцијала дата са

$$I(\beta, y_i, y_j, \mathrm{x}) = -\sum_{l=1}^{M} \beta_l S_{i,j}^l (y_i - y_j)^2, \tag{1.16}$$

где $S_{i,j}^l$ представља тежину између излаза y_i и y_j за l-ту тежинску матрицу суседства. Може се користити онолико матрица колико сматрамо да је неопходно за моделовање различитих типова сличности између излаза. Сада можемо закључити да је условна вероватноћа графовског модела дата са

$$P(\mathrm{y}|\mathrm{x}) = \frac{1}{Z(\mathrm{x}, \alpha, \beta)} exp\Big(-\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} \alpha_k (y_i - R_k(\mathrm{x}))^2 - \sum_{l=1}^{M}\sum_{j\sim i} \beta_l S_{ij}^l (y_i - y_j)^2\Big).$$

Овако дефинисани асоцијативни и интеракцијски потенцијал омогућава моделу да је форма условне вероватноће у ствари функција густине вероватноће мултиваријантне Гаусове расподеле, тј.

$$P(\mathrm{y}|\mathrm{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\, exp(-\frac{1}{2}(y-\mu)^T \Sigma^{-1} (y - \mu)),$$

где је Σ^{-1} инверз коваријансне матрице, тј.

$$\Sigma^{-1} = \begin{cases} 2\sum_{k} \alpha_k + 2\sum_{h}\sum_{l} \beta_l S_{ih}^l, & \text{ако } i = j \\ -2\sum_{l} \beta_l S_{ij}^l, & \text{ако } i \neq j \end{cases} \tag{1.17}$$

и μ очекивање расподеле

$$\mu = \Sigma b = 2\Sigma \sum_{k=1}^{K} \alpha_k R_k(\mathrm{x}). \tag{1.18}$$

За функцију оптимизације $P(\mathrm{y}|\mathrm{x})$ и дати скуп улаза и излаза $\mathcal{D} = (X, \mathrm{y}) = \{(x_i, y_i)\}_{1 \le i \le N}$, оптимизациони задатак састоји се у процени параметара α и β тако што се условна вероватноћа максимизира, тј.

$$argmax_{\alpha,\beta} \sum_{y} logP(\mathrm{y}|\mathrm{x}).$$

Да би оптимизациони проблем био решив за стварне вредности излаза, нормализациона функција Z мора бити интеграбилна. Оптимизациони проблеми и код модела са дискретним вредностима су увек решиви, јер је Z дефинисана као збир коначно много могућих вредности y. Једино преостало ограничење је да Σ^{-1} буде позитивно семидефинитна, што је довољан услов за конвексност функције густине. Један од начина да се осигура да је проблем решив јесте наметање ограничења у којем су параметри α и β већи од 0. У овом случају имамо проблем оптимизације са ограничењима. Дати оптимизациони проблем са ограничењима се може конвертовати у оптимизациони проблем без ограничења, применом техника из [57], односно експоненцијалним трансформацијама примењеним на параметре α и β.

Оптимални параметри се добијају коришћењем градијентног оптимизационог метода (алгоритам градијентног спуста). Да би се применио морају се наћи градијенти функције условне вероватноће, тј. њихови парцијани изводи првог реда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \, log \, P}{\partial \alpha_i} &= -\frac{1}{2}(\mathrm{y}^T\mathrm{y} + 2R_i^T(\mu - \mathrm{y}) + \mu^T\mu) + \frac{1}{2}Tr(Q^{-1}) \\ \frac{\partial \, log \, P}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2}(\mathrm{y}^T L\mathrm{y} + \mu^T L\mu) + \frac{1}{2}Tr(Q^{-1}L), \end{aligned} \tag{1.19}$$

где је $Q = \frac{\Sigma^{-1}}{2}$. Као што је показано у [59], максимална вредност $P(y|x)$ једнака је очекивању μ.

Поред наведених теоријских ограничења, главна препрека у одређивању оптимизационих параметара модела у реалним применама је велика рачунска сложеност модела када је он базиран на графовима великог реда. Алгоритам градијентног спуста захтева израчунавање инверзне матрице Q за коју је потребна временска сложеност $O(N^3)$ у свакој итерацији. Ако је број итерација означен са I, онда је укупно време оптимизационог процеса $O(IN^3)$.

Одређено побољшање сложености је дато у [34], у којем је разматран модел за $l = 1$ у (1.16). Овде укратко објашњавамо како се избегавају рачунски скупе операције налажења инверзне матрице унутар алгоритма градијентног спуста применом спектралне декомпозиције матрице Q. Из (1.17) лако је видети да се матрица Q може написати на следећи начин

$$Q = \sum_k \alpha_k I + \sum_l \beta_l L_l,$$

где је L_l Лапласова матрица чија је матрица суседства S^l. За $l = 1$, нека је $L_1 = L = UDU^T$ спектрална декомпозиција Лапласове матрице. Како је U ортонормална матрица онда је

$$Q = \sum_k \alpha_k I + \beta L = \sum_k \alpha_k UU^T + \beta UDU^T = U(\sum_k \alpha_k I + \beta D)U^T. \tag{1.20}$$

Дакле, сопствене вредности матрице Q су

$$\lambda_i = \sum_k \alpha_k + \beta d_i, \text{ за све } 1 \leq i \leq N,$$

где су d_i дијагонални елементи од D, односно сопствене вредности матрице L. Алгоритам захтева још један корак претпроцесирања у којем налазимо сопствене векторе U, тј. извршава се спектрална декомпозиција пре покретања алгоритма оптимизације, док се парцијални изводи првог реда (1.19) израчунавају у линеарном времену пошто могу бити изражени у функцији од скалара (сопствених вредности λ_i). На тај начин се избегава инверзија матрице Q. Временска сложеност овог модела је $O(N^3 + IN)$. Овај модел је знатно бржи од класичног модела, али ипак модел не може да ради са великим графовима, нарочито ако је њихов ред већи од неколико хиљада чворова. Такође, главни недостатак модела је способност да ради само са једном матрицом сличности дефинисаном између излаза, тј за $l = 1$ у (1.16). Такође, користећи релације (1.19) у случају $l = 1$ и $K = 1$, можемо извести формулу

$$\alpha(2y^T R - y^T y) - \beta y^T L y + \frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta d_i} = 0,$$

где су са c_i означене координате вектора предиктора R. Из ове једнакости се могу добро проценти почетне вредности параметара α и β приликом процеса оптимизације у графовском моделу коришћењем различитих неједнакости.

2 Графовски модели базирани на Кронекерским структурама

У овом поглављу изложени су нови резултати у вези налажења апроксимативних матрица нижег ранга, употребом графовских производа, које би апроксимирале Лапласову матрицу графа модела и задржале доминантна спектрална својства поменуте матрице у циљу добијања бољих перформанси модела. У првом одељку анализирана је спектрална декомпозиција Лапласове матрице Кронекерског производа графова, с обзиром на то да се она не може окарактерисати употребом спектралне декомпозиције његових фактор-графова (овај проблем се у литератури сматра отвореним проблемом). Због тога су у наставку одељка презентоване два методе за апроксимирање Лапласовог спектра и Лапласових сопствених вектора Кронекерског графа користећи спектре и сопствене векторе (нормализованих) Лапласових матрица његових фактор-графова. Ефективност предложених метода је евалуирана кроз одређивање њихове асимптотске сложености, као и кроз објашњење њиховог понашања у нумеричким експериментима у којима се израчунавају две врста метрика: коефицијенти корелације за апроксимиране сопствене векторе и релативне грешке за апроксимиране сопствене вредности. Такође су изложена теоријска објашњења о стабилности апроксимација спектра и сопствених вектора Лапласове матрице Кронекерских графова, па је с тим у вези доказано да се релативна грешка смањује у случајевима када ред графа расте, као и када се ниво гранске густине повећава, за фиксирани ред графа. У другом одељку дискутовано је како свака горе наведена апроксимација утиче на ефикасност модела у смислу тачности оцене параметара и брзине конвергенције градијентне методе. Ефикасност предложених метода ће бити евалуирана нумеричким експериментима најпре за Кронекерске графове модела добијене из генератора различитих синтетичких мрежа, а затим ће граф модела бити апроксимиран најближим

Кронекерским производом два графа у односу на Фробениусову норму. Приказани резултати су оригинални и базирани су на радовима [14, 15].

2.1 Процена Лапласовог спектра производа Кронекерских графова

У последњих двадесетак година важност проучавања спектра графова, као и њихове примене, забележене су у разним научним областима, посебно у областима као што су рачунарске науке, Интернет технологије, рачунарски вид, истраживање података, вештачка интелигенција, мултипроцесорски системи, статистичке базе података и многе друге. Једно од важних питања којим су се истраживачи опширно бавили јесте карактеризација спектралних својстава графовских производа коришћењем њихових фактор-графова. Са друге стране, једна од најпроучаванијих тема у области спектра графова деценијама је спектар Лапласове матрице због њене вишеструке примене. Резултати из области спектралне теорије Лапласових матрица су нашли примену у широком спектру других проблема, од структуралних проблема, као што су одређивање броја разапињућих стабала, израчунавање отпорних растојања (енг. resistance distance), налажење структурних заједница, до различитих динамичких проблема [1, 11, 53]. Неке односе између спектралних својстава графовских производа и спектралних својстава њихових фактор-графова дали смо у одељку 1.4. У раду [35], аутори су покушали да искористе могућност Кронекерске репрезентације графа, која је коришћена као замена за вишеслојне мреже. Међутим, аутори су се у раду суочили са до сада отвореним проблемом карактеризације Лапласовог спектра Кронекерског производа два графа коришћењем Лапласовог спектра фактор-графова. У [5], аутори су дали експлицитну потпуну карактеризацију Лапласовог спектра Кронекерског производа два графа у неким специјалним случајевима. Пошто се чини да се експлицитна формула не може добити у општем случају, у [64] су аутори развили емпиријске методе за процену Лапласовог спектра Кронекерских графова из спектралних својстава њихових фактор-графова.

У овом одељку развијамо алтернативне практичне методе за процену Лапласовог спектра и сопствених вектора Кронекерског производа два графа. Може се приметити да процењене сопствене вредности и сопствени вектори ових апроксимација показују различито понашање у зависности од врсте графова на којима су примењене. Ефикасност предложених метода се оцењују кроз нумеричке експерименте, где се експерименти изводе на три врсте графова: Ердош-Рени (енг. Erdos-

Rényi), Барабаши-Алберт (енг. Barabási-Albert) и Ватц-Строгац (енг. Watts-Strogatz), док су нивои гранских густина 10%, 30%, и 65% (број грана графа у односу на број грана комплетног графа датог реда). Такође ће бити упоређено понашање различитих апроксимационих метода из литературе. Најпре, дајемо емпиријске и теоријске доказе да се Кронекерски производ сопствених вектора (нормализованих) Лапласових матрица фактор-графова може користити као апроксимација за сопствене векторе Лапласове матрице Кронекерског производа графова. То се може урадити упоређивањем коефицијената корелације који одговарају апроксимираним векторима за све апроксимације у односу на различите типове и нивое гранских густина графова. Даље, да би се тестирала блискост процене у односу на оригиналне сопствене вредности Лапласове матрице Кронекерског производа графова за обе апроксимације, презентоване су разлике између њих у терминима расподела релативних грешака. Показује се да је расподела релативних грешака између процењених и оригиналних спектара стабилна и равномерно распоређена око 0 за све типове графова. Такође ћемо презентовати доказ да обе апроксимације дају разумне процене Лапласовог спектра, јер се релативне грешке процењених сопствених вредности налазе у опсегу $\pm 10\%$ за значајну већину сопствених вредности и то са малим варијацијама у зависности од типа и нивоа гранских густина. Штавише, доказујемо да се проценти грешака смањују када ред графа расте или се ниво гранске густине повећава за Ердош-Рени рандом графове (исто тврђење се може показати и за остале типове случајних графова).

2.1.1 Процена спектра коришћењем Кронекерског производа сопствених вектора Лапласових матрица фактор-графова

У даљем тексту ћемо објаснити мотивацију и претпоставке из [64] за увођење предложене апроксимације. Лапласова матрица Кронекерског производа графова је дата са

$$
\begin{aligned}
L_{G\otimes H} &= D_{G\otimes H} - A_{G\otimes H} \\
&= (D_G \otimes D_H) - (A_G \otimes A_H) \\
&= D_G \otimes D_H - (D_G - L_G) \otimes (D_H - L_H) \\
&= L_G \otimes D_H + D_G \otimes L_H - L_G \otimes L_H,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где су A_G и A_H тежинске матрице суседства, а D_G и D_H су дијагоналне матрице степена графова G и H, редом, чији су редови n_1 и n_2, редом. Идеја за предложене апроксимације састоји се у претпоставци да се вектори $w_i^G \otimes w_j^H$ (w_i^G и w_j^H су произвољни сопствени вектори матрица

L_G и L_H, редом) могу искористити као замена за стварне сопствене векторе $L_{G\otimes H}$. Нека су W_G и W_H квадратне матрице редова n_1 и n_2, редом, које садрже све векторе w_i^G и w_j^H у колонома матрица, редом. Користећи (2.1) и апроксимацију $D_G W_G \approx W_G D_G$ и $D_H W_H \approx W_H D_H$, након краћег рачуна може се добити релација

(2.2)
$$L_{G\otimes H}(W_G \otimes W_H) \approx (W_G \otimes W_H)\Big(\Lambda_G \otimes D_H + D_G \otimes \Lambda_H - \Lambda_G \otimes \Lambda_H\Big),$$

где су Λ_G и Λ_H дијагоналне матрице које на дијагонали садрже сопствене вредности μ_i^G матрице L_G и μ_j^H матрице L_H, редом. Из последње једнакости, апроксимирани Лапласов спектар графа $G \otimes H$ може бити израчунат као

$$\mu_{ij} = \{\mu_i^G d_j^H + d_i^G \mu_j^H - \mu_i^G \mu_j^H\}, \tag{2.3}$$

где су d_i^G и d_j^H дијагонални елементи матрица D_G и D_H, редом. Када се сопствене вредности сортирају у растућем редоследу, добија се хеуристичка метода која је најефикаснија.

Из (2.3) се лако може видети да процењени спектар увек има сопствену вредност 0, јер ако је $\mu_i^G = 0$ и $\mu_j^H = 0$, онда је и $\mu_{ij} = 0$. Међутим, у [64] није коментарисано да ли су све остале процењене сопствене вредности μ_{ij} веће или једнаке 0. Приметимо да се (2.3) може преформулисати као

$$\mu_i^G(d_j^H - \frac{\mu_j^H}{2}) + \mu_j^H(d_i^G - \frac{\mu_i^G}{2}) \ \text{ за } 1 \le i \le n_1,\ 1 \le j \le n_2.$$

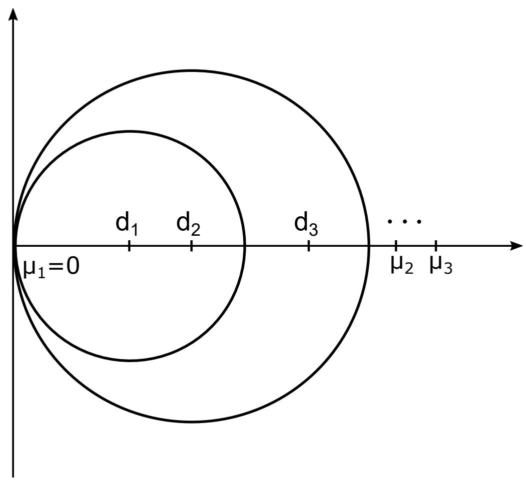
Ако је граф регуларан, онда су апсолутне вредности његових сопствених вредности матрице суседства мање или једнаке регуларности графа (према Перон-Фробенијусовој теореми), па је на основу тога јасно из дефиниција Лапласове матрице да су све Лапласове сопствене вредности мање или једнаке двострукој вредности регуларности. То подразумева да у случају када су G и H регуларни, важи да је $d_j^H \ge \frac{\mu_j^H}{2}$ и $d_i^G \ge \frac{\mu_i^G}{2}$, а самим тим и $\mu_{ij} \ge 0$. У следећем делу доказујемо да су ове сопствене вредности ненегативне у општем случају.

Применом Гершгоринове теореме о круговима (енг. Gershgorin circle theorem) на Лапласову матрицу, можемо добити само неједнакост $d_{n_1}^G - \frac{\mu_{n_1}^G}{2} \ge 0$ (или еквивалентно $\mu_{n_1}^G \le 2d_{n_1}^G$). Заиста, како свака сопствана вредност $n_1 \times n_1$ Лапласове матрице $L = (l_{i,j})_{1\le i,j\le n_1}$ лежи унутар уније кругова са центрима у $l_{i,i} = d_i^G$ и полупречницима $R_i = d_i^G$ (R_i је збир апсолутних вредности недијагоналних елемената у i-тој врсти за $1 \leq i \leq n_1$), не можемо закључити да свака сопствена вредност μ_i^G лежи у кругу са центром у d_i^G и полупречником d_i^G, тј. $\mu_i^G \leq 2d_i^G$, $1 \leq i \leq n_1 - 1$ (слика 2) .

Неједнакост $\mu_i^G \leq 2d_i^G$ се може доказати користећи Courant-Fischer теорему за сваки индекс i. Наиме, лако је видети да се квадратна форма $x^T Lx$ Лапласове матрице L за произвољан вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ може записати на следећи начин

$$x^T Lx = \sum_{j=1}^{n_1} d_j^G x_j^2 - 2 \sum_{(i,j)\in E(G)} x_i x_j.$$

Сада, користећи неједнакости између аритметичке и геометријске средине за x_i и x_j, $|2x_i x_j| \leq x_i^2 + x_j^2$, важи да је $-2\sum_{(i,j)\in E(G)} x_i x_j \leq \sum_{j=1}^{n_1} d_j^G x_j^2$ и стога $x^T Lx \leq 2\sum_{j=1}^{n_1} d_j^G x_j^2$. Штавише, узимајући у обзир $x \in R^i \times \{0\}^{n-i} \subseteq R^n$, имамо у овом случају да је $x^T Lx \leq 2\sum_{j=1}^{i} d_j^G x_j^2 \leq 2d_i^G \|x\|^2$. Коначно, према Courant-Fischer теореми имамо да је $\mu_i^G \leq \max_{k\in R^i\times\{0\}^{n-i}} \frac{x^T Lx}{\|x\|^2} \leq \frac{2d_i^G \|x\|^2}{\|x\|^2} = 2d_i^G$ (већ смо поменули да је низ степена растући, па је зато $d_1^G \leq \cdots \leq d_{n_1}^G$).



Слика 2: Гершгоринови дискови за Лапласову матрицу

Апроксимације из [64] су изведене уз одређене апроксимативне претпоставке, али из емпиријских доказа добро понашање процењених сопствених вредности и сопствених вектора је примећено за одређене класе графова који добро апроксимирају реалне мреже.

2.1.2 Процена спектра коришћењем Кронекерског производа сопствених вектора нормализованих Лапласових матрица фактор-графова

У овом одељку се предлаже алтернативни приступ за процену Лапласовог спектра Кронекерског производа графова. Идеја долази из чињенице да се нормализована Лапласова матрица Кронекерског производа графова може представити у функцији нормализованих Лапласових матрица фактор-графова. Штавише, у неким случајевима Кронекерски производ сопствених вектора $\mathcal{L}_G$ и $\mathcal{L}_H$ даје боље апроксимације за сопствене векторе $L_{G\otimes H}$ од Кронекерског производа сопствених вектора матрица L_G и L_H. Сада ћемо детаљније објаснити мотивацију и претпоставке за овај нови приступ.

На основу дефиниције нормализоване Лапласове матрице и релације $(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$, важи да се нормализована Лапласова матрица $\mathcal{L}_{G\otimes H}$ може записати на следећи начин

$$\mathcal{L}_{G\otimes H} = I_{n_1} \otimes I_{n_2} - (D_G^{-\frac{1}{2}} \otimes D_H^{-\frac{1}{2}})(G \otimes H)(D_G^{-\frac{1}{2}} \otimes D_H^{-\frac{1}{2}}).$$

Користећи својство Кронекерског производа матрица, $(A\otimes B)(C\otimes D) = AC \otimes BD$, даље добијамо

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{G\otimes H} &= I_{n_1} \otimes I_{n_2} - (D_G^{-\frac{1}{2}} G D_G^{-\frac{1}{2}}) \otimes (D_H^{-\frac{1}{2}} H D_H^{-\frac{1}{2}}) \\ &= I_{n_1} \otimes I_{n_2} - (I_{n_1} - \mathcal{L}_G) \otimes (I_{n_2} - \mathcal{L}_H).\end{aligned}$$

Нека су $\{\lambda_i^G\}$ и $\{\lambda_j^H\}$ сопствене вредности матрица $\mathcal{L}_G$ и $\mathcal{L}_H$, са одговарајућим сопственим векторима $\{v_i^G\}$ и $\{v_j^H\}$, где је $1 \leq i \leq n_1$ и $1 \leq j \leq n_2$. Означимо са Λ_G и Λ_H дијагоналне матрице чији су дијагонални елементи вредности $1 - \lambda_i^G$ и $1 - \lambda_j^H$, редом. Такође, са V_G и V_H означимо квадратне матрице које садрже v_i^G и v_j^H као векторе колоне. Помоћу спектралне декомпозиција матрице $(I_{n_1} - \mathcal{L}_G) \otimes (I_{n_2} - \mathcal{L}_H)$, из горње једначине следи да је

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{G\otimes H} &= I_{n_1} \otimes I_{n_2} - (V_G \Lambda_G V_G^T) \otimes (V_H \Lambda_H V_H^T) \\ &= I_{n_1} \otimes I_{n_2} - (V_G \otimes V_H)(\Lambda_G \otimes \Lambda_H)(V_G \otimes V_H)^T \\ &= (V_G \otimes V_H)(I_{n_1} \otimes I_{n_2} - \Lambda_G \otimes \Lambda_H)(V_G \otimes V_H)^T,\end{aligned} \tag{2.4}$$

пошто је $(V_G \otimes V_H)(V_G \otimes V_H)^T = I_{n_1 n_2}$. Ово даље имплицира да нормализована Лапласова матрица Кронекерског производа графова има $\{1-(1-\lambda_i^G)(1-\lambda_j^H)\}$ као сопствене вредности и $\{v_i^G \otimes v_j^H\}$ као сопствене векторе.

Сада означимо са $\Lambda = I_{n_1} \otimes I_{n_2} - \Lambda_G \otimes \Lambda_H$ и $D = D_G \otimes D_H$. Добро је познато да нормализована Лапласова матрица може бити изражена у функцији Лапласове матрице као $\mathcal{L} = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}$. Штавише, како је $L_{G\otimes H}(V_G \otimes V_H) = D^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_{G\otimes H} D^{\frac{1}{2}} (V_G \otimes V_H)$, користећи претпоставку да је $D_G^{\frac{1}{2}} V_G \approx V_G D_G^{\frac{1}{2}}$ и $D_H^{\frac{1}{2}} V_H \approx V_H D_H^{\frac{1}{2}}$, из (2.4) даље изводимо

$$L_{G\otimes H}(V_G \otimes V_H) \approx D^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_{G\otimes H} (V_G \otimes V_H) D^{\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}} \Lambda (V_G \otimes V_H) D^{\frac{1}{2}}.$$

Коначно, примењујући исту претпоставку добијамо

$$L_{G\otimes H}(V_G \otimes V_H) \approx (D\Lambda)(V_G \otimes V_H). \tag{2.5}$$

Унутар првог пара заграда на десној страни релације (2.5) је дијагонална матрица $D\Lambda$ која нас води до потенцијалне формуле за процену Лапласовог спектра Кронекерског производа графова, док за одговарајуће сопствене векторе можемо користити сопствене векторе нормализованих Лапласових матрица Кронекерског производа графова. Стога, потенцијална формула за процену Лапласовог спектра Кронекерског производа графова изгледа

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \{(1 - (1 - \lambda_i^G)(1 - \lambda_j^H)) d_i^G d_j^H\} \\ &= \{(\lambda_i^G + \lambda_j^H - \lambda_i^G \lambda_j^H) d_i^G d_j^H\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ове апроксимиране вредности су очигледно ненегативне. Штавише, најмања сопствена вредност Лапласове матрице једнака је 0, као и у случају апроксимираног спектра из (2.6).

Слично као у [64] ова апроксимација има својство да је редослед за v_i^G и v_j^H у V_G и V_H (и стога λ_i^G и λ_j^H) независан од редоследа чворова у D_G и D_H, редом, те би било непрактично покушавати да се пронађе прави оптимални поредак. Тестирано је следећих пет хеуристичких метода које користе само степене и сопствене вредности фактор графова: *некорелисани редослед*, *корелисани редослед*, *корелисани редослед са рандомизацијом*, *антикорелисани редослед* и *антикорелисани редослед са рандомизацијом*. У сваком од метода се претпоставља да су низови степена (d_i^G и d_j^H) већ сортирани у растућем поретку, док се редослед сопствених вредности (λ_i^G и λ_j^H) мења на горе описане начине. Испоставило се да су најефикасније методе оне у којима су степени и сопствене вредности директно корелисани (λ_i^G и λ_j^H су сортиране у растућем поретку), што је слично апроксимационом спектру добијеном у [64].

2.1.3 Израчунавање процењених сопствених вредности и сопствених вектора

У овом одељку презентујемо резултате који показују понашање процењених сопствених вредности и сопствених вектора, коришћењем претходно приказаних апроксимација и поредимо их са оригиналним вредностима с обзиром на различите типове графова и различите нивое гранских густина. Овим експериментима циљ нам је да покажемо следеће:

- колико су оригинални сопствени вектори Лапласове матрице Кронекерског производа графова блиски процењеним. Да бисмо то урадили рачунамо расподелу векторских коефицијената корелације између $v_i^G \otimes v_j^H$ и $L_{G\otimes H}(v_i^G \otimes v_j^H)$ као што је то урађено за сопствене векторе $w_i^G \otimes w_j^H$ у [64]. У остатку одељка дајемо емпиријске и неке теоријске доказе да сопствени вектори $v_i^G \otimes v_j^H$ такође могу бити коришћени као апроксимације за сопствене векторе $L_{G\otimes H}$;
- колико су процењене сопствене вредности блиске оригиналним сопственим вредностима Лапласових матрица Кронекерског производа графова за обе апроксимације. На основу одговарајућих процена спектара (2.3) и (2.6), разлика између процењених и оригиналних спектра је приказана у терминима расподеле релативних грешака између њих. Обе апроксимације су дале разумне процене Лапласовог спектра са релативним грешкама у опсегу $\pm 10\%$ за већину сопствених вредности. Ова вредност грешке важи и за ретке графове. Може се приметити да је ова грешка још мања за гушће графове, тј. да је у опсегу $\pm 5\%$ и $\pm 2\%$ када су нивои гранских густина 30% и 65%, редом. Такође смо приметили да је медијана релативних грешака процењеног Лапласовог спектра стабилнија него у случају спектра који је предложен у [64]. Штавише, дајемо теоријско објашњење зашто процентуалне грешке апроксимираних сопствених вредности које одговарају $v_i^G \otimes v_j^H$ за рандом графове постају бликсије стварним очекиваним вредностима у случају када ред графа расте или се ниво гранске густине повећава.

Експерименти су изведени на три типа графа: Ердош-Рени, Барабаши-Алберт и Ватц-Строгатц, док нивои гранских густина варирају у опсегу 10%, 30%, и 65%. Редови графова G и H означени су са n_1 и

n_2, редом, и експерименти се спроводе три пута за вредности редова $(n_1, n_2) \in \{(30, 50), (50, 100), (100, 200)\}$.

Ердош-Рени и Ватц-Строгатц графови

Овде описујемо понашање процењених сопствених вектора и сопствених вредности за обе класе графова, Ердош-Рени и Ватц-Строгатц, пошто се коефицијенти корелације процењених сопствених вектора и расподеле релативних грешака процењених сопствене вредности понашају слично за исту експерименталну поставку. Такође смо приметили нешто мање грешке у случају Ватц-Строгатц графова у односу на случај Ердош-Рени случајних графова. За дату Лапласову матрицу L, даље у раду под термином коефицијент корелације који одговара произвољном сопственом вектору x, означићемо коефицијенте корелације између вектора x и Lx. Такође се може приметити да је облик расподеле релативне грешке за ове две графовске топологије конзистентнији (без наглих скокова) за процењени спектар који одговара сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$, у односу за процењени спектар који одговара сопственим векторима $w_i^G \otimes w_j^H$. Најпре представљамо експерименталне, а затим и теоријске резултате за процењене сопствене векторе и сопствене вредности Ердош-Рени случајних графова.

Експериментални резултати за процењене сопствене векторе

Може се видети да је $w_1^G \otimes w_1^H$ сопствени вектор од $L_{G\otimes H}$, где су w_1^G и w_1^H сопствени вектори за L_G и L_H, редом, који одговарају сопственој вредности 0. Заиста, пошто је добро познато да је $w_1^G = 1_G$, $w_1^H = 1_H$, $D_G 1_G = A_G 1_G$ и $D_H 1_H = A_H 1_H$ онда добијамо да је

$$\begin{aligned} L_{G\otimes H}(w_1^G \otimes w_1^H) &= (D_G \otimes D_H - A_G \otimes A_H)(1_G \otimes 1_H) \\ &= D_G 1_G \otimes D_H 1_H - A_G 1_G \otimes A_H 1_H = 0. \end{aligned}$$

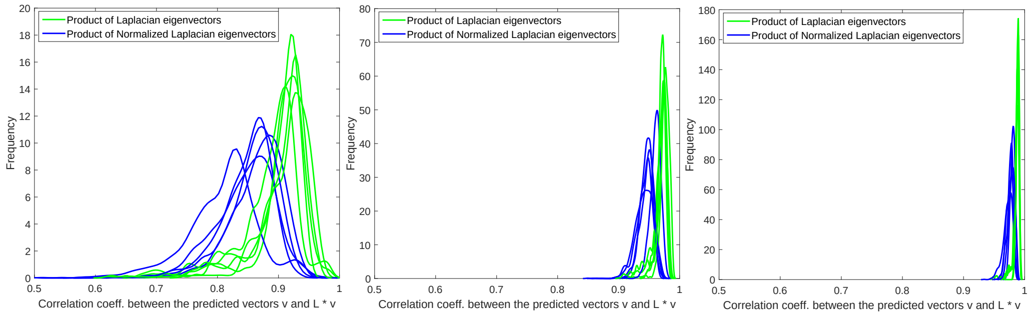
Слично можемо показати да $\mathcal{L}_G \cdot D_G^{\frac{1}{2}} 1_G = 0$ и $\mathcal{L}_H \cdot D_H^{\frac{1}{2}} 1_H = 0$. Заиста, имамо да важи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G \cdot D_G^{\frac{1}{2}} 1_G &= (I_G - D_G^{-\frac{1}{2}} A_G D_G^{-\frac{1}{2}})(D_G^{\frac{1}{2}} 1_G) \\ &= D_G^{\frac{1}{2}} 1_G - D_G^{-\frac{1}{2}} A_G 1_G \\ &= D_G^{\frac{1}{2}} 1_G - D_G^{-\frac{1}{2}} D_G 1_G = 0. \end{aligned}$$

Према томе, за $v_1^G = D_G^{\frac{1}{2}} 1_G$ и $v_1^H = D_H^{\frac{1}{2}} 1_H$ не важи да је $v_1^G \otimes v_1^H$ сопствени вектор од $L_{G\otimes H}$. Ипак, у испитивањима изостављамо коефицијент корелације који одговара векторима $w_1^G \otimes w_1^H$ и $v_1^G \otimes v_1^H$ у наредним експерименталним поставкама, јер се може експлицитно израчунати први сопствени вектор од $L_{G\otimes H}$. Штавише, не можемо тврдити у општем случају (на пример, када графови G и H нису регуларни) да се било који други апроксимациони вектор $w_i^G \otimes w_j^H$ или $v_i^G \otimes v_j^H$ поклапа са стварним сопственим вектором од $L_{G\otimes H}$.

Први скуп експеримената је изведен за поређење сопствених вектора две предложене апроксимације на ретким графовима, тј. понављањем сличног експеримента као у [64] у којем су узета два случајна Ердош-Рени графа који имају 50 чворова (100 грана) и 30 чворова (90 грана), редом. Лако се може видети да су нивои гранских густина ових графова око 10%. На слици 3 (леви део), могу се видети глатке функције густина вероватноћа коефицијената корелације између наведених сопствених вектора на основу пет независних нумеричких експеримената. Користећи поменуте параметре за процењене Лапласове сопствене векторе $v_i^G \otimes v_j^H$, коефицијенти корелације су у већини случајева изнад 0,8, док су максимуми функција постигнути за вредности изнад 0,9 (зелене пуне линије). За исте графове одређени су коефицијенти корелације сопствених вектора $v_i^G \otimes v_j^H$ и у већини случајева су изнад 0,7, док су максимуми постигнути у опсегу између 0,8 и 0,9 (плаве пуне линије). Штавише, на слици 3 се може видети да се коефицијенти корелације за сопствене векторе $v_i^G \otimes v_j^H$ повећавају и да се њихови графици транслирају удесно (према вредности 1) када се нивои гранских густина повећавају (средњи и десни део приказују графике за нивое гранских густина од 30% и 65%, редом).

Може се приметити да су вредности коефицијената корелације који одговарају сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$ и $w_i^G \otimes w_j^H$ симетрично дистрибуиране око максимума и да њихове глатке функције густине вероватноћа коефицијената корелације изгледају као густина вероватноће функције нормалне расподеле. Заиста, према Пирсоновом хи-квадрат тесту добијамо да већина коефицијената корелације који одговарају сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$ и $w_i^G \otimes w_j^H$ припада фитованој нормалној расподели за p-вредност од 0,05. Када су нивои гранских густина 10% за оба графа, 1380 од 1499 коефицијената корелације који одговарају сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$ припадају фитованој нормалној расподели. За нивое гранских густина од 30% и 65%, 1471 и 1496 од 1499 коефицијената корелације припадају фитованој нормалној расподели, редом. Са друге стране, када су нивои гранских густина 10% за оба графа, 1488 од 1499 коефицијената корелације који одговарају сопственим векторима $w_i^G \otimes w_j^H$ припадају фитованој нормалној расподели. За нивое гранских густина од 30% и 65%, 1476 и 1486 од 1499 коефицијената корелације припадају фитованој нормалној расподели,



Слика 3: Функције густине вероватноће коефицијената корелације између $w_i^G \otimes w_j^H$ и $L_{G\otimes H}(w_i^G \otimes w_j^H)$ су представљене зеленом пуном линијом, док између $v_i^G \otimes v_j^H$ и $L_{G\otimes H}(v_i^G \otimes v_j^H)$ су представљени плавом пуном линијом. Функције густине вероватноће су нацртане за сваку од нивоа гранских густина 10%, 30% и 65%, респективно, за Ердош-Рени случајне графове са 50 и 30 чворова.

редом. Штавише, за оба векторска производа се може доћи до сличног закључка у случају Ердош-Рени случајних графова који имају 50 и 100 чворова, као и 100 и 200 чворова.

Теоријски резултати за процену сопствених вектора

Увидом у изведене експерименте може се приметити да су неке од вредности коефицијената корелације које одговарају апроксимационим векторима $w_i^G \otimes w_j^H$ међусобно једнаке. Заиста, можемо експлицитно одредити вредности коефицијената корелације који одговарају векторима $w_1^G \otimes w_j^H$ и $w_i^G \otimes w_1^H$, за $2 \leq j \leq n_2$ и $2 \leq i \leq n_1$, и показати да не зависе од вектора w_j^H и w_i^G. У даљем тексту доказујемо да су коефицијенти корелације који одговарају векторима $w_1^G \otimes w_j^H$ и $w_i^G \otimes w_1^H$ зависе само од степена чворова G и H, редом.

Теорема 2.1. *Коефицијенти корелације $r_{1,j}$ $(2 \leq j \leq n_2)$ који одговарају векторима $L_{G\otimes H}(1_G \otimes w_j^H)$ и $1_G \otimes w_j^H$ су једнаки вредности*

$$\frac{\frac{d_1^G+\cdots+d_{n_1}^G}{n_1}}{\sqrt{\frac{{d_1^G}^2+\cdots+{d_{n_1}^G}^2}{n_1}}}.$$

Доказ. На основу чињенице да је $D_G 1_G = A_G 1_G = [d_1^G, \ldots, d_{n_1}^G]^T$, показујемо да су вектори $L_{G\otimes H}(w_1^G \otimes w_j^H)$ и $[d_1^G, \ldots, d_{n_1}^G]^T \otimes w_j^H$ колинеарни, тј. важи

$$
\begin{aligned}
L_{G\otimes H}(1_G \otimes w_j^H) &= (D_G \otimes D_H - A_G \otimes A_H)(1_G \otimes w_j^H)\\
&= (D_G 1_G) \otimes (D_H w_j^H) - (A_G 1_G) \otimes (A_H w_j^H)\\
&= [d_1^G, \ldots, d_{n_1}^G]^T \otimes (D_H - A_H) w_j^H\\
&= \mu_j^H [d_1^G, \ldots, d_{n_1}^G]^T \otimes w_j^H. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Према (2.7) важи следећи низ једнакости

$$
\begin{aligned}
r_{1,j} &= \frac{\langle L_{G\otimes H}(1_G \otimes w_j^H), 1_G \otimes w_j^H\rangle}{\|\mu_j^H [d_1^G, \ldots, d_{n_1}^G]^T \otimes w_j^H\| \cdot \|1_G \otimes w_j^H\|}\\
&= \frac{(\mu_j^H [d_1^G, \ldots, d_{n_1}^G] \otimes {w_j^H}^T) \cdot (1_G \otimes w_j^H)}{\mu_j^H \|[d_1^G, \ldots, d_{n_1}^G]\| \cdot \|1_G\| \cdot \|w_j^H\|^2}\\
&= \frac{(\mu_j^H [d_1^G, \ldots, d_{n_1}^G] 1_G) \otimes \|w_j^H\|^2}{\mu_j^H \sqrt{n_1} \|[d_1^G, \ldots, d_{n_1}^G]\| \cdot \|w_j^H\|^2}\\
&= \frac{\frac{d_1^G + \cdots + d_{n_1}^G}{n_1}}{\sqrt{\frac{{d_1^G}^2 + \cdots + {d_{n_1}^G}^2}{n_1}}}.
\end{aligned}
$$

□

Видимо да је $r_{1,j} = 1$ ако и само ако је аритметичка средина степена чворова G једнака њиховој геометријској средини, а добро је познато да је то тачно ако и само ако је G регуларан граф. Са друге стране, вредности $r_{1,j}$ могу бити веома мале у случају када постоји велики разлика између најмањег и највећег степена у графичком низу од G, $1 \leq d_1^G \leq \ldots \leq d_{n_1}^G \leq n_1 - 1$. На пример, разматрајући комплетан бипартитни граф $G = K_{1,n_1-1}$, израчунавањем аритметичке и геометријске средине степена чворова имамо да су оне $\frac{2n_1-2}{n_1}$ и $\sqrt{n_1 - 1}$, редом, одакле можемо закључити да $r_{1,j} = \frac{2\sqrt{n_1-1}}{n_1} \to 0$, када $n_1 \to \infty$. Међутим, ако величине партиције у бипартитном графу буду избалансиране (теже ка $n_1/2$) онда коефицијент $r_{1,j} \to 1$ (за илустрацију можемо узети $G = K_{2,n_1-2}$ и добити $r_{1,j} = \frac{2\sqrt{2n_1-4}}{n_1} > \frac{2\sqrt{n_1-1}}{n_1}$). Поред тога, може се приметити да се коефицијенти корелације не смањују са повећањем броја различитих степена чворова у G. Заиста, ако узмемо у обзир граф G са парним редом $n_1 = 2k + 2$ и графичким низом $1, 2, \ldots, k, k+1, k+1, k+2, \ldots, 2k+1$, може се утврдити да су аритметичка и геометријска средина једнаке $k+1$ и $\sqrt{\frac{(2k+1)(4k+3)+3(k+1)}{6}}$, редом. Стога, у овом случају добијамо високе коефицијенте корелације $r_{1,j} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{6(k+1)^2}}} \to \frac{\sqrt{3}}{2}$, $k \to \infty$.

Међутим, пошто смо добили коефицијенте корелације $r_{1,j}$ у експерименталним поставкама где смо користили синтетичке графове Ердош-Рени модела, у даљем тексту ћемо теоријски говорити о очекиваним вредностима коефицијената корелације $r_{1,j}$, користећи следећи помоћни резултат.

Тврђење 2.1 ([19] стр. 211)**.** *Претпоставимо да је X_n низ случајних променљивих таквих да припадају расподели $AN(\mu, c_n^2\Sigma)$ где је Σ је симетрична ненегативна позитивно дефинитина матрица и $c_n \to 0$ када $n \to \infty$. Ако је $g(X) = (g_1(X), \dots, g_m(X))'$ пресликавање из R^k у R^m тако да је свака функција g_i непрекидно-диференцијабилна у околини μ, и ако $D\Sigma D'$ има све дијагоналне елементе различите од нуле, где је D $m \times k$ матрица $[(\frac{\partial g_i}{\partial x_j})(\mu)]$, онда*

$$g(X_n) \text{ ima raspodelu } AN(g(\mu), c_n^2 D\Sigma D').$$

Теорема 2.2. *Ако је G Ердош-Рени модел графа, онда очекивана вредност коефицијента корелације $r_{1,j}$ који одговара векторима $L_{G\otimes H}(1_G \otimes v_j^H)$ и $1_G \otimes v_j^H$ тежи*

$$\sqrt{\frac{(n_1-1)p}{1-p+(n_1-1)p}}, \tag{2.8}$$

када $n_1 \to \infty$.

Доказ. Пошто је расподела степена било ког степена чвора Ердош-Рени графа $G = G(n_1, p)$ биномна, тј. $P(d_i^G = k) = \binom{n_1-1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k-1}$ и како је очекивање било ког степена чвора једнако очекивању аритметичке средине степена $Y_1 = \frac{d_1^G + \ldots + d_{n_1}^G}{n_1}$, закључујемо да је $E(Y_1) = (n_1-1)p$.

Штавише, како $n_1 \to \infty$, на основу централне граничне теореме Y_1 има асимптотску нормалну расподелу $AN(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$, где је $\mu_1 = E(Y_1)$ и $\sigma_1^2 = D(d_i^G) = (n_1-1)p(1-p)$ (E и D су стандардне ознаке за очекивање и дисперзију, редом). Слично, пошто ${d_i^G}^2$, $1 \le i \le n_1$, имају исту расподелу, закључујемо да $Y_2 = \frac{{d_1^G}^2 + \cdots + {d_{n_1}^G}^2}{n_1}$ има асимптотску нормалну расподелу $AN(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_1})$, где је $\mu_2 = E(Y_2) = E({d_i^G}^2)$ и $\sigma_2^2 = D({d_i^G}^2)$. Са друге стране, користећи $E({d_i^G}^2) = D(d_i^G) + E(d_i^G)^2$, имамо да је

$\mu_2 = (n_1-1)p(1-p)+(n_1-1)^2p^2$. Разматрајући дводимензионалну случајну промењиву $X_2 = [Y_1, Y_2]$ може се закључити да је њена асимптотска нормална расподела $AN([\mu_1, \mu_2]', c_n^2\Sigma)$, где Σ представља ненегативно дефинитну симетричну матрицу. Дефинишимо сада непрекидно-диференцијабилну функцију $g(y_1, y_2) = \frac{y_1}{\sqrt{y_2}}$. Коначно, користећи Пропозицију 2.1 закључујемо да $g(X_2)$ има асимптотску нормалну расподелу $AN(\mu_3, c_n^2 D\Sigma D')$, где је $\mu_3 = g(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_2}}$. Зато је очекивање коефицијента корелације $r_{1,j}$ једнако $E(g(X_2))$ (на основу Теореме 2.1), што тежи $\mu_3 = \sqrt{\frac{(n_1-1)p}{1-p+(n_1-1)p}}$, пошто $n_1 \to \infty$.

□

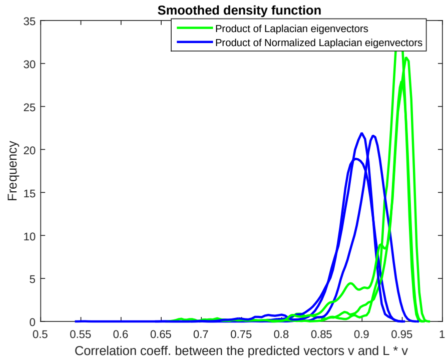
Ако запишемо израз (2.8) у облику $\sqrt{\frac{1}{\frac{1-p}{(n_1-1)p}+1}}$, закључујемо да очекивана вредност $r_{1,j}$ тежи ка 1 када ред графа расте, за фиксни грански ниво густине p. Зато показујемо да апроксимација $w_1^G \otimes w_j^H$, $2 \le j \le n_2$, постаје стабилнија за веће редове графова са константним нивоом гранске густине. Штавише, може се установити да коефицијенти корелације $r_{i,j}$ расту када су редови графова 50 и 100, редом (погледати слику 4). Исти закључак може се добити ако су редови графова 100 и 200, редом.

Слично, за дати ред n_1 графа G, записом израза (2.8) у форми $\sqrt{\frac{n_1-1}{\frac{1}{p}-1+(n_1-1)}}$, закључујемо да $r_{1,j} \to 1$, ако p тежи ка 1 и $r_{1,j} \to 0$, ако p тежи ка 0. Приметимо да смо већ добили општији закључак извођењем три врсте експеримената у којима коефицијенти корелације расту све док се повећава ниво гранске густина (за фиксно n_1). У датој експерименталној поставци p не може тежити 0 пошто разматрамо повезане графове. Наиме, праг за повезаност графа G је $\frac{\ln n_1}{n_1}$ (тачније, ако је $p > \frac{(1+\epsilon)\ln n_1}{n_1}$, онда ће граф G скоро сигурно бити повезан). Пошто параметри у експерименталној поставци задовољавају поменути услов, готово сигурно радимо са повезаним графовима, па након примене услова добијамо $r_{1,j} \ge \frac{1-\frac{1}{n_1}}{\frac{1}{(1+\epsilon)\ln n_1}+(1-\frac{2}{n_1})}$. Дакле, $r_{1,j} \to 1$, када $n_1 \to \infty$, одакле теоријски потврђујемо резултат експеримента да коефицијенти корелације $r_{1,j}$ расту све док расте ред повезаног Ердош-Рени графа.

Лема 2.1. *Скаларни производ вектора $L_{G\otimes H}(v_1^G \otimes v_j^H)$ и $v_1^G \otimes v_j^H$ је већи или једнак од*

$$({d_1^G}^2 + \cdots + {d_{n_1}^G}^2) \;\; {v_j^H}^T L_H v_j^H,$$

за $1 \le j \le n_2$. Једнакост важи ако и само ако је G регуларан.



Слика 4: Функције густине вероватноће коефицијената корелације између $w_i^G \otimes w_j^H$ и $L_{G\otimes H}(w_i^G \otimes w_j^H)$ су представљене зеленом пуном линијом, док су између $v_i^G \otimes v_j^H$ и $L_{G\otimes H}(v_i^G \otimes v_j^H)$ представљене плавом пуном линијом. Функције густине вероватноће су нацртане за ниво гранске густине од 10%, за Ердош-Рени случајне графове са 50 и 100 чворова.

Доказ. Како је $v_1^G = D_G^{\frac{1}{2}} 1_G$, важи

$$\begin{aligned}
&\langle L_{G\otimes H}(D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H), D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H\rangle = (D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H)^T L_{G\otimes H}(D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H) = \\
&= (D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H)^T (D_G \otimes D_H - A_G \otimes A_H)(D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H) \\
&= (1_G^T D_G^{\frac{1}{2}} \otimes v_j^{H^T})(D_G \otimes D_H)(D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H) - (1_G^T D_G^{\frac{1}{2}} \otimes v_j^{H^T})(A_G \otimes A_H)(D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H) \\
&= (1_G^T D_G^{\frac{1}{2}} D_G D_G^{\frac{1}{2}} 1_G) \otimes (v_j^{H^T} D_H v_j^H) - (1_G^T D_G^{\frac{1}{2}} A_G D_G^{\frac{1}{2}} 1_G) \otimes (v_j^{H^T} A_H v_j^H) \\
&= (1_G^T D_G^2 1_G) \otimes (v_j^{H^T} D_H v_j^H) - ([d_1^{G^{\frac{1}{2}}}, \ldots, d_{n_1}^{G^{\frac{1}{2}}}] A_G [d_1^{G^{\frac{1}{2}}}, \ldots, d_{n_1}^{G^{\frac{1}{2}}}]^T) \otimes (v_j^{H^T} A_H v_j^H).
\end{aligned}$$
(2.9)

Штавише, квадратна форма $1_G^T D_G^2 1_G$ и израз $[d_1^{G^{\frac{1}{2}}}, \ldots, d_{n_1}^{G^{\frac{1}{2}}}] A_G [d_1^{G^{\frac{1}{2}}}, \ldots, d_{n_1}^{G^{\frac{1}{2}}}]^T$ су једнаки $\sum_{i=1}^{n_1} d_i^{G^2}$ и $\sum_{\{i,j\}\in E(G)} 2 d_i^{G^{\frac{1}{2}}} d_j^{G^{\frac{1}{2}}}$, редом. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине важи $\sum_{\{i,j\}\in E(G)} 2 d_i^{G^{\frac{1}{2}}} d_j^{G^{\frac{1}{2}}} \leq \sum_{\{i,j\}\in E(G)} d_i{}^G + d_j{}^G = \sum_{i=1}^{n_1} d_i^{G^2}$. Једнакост важи ако и само ако $d_1^G = \ldots = d_{n_1}^G$. Коначно, имамо да је израз (2.9) већи или једнак $\sum_{i=1}^{n_1} d_i^{G^2}(v_j^{H^T} D_H v_j^H) - \sum_{i=1}^{n_1} d_i^{G^2}(v_j^{H^T} A_H v_j^H) = \sum_{i=1}^{n_1} d_i^{G^2}(v_j^{H^T} L_H v_j^H)$.

□

Лема 2.2. *Норма вектора* $L_{G\otimes H}(v_1^G \otimes v_j^H)$ *је мања или једнака од*

$$\sqrt{d_1^{G^3} + \cdots + d_{n_1}^{G^3}}\, \|L_H v_j^H\|,$$

за $1 \leq j \leq n_2$. *Једнакост важи ако и само ако је* G *регуларан.*

Доказ. Посматрајмо следећи низ једнакости

$$\begin{aligned}
& L_{G\otimes H}(D_G^{\frac{1}{2}}1_G \otimes v_j^H) = (D_G \otimes D_H - A_G \otimes A_H)(D_G^{\frac{1}{2}}1_G \otimes v_j^H) \\
= \ & (D_G D_G^{\frac{1}{2}}1_G) \otimes (D_H v_j^H) - (A_G D_G^{\frac{1}{2}}1_G) \otimes (A_H v_j^H) \\
= \ & [d_1^{G\frac{3}{2}}, \ldots, d_{n_1}^{G\ \frac{3}{2}}]^T \otimes (D_H v_j^H) - [\sum_{\{1,i\}\in E(G)} d_i^{\frac{1}{2}}, \ldots, \sum_{\{n_1,i\}\in E(G)} d_i^{\frac{1}{2}}]^T \otimes (A_H v_j^H).
\end{aligned}$$

Штавише, пошто је $u \otimes (Av) = (u \otimes A)v$, где је $u^T \in R^{n_1}$, $v^T \in R^{n_2}$ и $A \in R^{n_2\times n_2}$ важи да је

$$\begin{aligned}
\|L_{G\otimes H}(D_G^{\frac{1}{2}}1_G \otimes v_j^H)\| &= \\
&= \|([d_1^{G\frac{3}{2}}, \ldots, d_{n_1}^{G\ \frac{3}{2}}]^T \otimes D_H \\
&- [\sum_{\{1,i\}\in E(G)} d_i^{\frac{1}{2}}, \ldots, \sum_{\{n_1,i\}\in E(G)} d_i^{\frac{1}{2}}]^T \otimes A_H)v_j^H\|. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Сада, ако означимо са

$$B = [d_1^{G\frac{3}{2}}, \ldots, d_{n_1}^{G\ \frac{3}{2}}]^T \otimes D_H - [\sum_{\{1,i\}\in E(G)} d_i^{G\frac{1}{2}}, \ldots, \sum_{\{n_1,i\}\in E(G)} d_i^{G\frac{1}{2}}]^T \otimes A_H$$

и $A_H = [a_{i,j}]$, $1 \leq i, j \leq n_2$, онда можемо лако закључити да је

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n_1} \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{cases} d_k^{G\frac{3}{2}} d_i^H, & \text{ако } i = j \\ -\sum_{\{k,l\}\in E(G)} d_l^{G\frac{1}{2}} a_{i,j}, & \text{ако } i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq k \leq n_1.$$

Даље добијамо да је

$$\begin{aligned}
\|Bv_j^H\| &= \|[d_1^{G\frac{3}{2}}, \ldots, d_{n_1}^{G\ \frac{3}{2}}]^T \otimes (D_H v_j^H)\| \\
&+ \|[\sum_{\{1,i\}\in E(G)} d_i^{G\frac{1}{2}}, \ldots, \sum_{\{n_1,i\}\in E(G)} d_i^{G\frac{1}{2}}]^T \otimes (-A_H v_j^H)\| \\
&\leq \|[d_1^{G\frac{3}{2}}, \ldots, d_{n_1}^{G\ \frac{3}{2}}]^T\| \otimes \|D_H v_j^H\| \\
&+ \|[\sum_{\{1,i\}\in E(G)} d_i^{G\frac{1}{2}}, \ldots, \sum_{\{n_1,i\}\in E(G)} d_i^{G\frac{1}{2}}]^T\| \otimes \|(A_H v_j^H)\|. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

На основу односа између аритметичке и геометријске средине, тј. $(\sum_{\{k,i\}\in E(G)} {d_i^G}^{\frac{1}{2}})^2 \leq d_k^G \sum_{\{k,i\}\in E(G)} d_i^G$, за $1 \leq k \leq n_1$, важе неједнакости

$$\begin{aligned}
&\|[\sum_{\{1,i\}\in E(G)} {d_i^G}^{\frac{1}{2}}, \dots, \sum_{\{n_1,i\}\in E(G)} {d_i^G}^{\frac{1}{2}}]^T\|^2 \leq 2 \sum_{\{i,j\}\in E(G)} d_i^G d_j^G \\
&\leq \sum_{\{i,j\}\in E(G)} {d_i^G}^2 + {d_j^G}^2 = \sum_{i=1}^{n_1} {d_i^G}^3 = \|[{d_1^G}^{\frac{3}{2}}, \dots, {d_{n_1}^G}^{\frac{3}{2}}]^T\|^2.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Једнакост важи ако и само ако је $d_1^G = \cdots = d_{n_1}^G$. Сада, на основу неједнакости (2.11), (2.11) и (2.12) закључујемо да је

$$\|L_{G\otimes H}(D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H)\| = \|Bv_j^H\| \leq \sum_{i=1}^{n_1} \sqrt{{d_i^G}^3}(\|D_H v_j^H\| + \|A_H v_j^H\|).$$

Из чињенице да је $\|L_H v_j^H\| = \|(D_H - A_H)v_j^H\| = \|D_H v_j^H\| + \|A_H v_j^H\|$ коначно имамо

$$\|L_{G\otimes H}(D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H)\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} {d_i^G}^3 \|L_H v_j^H\|}.$$

$\square$

Теорема 2.3. *Коефицијенти корелације $r'_{1,j}$ $(2 \leq j \leq n_2)$ који одговарају векторима $L_{G\otimes H}(D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H)$ и $D_G^{\frac{1}{2}} 1_G \otimes v_j^H$ су већи или једнаки од*

$$\frac{{d_1^G}^2 + \cdots + {d_{n_1}^G}^2}{\sqrt{({d_1^G}^3 + \cdots + {d_{n_1}^G}^3)(d_1^G + \cdots + d_{n_1}^G)}} r_j^H,$$

где је r_j^H коефицијент корелације који одговара векторима $L_H v_j^H$ и v_j^H.

Доказ. На основу Леме 2.1 и Леме 2.2 добијамо да је

$$\begin{aligned}
r'_{1,j} &= \frac{\langle L_{G\otimes H}(D_G^{\frac{1}{2}}1_G \otimes v_j^H), D_G^{\frac{1}{2}}1_G \otimes v_j^H\rangle}{\|L_{G\otimes H}(D_G^{\frac{1}{2}}1_G \otimes v_j^H)\| \cdot \|D_G^{\frac{1}{2}}1_G \otimes v_j^H\|} \\
&\geq \frac{({d_1^G}^2 + \cdots + {d_{n_1}^G}^2) \;\; {v_j^H}^T L_H v_j^H}{\sqrt{{d_1^G}^3 + \cdots + {d_{n_1}^G}^3} \; \|L_H v_j^H\| \sqrt{d_1^G + \cdots + d_{n_1}^G} \|v_j^H\|} \\
&= \frac{{d_1^G}^2 + \cdots + {d_{n_1}^G}^2}{\sqrt{{d_1^G}^3 + \cdots + {d_{n_1}^G}^3} \; \sqrt{d_1^G + \cdots + d_{n_1}^G}} \cdot \frac{{v_j^H}^T L_H v_j^H}{\|L_H v_j^H\| \|v_j^H\|}.
\end{aligned}$$

□

Поменимо да је збир кубова степена чворова графа G познат као заборављени тополошки индекс који се означава са $F(G)$ [33], док збир квадрата степена чворова графа G представља добро познати први Загребачки индекс, означен са $M_1^1(G)$ [39]. У следећем исказу заправо доказујемо да је очекивана вредност $\frac{M_1^1(G)}{\sqrt{2mF(G)}}$ већа или једнака очекиваној вредности коефицијента корелације $r_{1,j}$ за случајне графове у асимптотском случају. Међутим, може се показати да $\frac{M_1^1(G)}{\sqrt{2mF(G)}} \geq r_{1,j}$ не важи увек за произвољан граф, па се мора наћи минимум функције $\frac{M_1^1(G)}{\sqrt{2mF(G)}r_{1,j}}$. Налажењем минимума функције добија се израз за горњу границу од $F(G)$ у функцији од Загребачког индекса и броја грана у графу. Више о заборављеном тополошком индексу може се наћи у [22].

За произвољан граф може се успоставити следећа веза између Загребачког индекса и заборављеног тополошког индекса

$$n \leq \frac{(2m)^3 F(G)}{M_1^1(G)^3} \leq \frac{(1+\sqrt{n-1})^4}{8\sqrt{n-1}}.$$

Заиста, ако са $x_1, x_2, \ldots, x_n$ означимо позитивне реалне бројеве и са $M_k = \sum_{i=1}^n x_i^k$ њихове одговарајуће суме k-тих степена, проблем се своди на налажење горње и доње границе функције

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{M_1^3 M_3}{M_2^3}.$$

Приметимо да су степени променљивих у бројиоцу и имениоцу једнаки шест. Такође можемо претпоставити да је $x_i > 0$ и да не постоје посебни гранични случајеви које треба испитати. Да бисмо одредили екстремне вредности функције више промењивих $F(x)$, израчунавамо најпре парцијалне изводе и решавамо следећи систем једначина:

$$F'_{x_i} = \frac{(3M_1^2M_3 + M_1^3 \cdot 3x_i^2)M_2^3 - M_1^3M_3(3M_2^2 \cdot 2x_i)}{M_2^6} = 0.$$

Након једноставних манипулација једначинама, горњи систем једначина, за $1 \leq i \leq n$, је еквивалентан следећем:

$$\frac{1}{M_3}x_i^2 - \frac{2}{M_2}x_i + \frac{1}{M_1} = 0.$$

Ове квадратне једначине могу имати највише два различита решења. Ако су сви x_i, $1 \leq i \leq n$, међусобно једнаки, имамо да је $F(x) = n$. Даље, како постоје тачно два решења за x_i, можемо их фиксирати и означити да су једнака a са вишеструкошћу k и b са вишеструкошћу $n-k$, $k \leq n-k$.

Из Вијетових формула добијамо

$$a + b = \frac{2M_3}{M_2} = 2\frac{ka^3 + (n-k)b^3}{ka^2 + (n-k)b^2},$$

$$a \cdot b = \frac{M_3}{M_1} = \frac{ka^3 + (n-k)b^3}{ka + (n-k)b}.$$

Из прве и друге једначине важи

$$(a-b)(ka^2 - (n-k)b^2) = 0.$$

Пошто је $a \neq b$, закључујемо да је $ka^2 = (n-k)b^2$. Без губљења општости, можемо ставити да је $a = \sqrt{n-k}$ и $b = \sqrt{k}$. Зато је

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{(k\sqrt{n-k} + (n-k)\sqrt{k})^3(k(n-k)^{3/2} + (n-k)k^{3/2})}{(k(n-k) + (n-k)k)^3} \\ &= \frac{(\sqrt{k} + \sqrt{n-k})^4}{8\sqrt{k(n-k)}}. \end{aligned}$$

Даље, морамо максимизирати функцију

$$G(k) = \frac{(\sqrt{k} + \sqrt{n-k})^4}{8\sqrt{k(n-k)}}.$$

Лако се може видети да се максимална вредност достиже за $k = 1$. Коначно, закључујемо да је

$$n \leq F(x) = \frac{M_1^3M_3}{M_2^3} \leq \frac{(1 + \sqrt{n-1})^4}{8\sqrt{n-1}}.$$

Једнакост на левој страни важи ако и само ако су сви x_i међусобно једнаки, док на десној страни важи ако и само ако је $x_1 = x\sqrt{n-1}$ и $x_2 = \ldots = x_n = x$, где је x произвољни позитивни реални број.

Теорема 2.4. *Асимптотска вредност очекивања коефицијента корелације $r_{1,j}$ је мања или једнака асимптотској вредности очекивања од*

$$\frac{{d_1^G}^2 + \cdots + {d_{n_1}^G}^2}{\sqrt{({d_1^G}^3 + \cdots + {d_{n_1}^G}^3)(d_1^G + \cdots + d_{n_1}^G)}},$$

када $n_1 \to \infty$.

Доказ. На основу Теореме 2.2 имамо да је асимптотска вредност очекивања коефицијента корелације $r_{1,j}$ једнака $\sqrt{\frac{(n_1-1)p}{1-p+(n_1-1)p}}$, када $n_1 \to \infty$. Са друге стране, како је $P(d_i^G = k) = \binom{n_1-1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k-1}$, имамо да је $E(Y_1) = n_1(n_1-1)p$ за $Y_1 = d_1^G + \ldots + d_{n_1}^G$. Слично можемо закључити $E(Y_2) = n_1((n_1-1)p(1-p) + (n_1-1)^2p^2)$ за $Y_2 = {d_1^G}^2 + \cdots + {d_{n_1}^G}^2$ и $E(Y_3) = n_1((n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)p^3 + 3p^2(n_1-1)(n_1-2) + (n_1-1)p)$ за $Y_3 = {d_1^G}^3 + \cdots + {d_{n_1}^G}^3$.

Користећи Пропозицију 2.1 можемо спровести сличан доказ као што је то урађено у Теореми 2.2 и закључити да је асимптотска вредност очекивања $\frac{{d_1^G}^2 + \cdots + {d_{n_1}^G}^2}{\sqrt{({d_1^G}^3 + \cdots + {d_{n_1}^G}^3)(d_1^G + \cdots + d_{n_1}^G)}}$, када $n_1 \to \infty$, једнака $\frac{E(Y_2)}{\sqrt{E(Y_1)E(Y_3)}}$. Остаје да се покаже да је

$$\begin{aligned} &\frac{n_1((n_1-1)p(1-p) + (n_1-1)^2p^2)}{\sqrt{n_1(n_1-1)p\; n_1((n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)p^3 + A)}} \\ &\geq \sqrt{\frac{(n_1-1)p}{1-p+(n_1-1)p}}, \end{aligned}$$

где је $A = 3p^2(n_1-1)(n_1-2) + (n_1-1)p$. Након краћег рачуна, неједнакост се може свести на

$$\sqrt{\frac{(1-p+(n_1-1)p)^3}{(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)p^3 + 3(n_1-1)(n_1-2)p + (n_1-1)p}} \geq 1,$$

што је еквивалентно неједнакости $(n_1-2)p^3 - 3(n_1-2)p^2 + (2n_1-5)p + 1 \geq 0$. Штавише, последњи израз се може записати на следећи начин

$$\begin{aligned} n_1 \geq \quad & 2 + \frac{2p^3 - 6p^2 + 5p - 1}{p^3 - 3p^2 + 2p} = \\ & = 2 + \frac{p-1}{p^3 - 3p^2 + 2p} = 2 + \frac{p-1}{p(p-1)(p-2)} = 2 - \frac{1}{p(2-p)}. \end{aligned}$$

Из односа између аритметичке и геометријске средине следи да је $p(2-p) \leq (\frac{p+2-p}{2})^2 = 1$, те зато добијамо да је $n_1 \geq 1 \geq 2 - \frac{1}{p(2-p)}$, што је очигледно тачно.

□

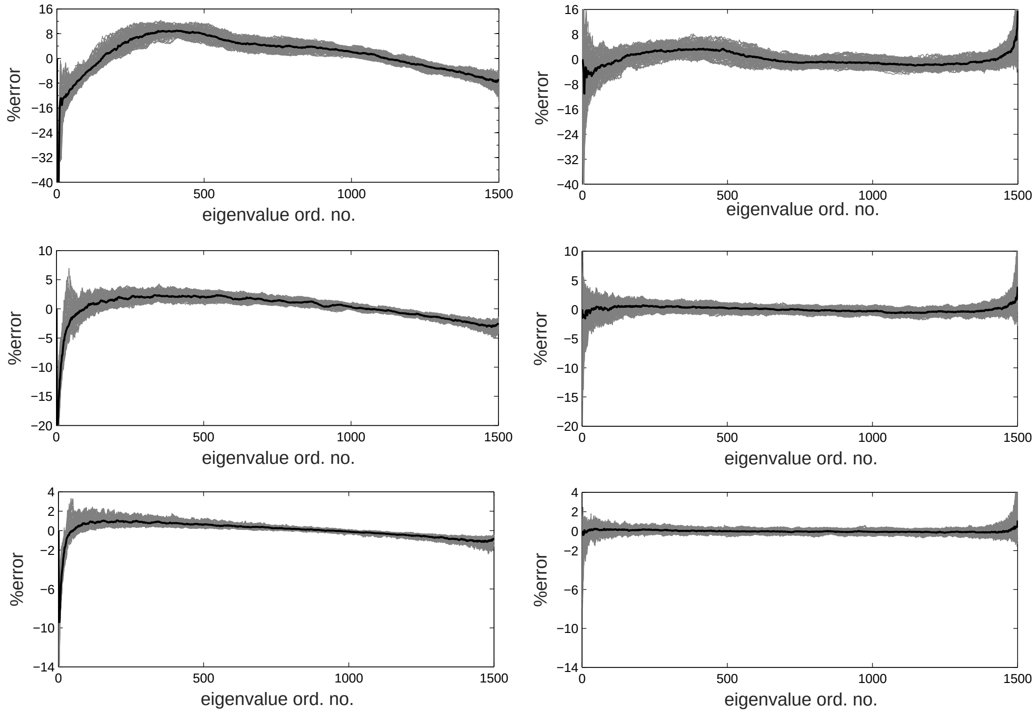
На основу Теореме 2.3 и Теореме 2.4 добијамо следећи низ неједнакости

$$E(r'_{1,j}) \geq E(\frac{{d_1^G}^2 + \cdots + {d_{n_1}^G}^2}{\sqrt{({d_1^G}^3 + \cdots + {d_{n_1}^G}^3)(d_1^G + \cdots + d_{n_1}^G)}} r_j^H) \geq E(r_{1,j})E(r_j^H),$$

када $n_1 \to \infty$. Штавише, видимо да доња граница за $r'_{1,j}$ зависи од степена чворова графа G и коефицијента корелације r_j^H, док $r_{1,j}$ зависи само од степена чворова графа G. Дакле, за веће вредности r_j^H више је вероватно да су очекиване вредности $r'_{1,j}$ веће од очекиваних вредности од $r_{1,j}$. У ствари, ако изаберемо H да буде граф такав да је r_j^H близу 1 (ако је H регуларан онда је $r_j^H = 1$) можемо закључити да је $E(r'_{1,j}) \geq E(r_{1,j})$, за сваки $1 \leq j \leq n_2$, када $n_1 \to \infty$.

Експериментални и теоријски резултати за процену сопствених вредности

У овом пододељку приказујемо расподелу релативних грешака процењеног спектра Лапласове матрице Кронекерског производа графова у поређењу са стварним спектром. Грешке се рачунају понављањем 100 независних тестова за Кронекерски производ Ердош-Рени случајних графова са 50 и 30 чворова. Релативне грешке процењеног спектра које одговорају процењеним сопственим векторима $w_i^G \otimes w_j^H$ су приказане са леве стране, док су грешке процењеног спектра које одговарају сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$ приказане са десне стране слике 5. Сваки ред слике одговара једном од графова са нивоима гранских густина од 10%, 30%, и 65%, редом. Пуна црна крива показује медијану, а осенчена подручја показују опсеге од 5 до 95 перцентила. Приметимо да када се гранска густина повећава, релативна грешка постаје мања за обе апроксимације. Карактеристични облици расподеле релативних грешака за процењени спектар којима одговарају сопствени вектори $w_i^G \otimes w_j^H$, презентовани на слици 5 (лева страна) имају изненадне скокове на почетку и праћени су постепеним падом. Такође се може приметити да су они прилично конзистентни на графовима са различитим нивоима гранских густина. Са друге стране, за процењени спектар који одговара



Слика 5: Расподела релативних грешака у процењеним Лапласовим спектрима Кронекерског производа Ердош-Рени случајних графова (са 50 и 30 чворова) у поређењу са оригиналним. *Лева страна* је резервисана за спектар који одговара векторима $w_i^G \otimes w_j^H$ и *десна страна* за спектар који одговара векторима $v_i^{S_1} \otimes v_j^H$. Слике у различитим редовима одговарају нивоима гранских густина од 10%, 30% и 65%.

сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$, у његовој расподели релативних грешака нема наглог скока на почетку, али постоји одређени опсег релативне грешке за највеће сопствене вредности. У случају процењеног спектра који одговара сопственим векторима $w_i^G \otimes w_j^H$, медијана узима позитивне вредности за приближно прву половину сопствених вредности и негативне вредности за другу половину. У случају процењеног спектра који одговара сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$, расподела релативних грешака постаје стабилнија, односно медијана је скоро права линија која се поклапа са $x-$осом (десна страна слике 5). Може се такође видети да су опсези релативних грешака скоро равномерно распоређени око 0.

Даље, теоријски објашњавамо зашто процењене сопствене вредности које одговарају векторима $v_i^G \otimes v_j^H$ за случајне графове постају приближније стварним очекиваним вредностима када ред графа расте или када се ниво гранске густине повећава. Спроведени експерименти показују да ова апроксимација даје разумну процену Лапласовог спектра са релативним грешкама у опсегу $\pm 10\%$, $\pm 5\%$ и $\pm 2\%$ за већину сопствених вредности када су нивои гранских густина графова 10%, 30% и 65%, редом. Користимо следећи исказ да бисмо показали теоријско оправдање за горе наведено тврђење.

Теорема 2.5. *[24] Нека је G случајни граф, тако да је вероватноћа везе између чворова v_i и v_j једнака $pr(v_i \sim v_j) = p_{ij}$ и сваке две гране графа су међусобно независне. Нека је A матрица суседства графа G и $\bar{A} = E(A)$ очекивана матрица суседства, односно важи да је $\bar{A}_{ij} = p_{ij}$. Нека је D дијагонална матрица таква да је $D_{ii} = deg(v_i)$ и $\bar{D} = E(D)$. Нека је такође $\bar{\delta} = \bar{\delta}(G)$ минимални очекивани степен графа G и $\mathcal{L}$ нормализована Лапласова матрица графа G. За $\epsilon > 0$, ако постоји константа $k = k(\epsilon)$ таква да је $\bar{\delta} > k\ln n$, тада са вероватноћом најмање $1-\epsilon$, j-те сопствене вредности матрица $\mathcal{L}$ и $\bar{\mathcal{L}}$ задовољавају*

$$|\lambda_j(\mathcal{L}) - \lambda_j(\bar{\mathcal{L}})| \leq 2\sqrt{\frac{3ln(\frac{4n}{\epsilon})}{\bar{\delta}}}$$

за свако $1 \leq j \leq n$, где је $\bar{\mathcal{L}} = I - \bar{D}^{-\frac{1}{2}}\bar{A}\,\bar{D}^{-\frac{1}{2}}$.

Нека је $G_{n,p}$ случајни граф реда n и вероватноћом креирања грана p. Пошто су у експериментима коришћени фактор-графови са истим нивоима гранских густина (означимо ове графове са G_{n_1,p_1} и G_{n_2,p_2}), без губитка општости, можемо ставити да је $p_1 = p_2 = p$ (идентична анализа се може спровести када је $p_1 \neq p_2$). За очекивану матрицу суседства рандом графова $G_{n_1,p}$ и $G_{n_2,p}$ важи $\bar{A}_{n_1} = p(J_{n_1} - I_{n_1})$ и $\bar{A}_{n_2} = p(J_{n_2} - I_{n_2})$. Са A_{n_1} и A_{n_2} означавамо матрице суседства G_{n_1,p_1} и G_{n_2,p_2}. Са $\mathcal{L}(G_{n_1,p} \otimes G_{n_2,p})$ означимо нормализовану Лапласову матрицу графа $G_{n_1,p} \otimes G_{n_2,p}$.

Најпре показујемо да је $\bar{\delta} = \bar{\delta}(G_{n_1,p} \otimes G_{n_2,p}) \sim n_1 n_2$. Уочимо да је збир сваке врсте матрице $\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}$ једнак $p^2(n_1-1)(n_2-1)$, па је јасно да је $\delta(\bar{G}_{n_1,p} \otimes \bar{G}_{n_2,p}) = p^2(n_1-1)(n_2-1)$. Нека је $Z = \min\{d_i^1 d_k^2 \mid 1 \leq i \leq n_1\ 1 \leq k \leq n_2\}$, где су d_i^1 и d_k^2 степени чворова G_{n_1,p_1} и $G_{n_2,p}$, редом. Зато имамо да је $\bar{\delta} = E(Z)$. На основу Јенсенове неједнакости, важи да је $e^{-t\bar{\delta}} \leq E(e^{-tZ})$, за позитивни реални број t. Штавише, на основу дефиниције Z, имамо следећи низ релација

$$e^{-t\bar{\delta}} \leq E(e^{-tZ}) = E(e^{-t\min_{i,j}\{d_i^1 d_k^2\}}) = E(\max_{i,j} e^{-td_i^1 d_k^2})$$

$$\leq \sum_{i,j} E(e^{-td_i^1 d_k^2}) = n_1 n_2 E(e^{-td_i^1 d_k^2}), \tag{2.13}$$

за свако $1 \leq i \leq n_1$ и $1 \leq k \leq n_2$.

Како $n_1, n_2 \to \infty$, на основу централне граничне теореме d_i^1 и d_k^2 имају асимптотску нормалну расподелу $AN(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $AN(\mu_2, \sigma_2^2)$, редом, где је $\mu_1 = n_1 p$, $\mu_2 = n_2 p$, $\sigma_1 = \sqrt{n_1 pq}$ и $\sigma_2 = \sqrt{n_2 pq}$. Разматрајући дводимензионалну случајну променљиву $X = [d_i^1, d_k^2]$ може се закључити да она има асимптотску нормалну расподелу. Пошто је $g(x,y) = e^{-txy}$ непрекидно-диференцијабилна функција закључујемо да $g(X)$ има асимптотску нормалну расподелу. Зато, када $n_1, n_2 \to \infty$, имамо да је $E(e^{-td_i^1 d_k^2}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-txy} e^{\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})} e^{\frac{1}{2}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})} dxdy$. Након смене $x \to \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$, $y \to \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ и одређеног броја алгебарских тансформација може се добити

$$\begin{aligned} E(e^{-td_i^1 d_k^2}) &= \frac{e^{-t\mu_1\mu_2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\mu_1\sigma_2 y - \frac{y^2}{2}} e^{\frac{t^2\sigma_1^2(\mu_2+\sigma_2 y)^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x+t\sigma_1(\mu_2+\sigma_2 y))^2}{2}} dxdy \\ &= \frac{e^{-t\mu_1\mu_2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\mu_1\sigma_2 y - \frac{y^2}{2} + \frac{t^2\sigma_1^2(\mu_2+\sigma_2 y)^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Последњи интеграл се може записати у форми $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\mu_1\mu_2} e^{\frac{t^2\sigma_1^2\mu_2^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2 A - 2yB}{2}}$, где је $A = 1 - t^2\sigma_1^2\sigma_2^2$ и $B = -t\mu_1\sigma_2 + t^2\sigma_1^2\mu_2\sigma_2$. Коначно, имамо да је

$$\begin{aligned} E(e^{-td_i^1 d_k^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\mu_1\mu_2 + \frac{t^2\sigma_1^2\mu_2^2}{2}} e^{\frac{B^2}{2A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(\sqrt{A}(y-\frac{B}{A}))^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t\mu_1\mu_2 + \frac{t^2\sigma_1^2\mu_2^2}{2} + \frac{B^2}{2A}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{A}} \\ &= \frac{e^{-t\mu_1\mu_2 + \frac{t^2\sigma_1^2\mu_2^2}{2} + \frac{(-t\mu_1\sigma_2 + t^2\sigma_1^2\mu_2\sigma_2)^2}{2(1-t^2\sigma_1^2\sigma_2^2)}}}{\sqrt{1 - t^2\sigma_1^2\sigma_2^2}} \\ &= \frac{e^{\frac{-2t\mu_1\mu_2 + (\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2)t^2}{2(1-t^2\sigma_1^2\sigma_2^2)}}}{\sqrt{1 - t^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}. \end{aligned}$$

На основу неједнакости (2.13) добијамо

$$\bar{\delta} \geq -\frac{ln(n_1 n_2)}{t} - \frac{-2\mu_1\mu_2 + (\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2)t}{2(1 - t^2\sigma_1^2\sigma_2^2)} + \frac{ln(1 - t^2\sigma_1^2\sigma_2^2)}{2t},$$

за свако $t > 0$. Сада, ако ставимо $t = \frac{1}{\mu_2\sigma_1}$, лако се може добити да је водећи сабирак десне стране горње неједнакости $\mu_1\mu_2$, па даље закључујемо да је $\bar{\delta} = \Omega(n_1n_2)$, када $n_1, n_2 \to \infty$.

Нека су $Spectrum(\bar{A}_{n_1})$, $Spectrum(\bar{A}_{n_2})$, $Spectrum(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2})$ и $Spectrum(\mathcal{L}(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))$ мултискупови сопствених вредности матрица $\bar{A}_{n_1}$, $\bar{A}_{n_2}$, $\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}$ и $\mathcal{L}(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2})$, редом. Да бисмо израчунали $Spectrum(\mathcal{L}(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))$, треба одредити дијагоналну матрицу $D(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2})$, $Spectrum(\bar{A}_{n_1})$, $Spectrum(\bar{A}_{n_2})$ и $Spectrum(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2})$, али због лакше читљивости, ови једноставни кораци ће бити прескочени. Дакле, спектар очекиване нормализоване Лапласове матрице Кронекеровог производа два случајна графа се може записати на следећи начин

$$\begin{pmatrix} 1 & n_2-1 & n_1-1 & (n_1-1)(n_2-1) \\ 0 & \frac{n_2}{n_2-1} & \frac{n_1}{n_1-1} & 1-\frac{1}{(n_1-1)(n_2-1)} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

где друга врста у табели представља сопствене вредности, док прва врста представља одговарајуће алгебарске вишеструкости. Ради боље читљивости, до краја овог одељка, са ν_j ћемо означити сопствене вредности нормализоване Лапласове $\mathcal{L}$ матрице графа $G_{n_1,p} \otimes G_{n_2,p}$.

Како је $\bar{\delta} = \Omega(n_1n_2) \gg ln(n_1n_2)$, може се применити Теорема 2.5 стављајући $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}$ и добити

$$|\nu_j - \lambda_j(\mathcal{L}(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))| \le 2\sqrt{\frac{3ln4 + \frac{9ln(n_1n_2)}{2}}{n_1n_2}} = o(1), \tag{2.15}$$

са вероватноћом већом или једнаком $1 - \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}} = 1 - o(1)$.

У даљем тексту ћемо извршити процену разлике између $d_i^1d_k^2$ и $\bar{\delta}$ користећи Чебишевљеву неједнакост, тј. $Pr(|d_i^1d_k^2 - \bar{\delta}| < \epsilon\sigma(d_i^1d_k^2)) \ge 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$, за произвољни реални број $\epsilon > 0$. Како су d_i^1 и d_k^2 независне променљиве, имамо да је $\sigma^2(d_i^1d_k^2) = \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2$. Стога, за $n_1 \ge n_2$ и $\epsilon = \sqrt[4]{n_2}$ може се закључити да је

$$|d_i^1d_k^2 - \bar{\delta}| < \sqrt{\sqrt{n_2}(\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2)}$$

са вероватноћом већом или једнаком $1 - o(1)$. Штавише, пошто је $0 \le \nu_j \le 2$ и $\lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2})) = \bar{\delta}\lambda_j(\mathcal{L}(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2})) = \bar{\delta}O(1) = \Omega(n_1n_2)O(1)$ (последње важи на основу формуле $L = D^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}D^{\frac{1}{2}}$ и својства да је граф $\bar{G}_{n_1,p} \otimes \bar{G}_{n_2,p}$ регуларан) важи да је

$$\frac{|d_i^1d_k^2 - \bar{\delta}|\nu_j}{\lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))} < \frac{\sqrt{\sqrt{n_2}(\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2)}}{\Omega(n_1n_2)O(1)} = o(1). \tag{2.16}$$

Са друге стране, множењем обе стране неједнакости (2.15) са $\bar{\delta}$ и дељењем са $\lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))$, добијамо

$$\frac{|\bar{\delta}\nu_j - \lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))|}{\lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))} \leq \frac{\bar{\delta}\, o(1)}{\bar{\delta} O(1)} = o(1). \tag{2.17}$$

Сабирањем одговарајућих страна неједнакости (2.16) и (2.17), коначно закључујемо

$$\begin{aligned}
&\frac{|d_i^1 d_k^2 \nu_j - \lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))|}{\lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))} \\
= \; &\frac{|d_i^1 d_k^2 \nu_j - \bar{\delta}\nu_j + \bar{\delta}\nu_j - \lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))|}{\lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))} \\
\leq \; &\frac{|d_i^1 d_k^2 \nu_j - \bar{\delta}\nu_j| + |\bar{\delta}\nu_j - \lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))|}{\lambda_j(L(\bar{A}_{n_1} \otimes \bar{A}_{n_2}))} = o(1).
\end{aligned}$$

У претходној формули смо показили да је релативна грешка између процењеног спектра и очекиваног спектра Лапласове матрице Кронекрског производа случајних графова тежи нули, када n_1 и n_2 теже бесконачности, док у изведеним експериментима израчунавамо релативне грешке између процењеног и стварног спектра (процењени спектар је дат формулом (2.6)). Стога, у остатку одељка дајемо асимптотску процену релативне грешке између процењеног спектра и средње вредности сопствених вредности Лапласове матрице.

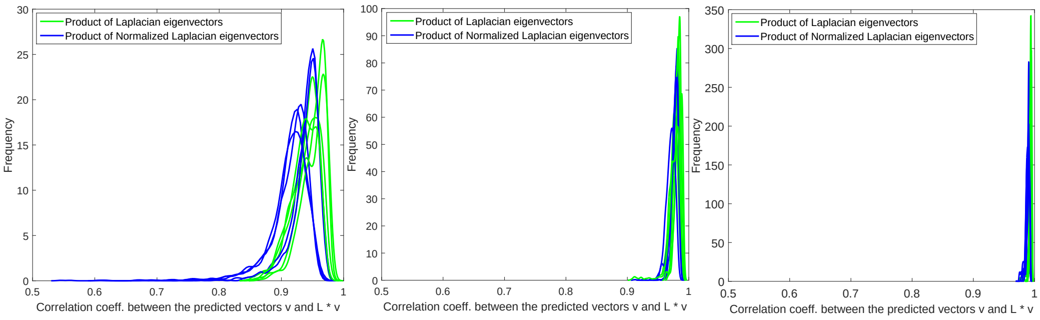
Заиста, неки емпиријски докази указују да је средина емпиријске расподела сопствених вредности Лапласове матрице графа $G(n,p)$ центриран око np (погледати [48]). Слично, ако средину емпиријске расподела сопствених вредности Лапласове матрице графа $G(n_1,p) \otimes G(n_1,p)$ означимо са $\bar{\lambda}$, закључујемо да је $\bar{\lambda} \sim n_1 n_2$, па је зато

$$\frac{|d_i^1 d_k^2 \nu_j - \bar{\lambda}(L(A_{n_1} \otimes A_{n_2}))|}{\bar{\lambda}(L(A_{n_1} \otimes A_{n_2}))} = o(1). \tag{2.18}$$

Зато, у том случају добијамо да формула (2.18) представља релативну грешку процењеног спектра $d_i^1 d_k \nu_j$ из (2.6), која тежи 0 када ред графа тежи бесконачности или његов ниво гранске густине тежи 1.

Ватц-Строгац графови

Примењујемо исте експерименте када су два у Кронекерском производу Ватц-Строгац графови. Испитивањем спектралних својстава



Слика 6: Функције густине вероватноће коефицијената корелације између $w_i^G \otimes w_j^H$ и $L_{G\otimes H}(w_i^G \otimes w_j^H)$ су представљене зеленом пуном линијом, док су између $v_i^G \otimes v_j^H$ и $L_{G\otimes H}(v_i^G \otimes v_j^H)$ представљене плавом пуном линијом. Функције густине вероватноће су нацртане за нивое гранских густина од 10%, 30% и 65%, редом, за Ватц-Строгац графове са 50 и 100 чворова.

Кронекерског производа графова који су Ватц-Строгац графови, примећујемо да је ситуација мало другачија, јер чак и у случају када су графови ретки (ниво гранске густине је 10%), глатке функције густине вероватноћа коефицијената корелације вектора се приближавају вредности 1, за обе апроксимације. За исту густину, максимуми функција за обе апроксимације налазе се у интервалу $(0.9, 1)$. Када ниво гранске густине износи 30% и више, изузетно високе вредности коефицијената корелације постају још уочљивије. Слика 6 приказује глатке функције густина вероватноћа векторских коефицијената корелације у случају два Щаттс-Строгатз графова са 50 и 30 чворова. На слици су приказани коефицијенти корелације у пет независних нумеричких експеримената када су нивои гранских густина постављени на 10% (лево), 30% (средина) и 65% (десно).

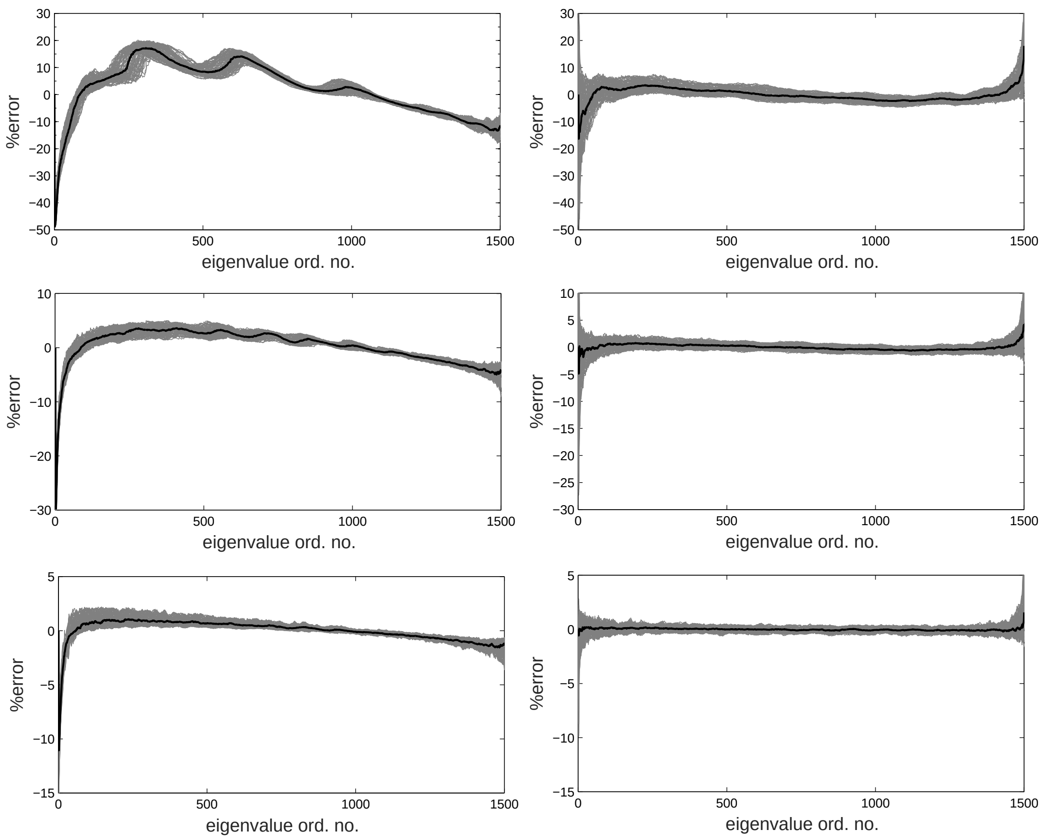
Као и у случају Ердош-Рени графова, расподела релативних грешака процењеног спектра које одговарају сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$ је скоро равномерно распоређена око 0 за сваку тестирану гранску густину, док расподела релативних грешака процењеног спектра која одговара сопственим векторима $w_i^G \otimes w_j^H$ увек има нагли скок на почетку. На Слици 7, грешке за процењене спектре из пододељка 2.1.1 су презентоване на левој страни, док су грешке за процењени спектар из пододељка 2.1.2 презентоване на десној страни. Као и у случају Ердош-Рени случајних графова, обе апроксимације производе разумне процене Лапласовог спектра са релативним грешкама у опсегу до $\pm 10\%$, за ретке графове. Са порастом нивоа гранске густине грешка се смањује.

Барабаши-Алберт графови

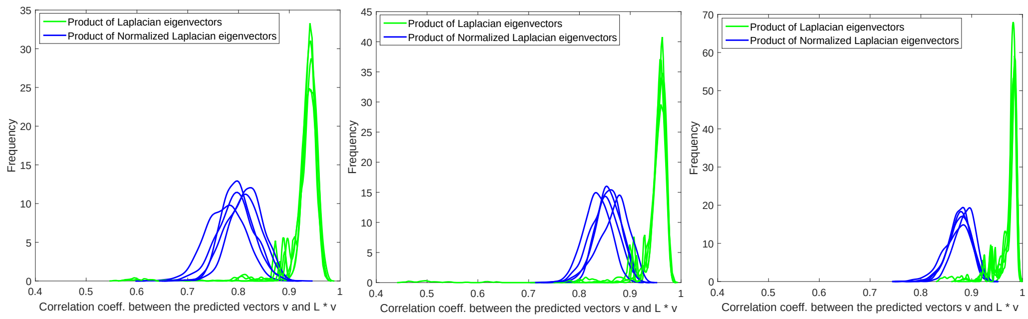
У овом одељку представљамо понашање процењених сопствених вредности и сопствених вектора Кронекерског производа два Барабаши-Алберт графа. За ову врсту графова ситуација није битно другачија у поређењу са претходна два типа по питању коефицијената корелације процењених сопствених вектора. У сваком од случајева сопствени вектори $w_i^G \otimes w_j^H$ показују боља својства, пошто су њихови коефицијенти корелације изнад 0.9 , док су коефицијенти корелације за векторе $v_i^G \otimes v_j^H$ у интервалу (0.7, 0.9) у већини случајева (погледати слику 8), за нивое гранских густина 10%, 30% и 65%.

Такође, примећујемо да су процењене сопствене вредности које одговарају сопственим векторима $w_i^G \otimes w_j^H$ стабилније од процењених сопствених вредности које одговарају сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$. На основу слике 9 може се приметити да су опсези грешке (који одговарају нивоима гранских густина 10%, 30% и 65%) између процењеног и оригиналног спектра мање за прву апроксимацију него за другу. Карактеристичан облик расподеле релативне грешке за процењени спектар који одговара сопственим векторима $w_i^G \otimes w_j^H$ остаје сличан расподелама грешака у претходном пододељку, у смислу, наглог скока на почетку након чега следи постепени пад за сваки од различитих нивоа гранских густина који смо тестирали. За разлику од претходног пододељка, процењени спектар који одговара сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$ има нагли скок на почетку и опсег грешака је мало већи за све гранске густине (десни панели слике 9). Када је ниво гранске густине између 50% и 65%, карактеристични облик за другу апроксимацију (десни панели) је мало другачији од оних у прошлом одељку. Може се приметити нагли скок у средини графа, али у исто време опсег грешке се сужава за највеће сопствене вредности.

Иако су обе апроксимације дизајниране коришћењем других апроксимативних претпоставки, добијене процене спектра су веома блиске нумерички тачно израчунатом спектру са релативном грешком која варира унутар опсега ±10% за већину сопствених вредности. Такође смо и теоријски објаснили зашто су процењене сопствене вредности за рандом графове тачније у односу на стварне вредности када ред графа расте или се повећава ниво гранске густине. Ово објашњава чињеницу да је расподела релативних грешака између процењених и оригиналних сопствених вредности постаје скоро равномерно распоређена око 0. Давање формалних математичких објашњења за функционисање пре-



Слика 7: Расподела релативних грешака у процењеним Лапласовим спектрима Кронекерског производа Ватц-Строгатц графова (са 50 и 30 чворова) у поређењу са оригиналним. *Лева страна* је резервисана за спектар који одговара векторима $w_i^G \otimes w_j^H$ и *десна страна* за спектар који одговара векторима $v_i^{S_1} \otimes v_j^H$. Слике у различитим редовима одговарају нивоима гранских густина од 10%, 30% и 65%.

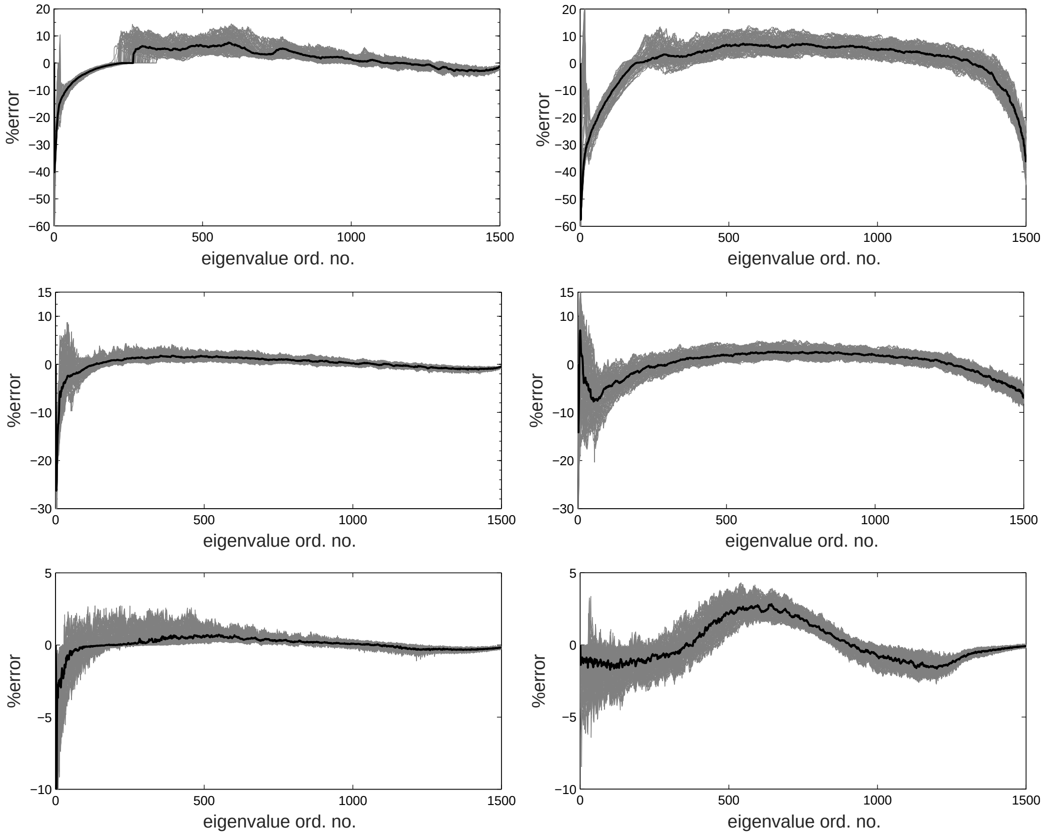


Слика 8: Функције густине вероватноће коефицијената корелације између $w_i^G \otimes w_j^H$ и $L_{G\otimes H}(w_i^G \otimes w_j^H)$ су представљене зеленом пуном линијом, док између $v_i^G \otimes v_j^H$ и $L_{G\otimes H}(v_i^G \otimes v_j^H)$ су представљене плавом пуном линијом. Функције густине вероватноће су нацртане за нивое гранских густина од 10%, 30% и 65%, редом, за Барабаши-Алберт графове са 50 и 30 чворова.

дложене методе и у осталим случајевима било би предмет даљег испитивања. Како ове апроксимације имају и своја теоријска ограничења дизајн нових алгоритама за процену спектра мора бити један од важнијих праваца будућег истраживања, као и њихова теоријска објашњења. Штавише, било би веома важно видети како су процењене сопствене вредности и сопствени вектори погодни за потпуну спектралну декомпозицију Лапласове матрице графа, где је укључен сав апроксимирани спектар и апроксимирани сопствени вектори. Добро понашање ових апроксимација је експериментално потврђено кроз њихове примене на перформансе неусмерених графовских модела, о чему ће бити више речи у следећем одељку. Штавише, верујемо да представљене процене могу бити добра полазна основа за друге примене, као што је процена спектра и сопствених вектора Хермитских Лапласових матрица Кронекерског производа усмерених графова. У ту сврху намеравамо да користимо Кронекерски производ сопствених вектора како Хермитске Лапласове матрице [76, 77], тако и Хермитске нормализоване Лапласове матрице [78] фактор-графова.

2.2 Предикција на графовским моделима

У овом одељку примењујемо процене Лапласових сопствених вредности и одговарајућих сопствених вектора за Кронекерски производ графова, које су обрађене у претходном одељку. Коришћењем одговарајућих апроксимација за сопствене вредности и сопствене векторе у



Слика 9: Расподела релативних грешака у процењеним Лапласовим спектрима Кронекерског производа Барабаши-Алберт графова (са 50 и 30 чворова) у поређењу са оригиналним. *Лева сшрана* је резервисана за спектар који одговара векторима $w_i^G \otimes w_j^H$ и *десна сшрана* за спектар који одговара векторима $v_i^{S_1} \otimes v_j^H$. Слике у различитим редовима одговарају нивоима гранских густина од 10%, 30% и 65%.

зависности од одређеног типа графа, значајно се побољшава тачност регресије, а временска сложеност израчунања је иста у поређењу са моделом представљеним у [35] (средње-квадратне грешке апроксимираних ГГМ модела су веома блиске средње-квадратној грешци оригиналног ГГМ модела). Спроведени експерименти на три типа графова (узети су исти типови графова као и у претходном одељку) показују да предложене методе дају поуздану апроксимацију за сопствене вредности и сопствене векторе Лапласове матрице Кронекерског производа графова. Најпре ћемо презентовати резултате експеримената где сви процењени парови сопствених вредности и сопствених вектора Лапласове матрице Кронекерског производа симулирају тачан спектар и сопствене векторе (тј. спектралну декомпозицију) Лапласове матрице у ГГМ моделу. Такође, упоређујемо губитак у тачности регресије између ГГМ модела који користе ове апроксимације са једне стране и нумерички тачна израчунавања за спектралну декомпозицију Лапласове матрице са друге стране.

Други део одељка се односи на не-Кронекерске графове. У случају када се граф не може представити као производ графова (Декартов, Кронекерски, јак производ, лексикографски, итд.) у литератури је предложено неколико приступа за убрзање оптимизационог задатка у ГГМ моделу. Метода описана у [60], разматра понашање модела само на потпуно повезаним графовима у Еуклидском простору обележја. Да би ГГМ био применљив на великим графовима, у [79] је предложена апроксимација ГГМ модела компресијом тежинског графа у мањи на начин да се сачува тачност предвиђања на редукованом графу. Овај модел је заснован на хипотези да компресовани граф задржава већину структурних информација у поређењу са оригиналним графом тако да је губитак у тачности регресије добијен на моделу заснованом на компресованом графу минималан. У овом одељку разматрамо проблем у коме граф модела не може бити факторисан као производ графова. Применом алгоритма сингуларне декомпозиције, такав граф се може апроксимирати као Кронекерски производ два графа што нам омогућава да задати проблем сведемо на проблем убрзања модела заснованог на графу који се може разложити као Кронекерски производ два графа. Описана репрезентација омогућава да се примене апроксимације за Лапласов спектар и сопствене векторе Кронекерског производа графова, па овај комбиновани приступ убрзава ГГМ модел, док је губитак у тачности регресије мањи коришћењем добијеног модификованог модела.

2.2.1 Спектрална декомпозиција Лапласове матрице Кронекерског производа и сложеност графовских модела

У овом одељку ћемо са S, S_G и S_H означити тежинске матрице суседства графова $G \otimes H$, G и H, редом, што је у складу са ознакама из релације (1.17). Уколико је граф Кронекерски, тада се матрица Q из релације (1.20) графовског модела може записати на следећи начин

$$Q = \sum_k \alpha_k I + \beta L_{G\otimes H}. \tag{2.19}$$

У претходном одељку смо видели да Лапласова матрица Кронекерског производа графова не може бити представљена помоћу његових фактор-графова, па се морају применити неке од апроксимација да би се добила спектрална декомпозиција Лапласове матрице Кронекерског производа графова из спектара графовских матрица његових фактор-графова. У овом одељку искористићемо резултате из претходног у циљу смањења сложености графовских модела. Подсетимо се да идеја за једну од апроксимација спектра и сопствених вектора Лапласових матрица Кронекерског производа графова долази из чињенице да се нормализована Лапласова матрица Кронекерског производа графова може представити у функцији нормализованих Лапласових матрица фактор-графова. У неким случајевима Кронекерски производ сопствених вектора матрица $\mathcal{L}_G$ и $\mathcal{L}_H$ даје боље апроксимације за сопствене векторе $L_{G\otimes H}$ него Кронекерски производ сопствених вектора матрица L_G и L_H, о чему ће бити више речи у наредним пододељцима.

Коришћењем апроксимације из пододељка 2.1.1 можемо репрезентовати матрицу модела Q на рачунски оперативнији начин. Наиме, на основу добро познатог својства Кронекерског производа матрица $(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD$, видимо да важи да је $(W_G\otimes W_H)(W_G\otimes W_H)^T = I$ пошто је $W_G W_G^T = I$ и $W_H W_H^T = I$. Ако матрицу $(\Lambda_G \otimes D_H + D_G \otimes \Lambda_H - \Lambda_G \otimes \Lambda_H)$ означимо са $\mathcal{N}_{G,H}$, онда се матрица Q, дефинисана са (1.20), може записати на следећи начин

$$Q = \sum_k \alpha_k I + \beta L_{G\otimes H} \approx (W_G \otimes W_H)(\sum_k \alpha_k I + \beta \mathcal{N}_{G,H})(W_G \otimes W_H)^T.$$

Овај приступ смањује сложеност израчунавања модела, јер се израчунавања своде на матрице нижег ранга, посебно када је ред графа модела велики. Из (2.2) и (2.3) може се видети да је рачунска сложеност ове методе $O(n_1^3+n_2^3+n_1\, log\, n_1+n_2\, log\, n_2+n_1\, n_2)$, где кубови n_1^3 и n_2^3

представљају рачунске сложености израчунавања спектара матрица L_G и L_H, а изрази $n_1 \, log \, n_1$ и $n_2 \, log \, n_2$ представљају рачунске сложености сортирања спектара и $n_1 \, n_2$ сложеност множење сопствених вредности. Сложеност експлицитног израчунавања сопствених вредности и одговарајућих сопствених вектора за $L_{G \otimes H}$ је $O(n_1^3 n_2^3)$ што је знатно већа сложеност од сложености предложених апроксимација.

Са друге стране, коришћењем апроксимације из пододељка 2.1.2 и релације (2.5), матрицу Q можемо записати на следећи начин

$$Q = \sum_k \alpha_k I + \beta L_{G \otimes H} \approx (V_G \otimes V_H)(\sum_k \alpha_k I + \beta \mathcal{M}_{G,H})(V_G \otimes V_H)^T,$$

где је $\mathcal{M}_{G,H} = D\Lambda$. И овај метод смањује сложеност израчунавања базичног графовксог модела, а рачунска сложеност саме апроксимације је $O(n_1^3 + n_2^3 + n_1^2 + n_2^2 + n_1 \, n_2)$. Сложеност израчунавања у односу на модел добијен коришћењем апроксимације из подсекције 2.1.1 је истог реда величине, али постоји разлика која се огледа у избегавању сортирања спектра и постојању множења матрица као додатног корака у израчунавањима $(I_{n_1} - \mathcal{L}_G)$ и $(I_{n_2} - \mathcal{L}_H)$.

У претходном одељку смо представили понашање процењених сопствених вредности и сопствених вектора у поређењу са оригиналним. Сви приказани резултати су добијени у односу на различите типове графова и различите нивое гранских густина. У одељку 2.2.2 детаљно ћемо дискутовати како процењени спектри и њихови одговарајући сопствени вектори утичу на ГГМ модел. Да би се експериментално испитао ГГМ модел, експерименти су изведени на три врсте графова: Ердош-Рени, Барабаши-Алберт и Ватц-Строгатц, док проценат гранских густина узима вредности 10%, 30%, 50%, 65% и 80%. За редове графова G и H означене са n_1 и n_2, редом, спроводимо све експерименте три пута у зависности од редова графова $(n_1, n_2) \in \{(30, 50), (50, 100), (100, 200)\}$.

2.2.2 Графовски модели базирани на Кронекерским структурама

Овај одељак се бави провером перформанси ГГМ модела различитих типова рандом мрежа под одређеним контролисаним условима. Кључна улога апроксимативних процена добијених у претходним одељцима је превазилажење рачунски неефикасне операције у претпроцесирању ГГМ модела, а то је операција спектралне декомпозиције Лапласове матрице која одговара Кронекерском графу модела. Употребљене апроксимације имају мању рачунску сложеност од оригиналног ГГМ модела, али је потребно да се провери како процењени сопствени вектори и сопствене вредности утичу на тачност ГГМ модела, имајући у виду да је ГГМ модел веома осетљив на математичке манипулације сопственим вредностима и одговарајућим сопственим векторима.

Опис модела и експерименталне поставке

Један од циљева овог одељка је тражење баланса између смањења рачунског времена модела са једне стране и губитка у тачности регресије (модела) са друге, када се предложене процене за Лапласове сопствене вредности и сопствене векторе Кронекерског производа примене на граф модела. Добијени резултати обухватају различите типове графова различитог реда и различитих нивоа гранских густина у графу. Поређење се врши између четири модела: GCRF-base где је извршена нумеричка спектрална декомпозиција и стога се постиже највећа тачност регресије и апроксимационих модела GCRF-MSN [35], GCRF-LaplaceVec (пододељак 2.1.1) и GCRF-NormLaplaceVec (пододељак 2.1.2), где је у фокусу ових модела процес убрзања оптимизационе методе модела. Изведене су две групе експеримената којима се тестира:

1. **могућност модела:** нивои гранских густина $\rho \in \{10\%, 30\%, 50\%, 65\%, 80\%\}$ варирају истовремено за оба графа, G и H, датих редова n_1 и n_2, где је $(n_1, n_2) \in \{(30, 50), (50, 100), (100, 200)\}$, при чему је фиксни шум узоркован из $\mathcal{N}(0,\ 0.33)$ и додат излазима.

2. **робусност модела:** фиксни шум узоркован из $\mathcal{N}(0,\ 0.25)$, $\mathcal{N}(0,\ 0.33)$ и $\mathcal{N}(0,\ 0.5)$ је додат излазима Y_{train} да би се тестирала стабилност свих коришћених апроксимација када су нивои гранских густина графова G и H фиксирани на 50%, а дати редови графова су $(n_1, n_2) \in \{(30, 50), (50, 100), (100, 200)\}$.

Штавише, за сваку општу групу експеримената, користимо три типа случајних графова:

- random графови: први скуп експеримената је спроведен на графовима генерисаним случајним генератором коришћењем Ердош-Рени модела.

- scale-free графови: други скуп експеримената је спроведен на графовима генерисаним случајним генератором коришћењем Барабаши-Алберт модела који одражава природне системе и системе које је направио човек као што су Интернет или друштвене мреже.

- small-world графови: трећи скуп експеримената је спроведен на графовима генерисаним случајним генератором коришћењеме Ватц-Строгатц модела са својствима малог света као што су метаболичке мреже.

У даљем тексту описујемо процес генерисања података у тежинским синтетичким графовима које користимо у експерименталној поставци. Да би се истражиле могућности ГГМ модела у којем су укључене и структуре различитих типова графова, дизајнирани су експерименти где сваки од графова G и H припада неком моделу рандом графова. Вектори y_1 и y_2 димензија n_1 и n_2, редом, су генерисане из нормале расподеле $\mathcal{N}(0,\ 1)$. Вектор излаза Y_{train}, за цео ГГМ модел, се генерише као

$$Y_{train} = y_1 \otimes y_2 + \nu_1, \text{ где је } |y_1| = n_1, |y_2| = n_2, \text{ и } \nu_1 \in \mathcal{N}(0, 0.33).$$

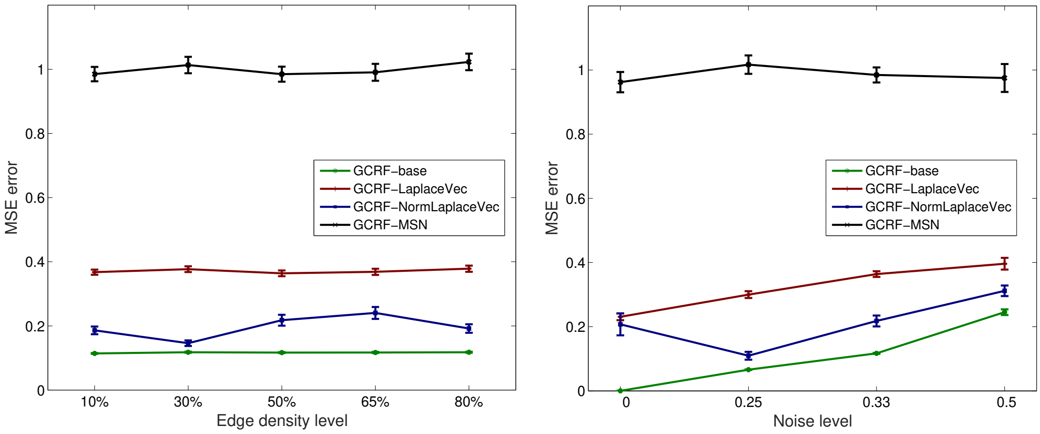
Координате вектора y_1 и y_2 треба да буду уграђене у структуре графова G и H, редом, додељивањем одређених тежина гранама графова чиме се ствара зависност између структуре графа и модела излаза. Према томе, матрица сличности S_G се добија помоћу додељивања тежина $\omega(i,j) = e^{-(y'_{1i} - y'_{1j})}$ гранама (i,j) графа G, где је додат случајни шум векторима y_1 и y_2, тј. $y'_1 = y_1 + \nu_2$, $y'_2 = y_2 + \nu_2$, и $\nu_2 \in \mathcal{N}(0, 0.25)$, јер процес предикције вектора не треба да проистекне из структуре графа директно. Исто важи и за матрицу сличности S_H. Претпоставка модела је да се структура тежинске матрице S у ГГМ моделу добија као Кронекерски производ тежинских матрица S_G и S_H. Процес генерисања неструктурираних предиктора $R_k(x)$ $(k = 1)$ је добијен према једнакостима (1.17) и (1.18), а α и β узимају вредности 1 и 5, редом. Шум за Y_{train} варира да би се тестирала робусност модела на шум. На исти начин су генерисани тест-подаци. Мотивација за додати шум је стварање структурне регресије модела који треба да избегне прекомерно прилагођавање изазвано истовременим узимањем у обзир свих датих улаза да би се предвидели сви излази (неструктурирани предиктор $R_k(x)$ се директно добија из Y_{train}). Са додатним шумом за Y_{train}, Кронекерска структура за $R_k(x)$ се такође избегава. Стога желимо да тестирамо да ли модели имају добре перформансе када уврстимо у модел мала одступања од параметарских расподела.

За изабране параметре и за сваки од ГГМ модела посебно, експерименте понављамо независно сто пута и бележимо вредности средње-квадратне грешке која се израчунава као просечна вредност средње-квадратне грешке у опсегу од 5 до 95 перцентила. Такође су израчунати интервали поверења за сваки од модела. У следећим експериментима показујемо да грешке процесирања проузроковане овим апроксимацијама имају незнатан утицај на губитак тачности регресије добијене ГГМ моделом, када се разматрају Ердош-Рени и Ватц-Строгатц типови графова. У поређењу са овим резултатима, раскорак између средње-квадратне грешке ГГМ модела на једној страни и коришћених апроксимација на другој страни, је мало већи за Барабаши-Алберт графове. Сви експерименти су спроведени на рачунару са процесором Intel Core i5-8265U 3.90 и 64 GB интерне меморије.

Резултати перформанси модела на Ердош-Рени и Ватц-Строгатц графовима

1) Могућност модела (ефективност у односу на ниво гранске густине): слика 10 (леви део) приказује предикцију средње-квадратне грешке у четири приступа као функцију нивоа гранске густине Кронекерског производа два Ердош-Рени графа са 100 и 200 чворова. Фиксни шум узоркован из $\mathcal{N}(0,\, 0.33)$ се додаје на излазе како би се у потпуности спровело тестирање модела у експерименту. Рачунске сложености коришћених апроксимација су међусобно једнаке, али је јасно да GCRF-NormLaplaceVec даје тачније резултате регресије од преостала два приступа, GCRF-LaplaceVec и GCRF-MSN. Када је ниво гранске густине једнак 10%, средње-квадратна грешка регресије GCRF-LaplaceVec модела је 0.37, што је скоро два пута више од вредности средње-квадратне грешке модела GCRF-NormLaplaceVec која износи 0.19, док GCRF-MSN има веома високу средње-квадратну грешку. Исти поступак се понавља за графове са истим бројем чворова, али са различитим нивоима гранских густина $\{30\%, 50\%, 65\%, 80\%\}$. Када је ниво гранске густине 30%, GCRF-NormLaplaceVec постиже тачније резултате регресије него за остале гранске густине. Ово се може објаснити чињеницом да сопствене вредности које одговарају сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^{S_2}$ имају најмању дисторзију када је ниво густине грана тачно 30%.

Слични резултати су изведени за Ватц-Строгатц графове (леви део слике 11). Када је ниво гранске густине једнак 10%, средње-квадратна грешке модела GCRF-LaplaceVec и GCRF-NormLaplaceVec су веома блиске међусобно, док GCRF-MSN има највећу грешку. Како гранска густина расте, GCRF-LaplaceVec има скоро константну средње-квадратну грешку у свакој тачки, док грешка GCRF-NormLaplaceVec тежи средње-квадратној грешци GCRF-base модела. У исто време, средње-квадратна GCRF-MSN се приближава 1.



Слика 10: Тачност (средње-квадратна грешка) модела у функцији процента гранске густине (лево) и ниво шума (десно), где је G Ердош-Рени граф са 100 чворова и H је Ердош-Рени граф са 200 чворова. *Лево:* одговарајући бројеви грана графова су {122, 367, 612, 796, 980} и {495, 1485, 2475, 3217, 3980}. *Десно:* тачност модела (средње-квадратна грешка) у односу на различите вредности шумова, за фиксирани ниво гранске густине од 50%.

Регресиона средње-квадратна грешка GCRF-MSN модела је увек висока, јер је коришћена лоша процена сопствених вредности, иако су сопствени вектори исти као и сопствени вектори у GCRF-NormLaplaceVec моделу. Ово се може објаснити чињеницом да процењене сопствене вредности у GCRF-MSN моделу узимају вредности из интервала $[0, 2]$, док реалне сопствене вредности припадају интервалу $[0, n_1 n_2]$ (ово важи из добро познате чињенице да су све сопствене вредности Лапласове матрице у опсегу од 0 до реда матрице). Исти експерименти су такође спроведени за Ердош-Рени графове са 30 и 50 чворова, као и са 50 и 100 чворова, а резултати су готово исти. За више детаља погледати Додатак 5.1 и леве делове слика 16 и 17. Добијене средње-квадратне грешке имају интервале поверења који се не преклапају, тако да су пријављени резултати статистички значајни.

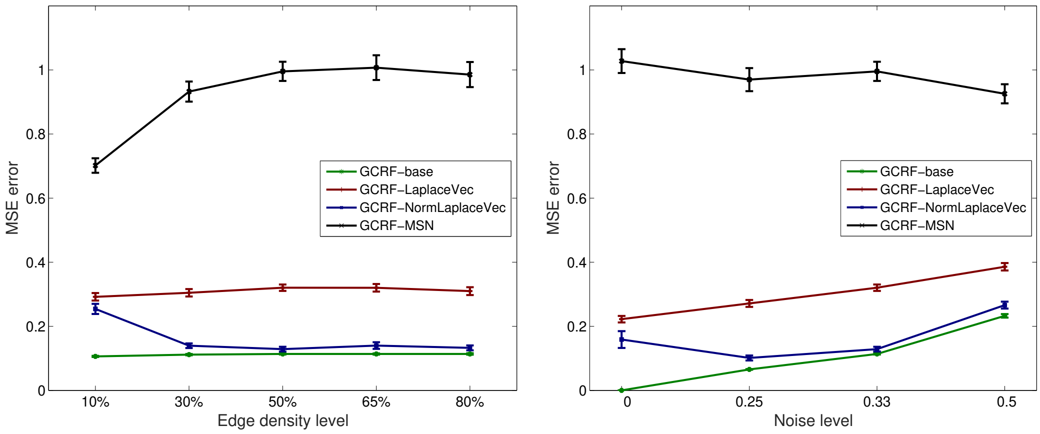
2) Робусност модела (ефективност у односу на додати шум излазима): у овој групи експеримената, за фиксни ниво гранске густине од 50% за оба графа, варирају се нивои шума у излазима модела како би се одредила робусност апроксимације у односу на шум у атрибутима чворова графа. Као што је и очекивано, са десних страна слика 10 и 11 може се видети како се додавање шума узоркованог из нормалних расподела $\mathcal{N}(0,\, 0.25)$, $\mathcal{N}(0,\, 0.33)$ и $\mathcal{N}(0,\, 0.5)$ на излазе модела рефлектује на тачност перформанси свих модела (тачности се природно смањују). Средње-квадратне грешке за GCRF-LaplaceVec и GCRF-NormLaplaceVec су скоро исте када се излазима не додаје шум у оба случаја, за Ердош-Рени и Ватц-Строгатц графове. Али када је шум већи, разлика између средње-квадртних грешака постаје уочљивија у корист GCRF-NormLaplaceVec модела, у оба случаја. Може се приметити да са повећањем шума, грешка GCRF-NormLaplaceVec модела тежи грешци GCRF-base. Такође, средње-квадратна грешка GCRF-MSN модела је значајно већа у поређењу са другим апроксимацијама. Закључак је прилично сличан за мање Ердош-Рени графова са 30 и 50 чворова и 50 и 100 чворова (погледати десне делове слика 16, 17 у Додатку 5.1). Да би се избегло понављање сличних резултата, слике за мање Ватц-Строгатц случајне графове су изостављене.

Стабилност процењених сопствених вредности и сопствених вектора из пододељка 2.1.2 се такође огледа и у стабилности ГГМ модела. Према резултатима GCRF-NormLaplaceVec модела за Кронекерски производ Ердош-Рени и Ватц-Строгатц графова (видети слике 10 и 11), који су веома блиски резултатима GCRF-base модела, испоставило се да је GCRF-NormLaplaceVec модел веома поуздан апроксимативни модел.

Перформансе на Барабаши-Алберт графовима

Експериментално је показано да су сопствени вектори $v_i^G \otimes v_j^H$ и њихове одговарајуће сопствене вредности погодније за апроксимацију оригиналних сопствених вектора и сопствених вредности за Кронекерски производ Барабаши-Алберт графова од $w_i^G \otimes w_j^H$ и њихових одговарајућих апроксимираних сопствених вредности [14]. Стога се очекује да GCRF-LaplaceVec модел даје највећу тачност регресије у већини случајева, што је потврђено извођењем експеримената за два Барабаши-Алберт графа која имају 100 односно 200 чворова. Резултати су представљени на слици 12. GCRF-LaplaceVec даје тачније резултате регресије од друге две апроксимације без обзира на ниво гранске густине и величину шума који се додаје излазима, са изузетком када је ниво густине грана 30%. Можемо приметити да је најмања дисторзија сопствених вредности које одговарају сопственим векторима $v_i^G \otimes v_j^H$ у случају када је ниво гранске густине тачно 30%. За мање графове, резултати се могу видети на сликама 18 и 19 у Додатку 5.1.

Може се апострофирати да је разлика између средње-квадратне грешке модела GCRF NormLaplaceVec и GCRF-LaplaceVec са једне и средње-квадратне грешке GCRF-base модела са друге стране, много

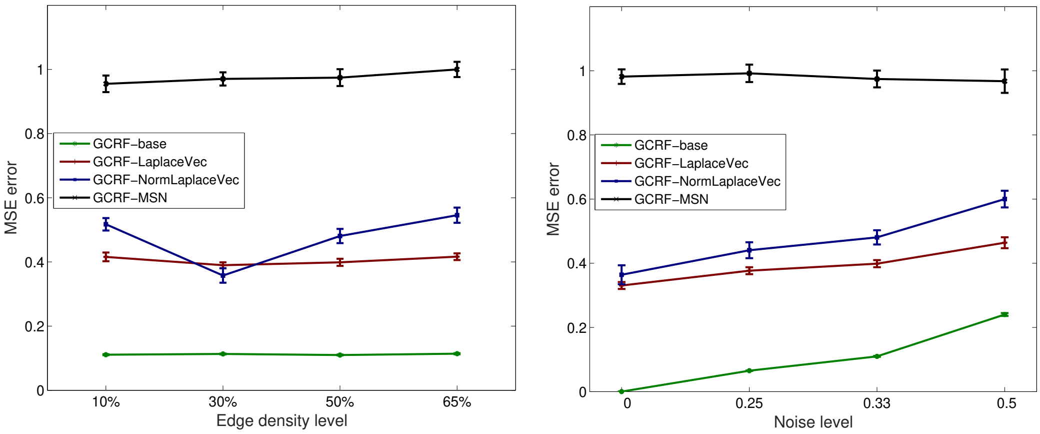


Слика 11: Тачност (средње-квадратна грешка) модела у функцији процента гранске густине (лево) и ниво шума (десно), где је G Ватц-Строгатц рандом граф са 100 чворова и H је Ватц-Строгатц рандом граф са 200 чворова. *Лево:* одговарајући бројеви грана: {100, 350, 600, 800, 1000} и {500, 1500, 2500, 3200, 4000}. *Десно:* тачност (средње-квадратна грешка) модела у односу на различите вредности шумова, за фиксирани ниво гранске густине од 50% .

већа за Барабаши-Алберт графове у поређењу са Ердош-Рени и Ватц-Строгатц случајним графовима. Не разматрамо GCRF-MSN модел, пошто је средње-квадратна грешка увек висока. У случају Барабаши-Алберт графова најмањи раскорак је око 0,3 с обзиром на све наведене апроксимативне моделе, док је у случају Ердош-Рени и Ватц-Строгатц случајних графова много мањи, скоро 0 (око 0,028 и 0,014, редом). За више детаља погледати леве делове слика 10, 11 и 12. Такође се може приметити да у случају Ердош-Рени и Ватц-Строгатц графова средње-квадратне грешке за GCRF-NormLaplaceVec и GCRF-LaplaceVec моделе теже средње-квадратној грешки GCRF-base модела (видети десне стране истих слика), те се ови модели могу третирати као задовољавајући. Чини се да је задатак побољшања поузданости апроксимативних модела могућ, па би тражење нових апроксимација могло бити нови изазовни правац у будућим истраживањима којима би се установила нижа средње-квадратна грешка у ГГМ моделу.

2.2.3 Време извршења модела

Настављамо са поређењем перформанси ГГМ модела када се користе три апроксимације у односу на GCRF-base модел. Сложеност



Слика 12: Тачност (средње-квадратна грешка) модела у функцији процента гранске густине (лево) и ниво шума (десно), где је G Барабаши-Алберт граф са 100 чворова и H је Барабаши-Алберт граф са 200 чворова. *Лево:* одговарајући бројеви грана: {100, 350, 600, 800, 1000} и {500, 1500, 2500, 3200, 4000}. *Десно:* тачност (средње-квадратна грешка) модела у односу на различите вредности шумова, за фиксни ниво гранске густине од 50% .

израчунавања за сваку апроксимацију је посебно објашњена у претходним одељцима, али такође проверавамо и време извршења ГГМ модела, понаособ. Као што смо горе поменули, инверз Лапласове матрице директно утиче на сложеност израчунавања модела, а на сложеност ове матричне операције утиче ниво гранске густине графа. Штавише, пошто се број грана графа може представити као $\binom{n}{2}p$, тестирамо време извршавања модела тако што би варирали ред графа и фиксирали ниво гранске густине или фиксирали ред графа и варирали ниво гранске густине. У табели 3 приказујемо резултате када примењујемо модел на графове Ердош-Рени типа са фиксираним нивоом гранске густине од 30%. Такође тестирамо веће графове од оних које смо користили у претходном одељку. Пошто GCRF-LaplaceVec има исту рачунску сложеност као GCRF-NormLaplaceVec и GCRF-MSN модели, може се видети да не постоји значајна разлика у њиховој брзини. Штавише, пошто ГГМ модели зависе од броја итерација, може се видети да модели GCRF-NormLaplaceVec и GCRF-MSN захтевају мање итерација у оптимизационом задатку модела него GCRF-LaplaceVec. Основни алгоритам има велику рачунску сложеност $O(n_1^3 n_2^3)$, па је спорији у односу на ГГМ моделе са апроксимацијама, иако се његов број итерација смањује како се редови графова повећавају. Дакле, компромис између вре-

		GCRF			
ред графова		base		LaplaceVec	
G	H	**врем.изврш.**	**бр. итер.**	**врем.изврш.**	**бр. итер.**
50	30	0.78 ± 0.03	21	0.31 ± 0.03	21
50	100	19.03 ± 0.09	22	1.59 ± 0.04	22
100	200	1089 ± 8.99	46	45.02 ± 0.54	47
100	300	2216 ± 6.21	9	82.25 ± 0.37	51
200	200	5192 ± 43.6	9	186.42 ± 2.46	73
		GCRF			
ред графова		NormLaplaceVec		MSN	
G	H	**врем.изврш.**	**бр. итер.**	**врем.изврш.**	**бр. итер.**
50	30	0.47 ± 0.01	16	0.47 ± 0.01	16
50	100	1.74 ± 0.02	17	1.73 ± 0.01	20
100	200	44.88 ± 0.69	24	45.15 ± 0.49	22
100	300	81.48 ± 0.58	24	81.09 ± 0.37	23
200	200	185.13 ± 2.93	26	181.77 ± 2.25	26

Табела 1: Време извршења у секундама када су оба графа типа Ердош-Рени са нивоима гранских густина од 30%

мена извршења и тачности регресије ГГМ модела са апроксимацијама је остварен у случају када се модел GCRF-NormLaplaceVec користи за Ердош-Рени и Ватц-Строгатц графове, а GCRF-LaplaceVec модел у случају Барабаши-Алберт графова. Треба напоменути да нема значајније разлике у временима извршења за Ватц-Строгатц и Барабаши-Алберт типове графова.

2.2.4 Перформансе графовских модела базираним на близу Кронекерским структурама

У претходном одељку смо показали како предложене апроксимације Лапласовог спектра Кронекерског производа графова утичу на тачност регресије ГГМ модела. Ове апроксимације су веома погодне у случају када се тежинска матрица S у ГГМ моделу може представити као Кронекерски производ мањих тежинских матрица које одговарају одређеним типовима случајних графова. У реалним применама, врло често то није случај. У овом одељку тестирамо тачност регресије ГГМ модела, када се матрица сличности не може декомпоновати у Кронекерски производ матрица. Приступ који ће бити приказан овде, се састоји од две врсте узастопно примењених апроксимативних метода, где се у првом проналази најближи Кронекерски производ матрица S_G и S_H датих редова тежинској матрици S (за неке графове G и H), а након тога процењујемо спектар $L_{G\otimes H}$ користећи спектре (нормализованих) Лапласових матрица графова G и H, редом.

Теоријске основе

Описујемо најпре алгоритам за проналажење најближег Кронекерског производа матрица за почетну реалну матрицу A, у односу на Фробенијусову норму дефинисану као квадратни корен збира квадрата елемената матрице. Прецизније, за дату матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, где су $m = m_1m_2$ и $n = n_1n_2$, наш задатак је да одредимо матрице $B \in \mathbb{R}^{m_1\times n_1}$ и $C \in \mathbb{R}^{m_2\times n_2}$ тако да је $\Phi_A(B, C) =\| A-B\otimes C \|_F$ минимално. Овај проблем је познат као проблем најближег Кронекерског производа и може се решити коришћењем сингуларне декомпозиције такозване пермутационе матрице од A, означене са $\mathcal{R}(A)$ ([72]). У даљем тексту дајемо прецизну дефиницију $\mathcal{R}(A)$ и кратак преглед решења овог оптимизационог проблема.

Размотримо $m_2 \times n_2$ подматрицу (блок) матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n_1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m_1,1} & A_{m_1,2} & \dots & A_{m_1,n_1} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_2\times n_2}, \tag{2.20}$$

и операцију $vec : \mathbb{R}^{p\times q} \to \mathbb{R}^{pq\times 1}$ дефинисану надовезивањем (стековањем) колона $X_{1,i} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$, $1 \le i \le q$, матрице X једне на другу

$$vec(X) = \begin{bmatrix} X_{1,1} \\ X_{1,2} \\ \vdots \\ X_{1,q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pq\times 1}, X \in \mathbb{R}^{p\times q}.$$

Ова операција ће се користити да би се изразила минимизација $\| A - B \otimes C \|_F$ у терминима тзв. проблема апроксимације ранга 1 (за дату матрицу M, треба одредити матрицу $\widetilde{M}$ такву да је $rank(\widetilde{M}) = 1$ и $\| M - \widetilde{M} \|_F$ минимално). Штавише, у односу на блокове $A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_2\times n_2}$ ($1 \le i \le m_1$, $1 \le j \le n_1$) матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ из (2.20), где је $m = m_1m_2$ и $n = n_1n_2$, оператор $\mathcal{R} : \mathbb{R}^{m_1m_2\times n_1n_2} \to \mathbb{R}^{m_1n_1\times m_2n_2}$ је дефинисан на следећи начин

$$\mathcal{R}(A) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n_1} \end{bmatrix}, \quad A_j = \begin{bmatrix} vec(A_{1,j})^T \\ vec(A_{2,j})^T \\ \vdots \\ vec(A_{m_1,j})^T \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n_1.$$

Следећа теорема успоставља везу између проблема минимизирања $\Phi_A(B, C)$ и проблема апроксимације $\mathcal{R}(A)$ са матрицом ранга 1.

Теорема 2.6. *Претпоставимо да је* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *тако да је* $m = m_1 m_2$ *и* $n = n_1 n_2$. *Ако је* $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ *и* $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, *онда је* $\Phi_A(B, C) =$ $\| A - B \otimes C \|_F = \| \mathcal{R}(A) - vec(B) vec(C)^T \|_F$.

Проблем минимизације Φ је еквивалентан проналажењу најближе матрица ранга 1, $\mathcal{R}(A)$. Апроксимација дате матрице матрицом ранга 1 има решење добијено из Теореме 2.6, у терминима сингуларне декомпозиције.

Последица 2.1. *Нека је* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *тако да је* $m = m_1 m_2$ *и* $n = n_1 n_2$. *Ако* $\tilde{A} = \mathcal{R}(\mathcal{A})$ *има сингуларну декомпозицију*

$$U^T \tilde{A} V = \Sigma = diag(\sigma_i),$$

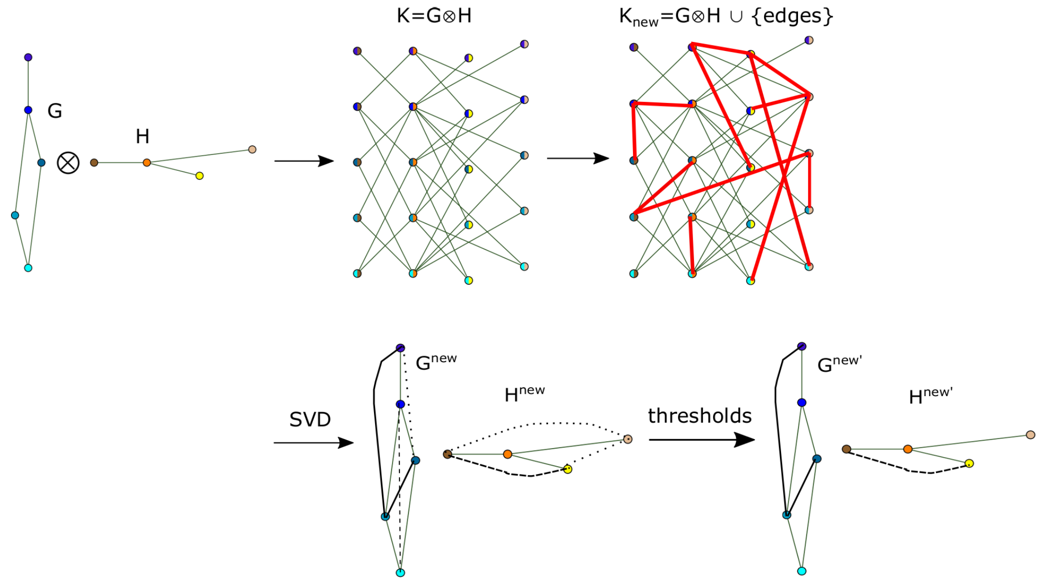
где је σ_1 *највећа сингуларна вредност, а* $U(i, 1)$ *и* $V(j, 1)$ *су одговарајући сингуларни вектори* $(1 \leq i \leq m_1 n_1, 1 \leq j \leq m_2 n_2)$, *онда матрице* $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ *и* $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ *дефинисане са* $vec(B) = \sigma_1 U(i, 1)$ *и* $vec(C) = V(j, 1)$, *минимизирају израз* $\| A - B \otimes C \|_F$.

У даљем тексту описујемо процес генерисања података (тежинских синтетичких графова, као и параметара ГГМ модела за експерименталну поставку).

Експериментална поставка

У наставку одељка представљамо добијене резултате за ГГМ моделе када се тежинска матрица која није Кронекерски производ матрица (не-Кронекерска матрица) декомпонује коришћењем сингуларне декомпозиције, према Последици 2.1. Најпре ћемо укратко описати експерименталну поставку која ће бити коришћена у овом одељку, а која се у неколико суштинских ствари разликује од експеримента описаног у претходном одељку. Вектор излаза Y_{train}, за цео ГГМ модел, се генерише на следећи начин:

$Y_{train} = y_1 \otimes y_2 + \nu_1$, где је $|y_1| = n_1, |y_2| = n_2$, и $y_1, y_2 \in \mathcal{N}(0, 1), \nu_1 \in \mathcal{N}(0, 0.33)$.



Слика 13: Процес добијања фактор-графова из не-Кронекерског графа.

Висока корелација између излаза и неструктурираних предиктора $R_k(x)$ се уклања додавањем додатног шума у Y_{train}, узоркованог из $\mathcal{N}(0, 0.33)$.

Нека су G и H графови редова n_1 и n_2, редом. Тежинска матрица модела $S_G = (s_{ij}^{(G)})$, $1 \leq i, j \leq n_1$ графа G је добијена додавањем следеће тежине грани (i, j)

$$\omega(i,j) = \begin{cases} e^{-(y'_{1i} - y'_{1j})}, & (i,j) \in E(G) \\ 0, & (i,j) \notin E(G) \end{cases}, \tag{2.21}$$

где додајемо рандом шум вектору y_1 тј., $y_1' = y_1 + \nu_2$, $\nu_2 \in \mathcal{N}(0, 0.25)$. Исто важи за матрицу S_H и вектор y_2. Даље, тежинска матрица суседства Кронекерског производа $K = G \otimes H$ се добија као $S(K) = S_G \otimes S_H$. Да би се нарушила Кронекерска структура графа, нове гране у графу K су додате на случајан начин чиме добијамо граф K_{new}, тиме што замењујемо елемент на позицији (i, j) једнак нули у матрици $S(K)$ вредношћу $e^{-(y'_{1i_1} - y'_{1j_1})} e^{-(y'_{1i_2} - y'_{1j_2})}$, где је $i_1 = \lfloor (i-1)/n_2 \rfloor + 1$, $j_1 = (i-1)\% n_2 + 1$, $i_2 = \lfloor (j-1)/n_2 \rfloor + 1$ и $j_2 = (j-1)\% n_2 + 1$. Приметимо да је $S(K)_{i,j} = 0$ ако и само ако $\omega_{i_1 j_1} = 0$ или $\omega_{i_2 j_2} = 0$ (другим речима $(i_1, j_1) \notin E(G)$ или $(i_2, j_2) \notin E(H)$). На овај начин добијамо не-Кронекерски граф K_{new} (видети слику 13), јер у општем случају не можемо тврдити да се K_{new} може представити као Кронекерски производ два графа.

Након примене Последице 2.1 на тежинску матрицу суседства $S(K_{new})$, добијамо две матрице $S_G{}^{new}$ и S_H^{new} које су тежинске матрице суседства неких графова G^{new} и H^{new} (погледати слику 13). Такође, можемо приметити да су ове матрице ненегативне и симетричне матрице што следи из Теорема 6 и 9 из [73], али дијагонални елементи не морају бити једнаки нули. Према експерименталним резултатима базираним на различитим нивоима гранских густина графова, одговарајуће вредности прагова се користе за уклањање малих вредности елемената матрице (слабе гране). Пошто су матрице $S_G{}^{new}$ и S_H^{new} симетричне матрице, новодобијене матрице $S_G{}^{new'}$ и $S_H^{new'}$ су такође симетричне, али са већим бројем нула елемената. Да бисмо добили матирце простих графова, дијагонални елементи који нису једнаки нули се постављају на 0 (у експериметима је забележено да је свега неколико таквих елемената). Зато су елементи $S_k^{new'}$ дефинисани на следећи начин:

$$S_k^{new'}(i,j) = \begin{cases} S_k^{new}(i,j), & S_k^{new}(i,j) \geq t_k(\rho_k) \\ 0, & S_k^{new}(i,j) < t_k(\rho_k) \text{ или } i = j \end{cases}, k = 1, 2,$$

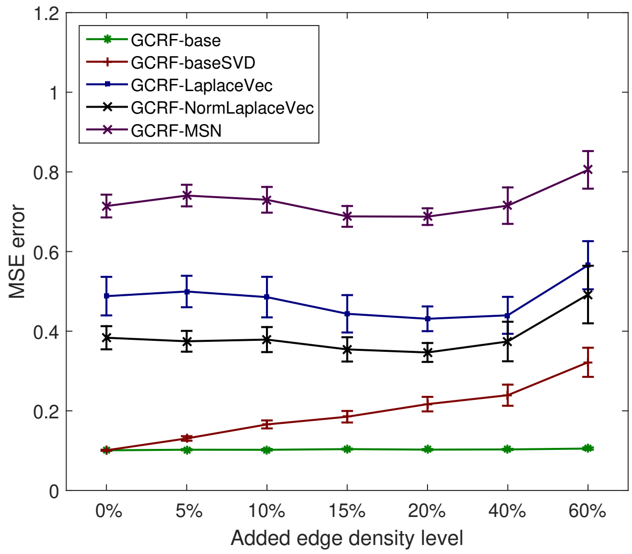
где су $t_1(\rho_1)$ и $t_2(\rho_2)$ прагови, док су ρ_1 и ρ_2 нивои гранских густина почетних графова G и H. Даље, процес генерисања неструктурисаног предиктора $R_k(k)$ $(k = 1)$ се врши према једначинама (1.17) и (1.18). Такође, параметри α и β узимају вредности 1 и 5, редом.

Пре него што представимо коначне резултате и тачност модела, најпре ћемо дати неке коментаре који се односе на тежине постојећих грана у графовима G^{new} и H^{new}, након одређивања најближег Кронекерског производа матрице $S(K_{new})$. Важно је напоменути да су графови G и H подграфови G^{new} и H^{new}, редом. Одавде следи да су нивои гранских густина за оба графа G^{new} и H^{new} већи од нивоа гранских густина за G и H. Међутим, са повећањем броја додатих грана у графу K, ове варијације постају приметније. Штавише, многе од ових нових грана (које не постоје у почетним графовима) су слабе гране, што значи да су њихове тежине много мање од просечне тежине грана (понекад више од 10^3 пута мање). У нашим експериментима ове гране ћемо третирати као шум и можемо их лако уклонити коришћењем одређеног прага који је одређена функција (статистика) вредности тежинске матрице. Прагови $t_1 = t_1(\rho_1)$ и $t_2 = t_2(\rho_2)$ су одређени израчунавањем перцентила за елементе обе матрице $S_1^{new'}$ и $S_2^{new'}$.

2.2.5 Резултати

У изведеним експериментима, где се тестира могућност модела, ниво гранске густине $\rho \in \{10\%, 20\%, 30\%\}$ варира истовремено за оба графа, G и H, који су случајни графови истог типа. У даљем тексту представљамо добијене резултате за регресиону тачност ГГМ модела, када је претходно описана апроксимација (сингуларна декомпозиција) примењена на не-Кронекерски граф K_{new}. Слично претходном, изведено је поређење између пет модела: GCRF-base, GCRF-baseSVD, GCRF-MSN, GCRF-LaplaceVec и GCRF-NormLaplaceVec, који су укратко описани у наставку. GCRF-base модел је заснован на тежинској матрици суседства $S(K_{new})$ код које је нумерички израчуната њена спектрална декомпозиција. GCRF-baseSVD модел је базиран на апроксимацији коришћењем сингуларне декомпозиције матрице $S(K_{new})$. Након што се матрица апроксимира Кронекерским производом матрица, примењују се нумеричка израчунавања за спектралну декомпозицију матрица. За разлику од GCRF-baseSVD и GCRF-base модела, апроксимације за Лапласове сопствене вредности и сопствене векторе се користе у GCRF-MSN, GCRF-LaplaceVec и GCRF-NormLaplaceVec моделима као што је то учињено у претходном одељку, уместо нумеричког израчунавања спектра. Овде представљамо резултате за експерименте у којима фигуришу графови Ердош-Рени типа са 30 и 50 чворова. Исти експерименти спроведени су и на графовима Ердош-Рени са 50 и 100 чворова, као и са 100 и 200 чворова, а резултати су прилично слични.

Да бисмо видели како проценат додатих грана у графу утиче на тачност регресије модела, спроводимо експерименте где је број додатих грана линеарно завистан од броја постојећих грана у графу. Проценат додатих грана варира у опсегу $noise = \{0\%, 5\%, 10\%, 15\%, 20\%, 40\%, 60\%\}$ у односу на број грана у почетном Кронекерском графу K. Овде описујемо експерименте за Ердош-Рени графове са 30 и 50 чворова и нивоима гранских густина од 10%, за оба графа (слика 14). Када у графу K нема додатних грана (0% додатих грана), резултати су исти као на слици 16 за 10% на x-осама. У овом случају средње-квадратна грешка очигледно проистиче само од процене Лапласовог спектра Кронекерског производа графова (K_{new} је Кронекерски производ графова). Слика 14 представља средње-квадратну грешку модела када проценат додатих грана узима вредности из скупа $noise$. Може се видети да су средње-квадратне грешке GCRF-base и GCRF-bazeSVD модела на почетку веома блиске међусобно, али разлика постаје уочљивија када се повећа проценат додатих грана (разлике између грешака произлазе из апроксимације начињене приликом сингуларне декомпозиције). Заи-



Слика 14: Тачност (средње-квадратна грешка) модела када је ниво гранске густине иницијалних графова 10%.

ста, може се приметити из табеле 2 да се Фробенијусова норма разлике између тежинске матрице суседства $S(K_{new})$ и њене апроксимације коришћењем Кронекерског производа повећава са бројем додатих грана у графу K. Штавише, када се број додатих грана повећава, раскорак између грешака апроксимативних модела (GCRF-base,а GCRF-LaplaceVec, GCRF-NormLaplaceVec и GCRF-MSN) и GCRF-baseSVD модела постаје мањи (за шум од 10% до 60%). Ово се може објаснити чињеницом да сопствени вектори који се користе у овим моделима постају много бољи када је број грана у графу већи за унапред дати ред графа. У овом случају, грешка која произилази из апроксимације због сингуларне декомпозиције се донекле компензује због стабилне апроксимације Лапласовог спектра и Лапласових сопствених вектора за гушће графове. Такође, за шум од 40% до 60% графици средње-квадратних грешака свих апроксимационих модела постају мало стрмији него у претходним корацима, чинећи да распон између грешака модела и GCRF-base модела буде већи. У овом случају је број додатих грана велики, што доводи до озбиљног кршења Кронекерске структуре. Слично понашање се уочава када почетни графови, G и H ($|G| = 30$ и $|H| = 50$), имају нивое гранских густина 10% и 20%, 10 % и 30% и обрнуто.

шум	**Фробениусова норма 1**	**Фробениусова норма 2**
5%	10.607	10.601
10%	15.033	15.027
15%	18.818	18.811
20%	21.557	21.551
40%	30.513	30.501
60%	37.485	37.471

Табела 2: $a)$ $\|S(K_{new}) - S_1^{new} \otimes S_2^{new}\|_F$ и $b)$ $\|S(K_{new}) - S_1^{new'} \otimes S_2^{new'}\|_F$, где је ниво гранске густине за оба иницијална графа 10%.

2.2.6 Време извршења графовских модела

У овом пододељку проверавамо време извршења сваког од наведених типова ГГМ модела. Табела 3 приказује резултате у случају два графа Ердош-Рени типа са нивоима гранских густина од 30%, и фиксним шумом од 10%. Основни алгоритам (GCRF-base) има велику рачунарску сложеност $O(n_1^3 n_2^3)$, па је спорији у односу на ГГМ моделе са апроксимацијама (GCRF-MSN, GCRF-NormLaplaceVec, GCRF-LaplaceVec). У поређењу са резултатима из пододељка 2.2.3, апроксимациони модели, разматрани у овом одељку, имају сингуларну декомпозицију као додатни корак апроксимације, пошто се иницијална тежинска матрица мора разложити у Кронекерски производ две матрице. Овај корак додатно успорава апроксимационе моделе, али као што се може приметити и даље су много бржи него GCRF-base модел. Ово произилази из чињенице да само највећа сингуларна вредност и одговарајући сингуларни вектори морају бити одређени, а не потпуна сингуларна декомпозиција матрице. За разлику од претходног, за GCRF-base модел све сопствене вредности и сопствени вектори се морају израчунати. Изоставили смо време извршења GCRF-baseSVD модела, јер је он дат само у сврху поређења модела, без практичне користи.

Експерименти су спроведни на три врсте случајних графова: Ердош-Рени, Ватц-Строгатц и Барабаши-Алберт. Значајно побољшање тачности се постиже у поређењу са ГГМ моделом који се користи у [35]. У случају Ердош-Рени добијене средње-квадратне грешке предложених апроксимационих модела су најмање 3 пута ниже од средње-квадратних грешака претходно предложеног модела и најмање 2 пута у случају Барабаши-Алберт графова. Такође смо показали да је ГГМ модел који укључује апроксимације сопствених вредности и апроксимације сопствених вектора из пододељка 2.1.1 даје добру предиктивну

		GCRF			
ред графова		base	LaplaceVec	NormLaplaceVec	MSN
G	H	**врем.изврш.**	**врем.изврш.**	**врем.изврш.**	**врем.изврш.**
50	30	0.78 ± 0.03	0.55 ± 0.04	0.71 ± 0.01	0.71 ± 0.01
50	100	19.03 ± 0.09	3.26 ± 0.03	3.41 ± 0.02	3.40 ± 0.02
100	200	1089 ± 8.99	67.32 ± 0.82	67.18 ± 0.59	67.45 ± 0.74
100	300	2216 ± 6.21	160.37 ± 6.28	159.6 ± 7.18	159.21 ± 5.44
200	200	5192 ± 43.6	349.98 ± 21.66	348.69 ± 28.30	345.33 ± 25.56

Табела 3: Време извршења у секундама када су оба графа типа Ердош-Рени са нивоима гранских густина од 30%

тачност модела у случају Барабаши-Алберт графова, док су апроксимације из претходног пододељка прикладније у случају Ердош-Ре́ни и Ватц-Строгатц случајних графова (GCRF-NormLaplaceVec грешка тежи средње-квадратној грешки GCRF-base модела).

Исти модели се тестирају и у случају када граф није могуће декомпоновати Кронекерским производом графова. У овом случају, сингуларна декомпозиција се користи за проналажење најближег Кронекерског производа графова за почетни граф. Комбинација две узастопно примењене апроксимације, сингуларна декомпозиција и апроксимација за Лапласове сопствене вредности и сопствене векторе, обезбеђује високу регресиону тачност апрокисмативних ГГМ модела иако постоје две апроксимације укључене у ГГМ модел, време извршења таквих модела је много краће у поређењу са временом извршења оригиналног ГГМ модела, док је постигнута средње-квадратна грешка ниска. У будућем истраживању покушаћемо да апроксимирамо матрице суседства графове без Кронекерске структуре матрицама већег ранга, тј. њима одговарајуће пермутационе матрице су ранга већег од један (према Теореми 2.6).

3 Циркуларна декомпозиција

У трећем поглављу изложени су резултати у вези налажења апроксимативних матрица нижег ранга које би апроксимирале Лапласову матрицу графа модела и задржале доминантна спектрална својства поменуте матрице у циљу добијања бољих перформанси модела. Прецизније речено, користимо специјалне случајеве метода декомпозиције Лапласове матрице као суме циклицних матрица са одговарајућом релаксацијом. У неким случајевима декомпозиција се може свести на једну цикличну матрицу, што ће бити коришћено у случају када је матрица графовског модела квази-периодична матрица. Мотивација за разматрање ове декомпозиције лежи у чињеници да се применом брзе Фуријеове трансформације може убразати извршење спектралне декомпозиције цикличних матрица, као и то што се може ефикасно извести циркуларна декомпозиција. У случају једночлане декомпозиције циљ је одабрати цикличну матрицу на којој би се спектрална декомпозиција брзо извршила, као што су матрице суседства унитарних Кејлијевих графова и Кронекерских циркулантних графова (ту спадају класе јако регуларних и уопште графова са малим бројем сопствених вредности) чије су конструкције и карактеризације презентоване у првом одељку поглавља. Тиме би се постигла бржа конвергенција метода уз разумно смањење тачности процене параметара модела. Како конвергенција метода и тачност модела зависе од величине спектралног покривача матрице суседства графа, у другом и трећем одељку су одређени минимална најмања сопствена вредност и минимални спектрални покривач у класи циркулантних графова датог реда. У четвртом одељку је коментарисана тополошка инваријанта циркулантних графова која утиче на њихова спектрална својства као што је дијаметар. Дијаметар графа је у директној кореспонденцији са модулом друге највеће сопствене вредности, а њена величина утиче на на тзв. главни део спектра, па су у одељку презентовани резултати којима се израчунава максимална вредност дијаметра графа у класи циркулантних графова датог реда, при чему су окарактерисани сви такви ектремални графови. Изведене су одређене анализе асимптотске сложености, као и нумеричка израчунавања којима је показано да употреба горњих теоријских резултата даје добре резултате по питању тачности модела у случају када је матрица суседства графа квази-периодична (Теплицова, блок-Теплицова, итд.). Приказани резултати су оригинални и базирани су на радовима који представљају оригинални допринос докторској дисертацији [7, 8, 9, 12, 13].

3.1 Графовске матрице са малим бројем сопствених вредности

Већина сопствених вредности графа је различита у општем случају, али када одређени број сопствених вредности имају велику вишеструкост (број различитих сопствених вредности је мали), онда графови имају посебну структуру и могуће их је најчешће представити путем одређених графовских операција. Ако су све сопствене вредности исте, онда граф мора бити празан (граф без грана). Ако имамо само две сопствене вредности, онда је граф комплетан (граф у којем су свака два чвора суседна). У овом одељку проучавамо графове који су уско повезани са циркулантним графовима (графови изведени из циркулантних одређеним графовским операцијама) са три и четири различите сопствене вредности.

Графови са тачно три различите сопствене вредности су генерализације јако регуларних графова (уколико графови нису регуларни). Нерегуларни графови са три различите сопствене вредности су мање проучавани у литератури пошто у великом броју случајева не поседују одређена комбинаторна својства, за разлику од регуларних графова, а такође је и њихово проучавање по правилу компликованије [29]. Регуларни графови са четири различите сопствене вредности проучавани су у [28], у којем су дата одређена својства, конструкције и примери. Карактеризација јако регуларних циркулантних графова чији је ред степен простог броја дата је у [51], док су конструкције неких фамилија јако регуларних графова и симетричних блок-дизајна дате извођењем NEPS операције над комплетним графовима, а касније и над сложенијим структурама [25]. У овом одељку ћемо најпре окарактерисати јако регуларне интегралне циркулантне графове, мотивисани између осталог и неуспелим покушајем такве карактеризације у раду [23], а након тога показати да се сваки такав граф може представити Кронекерским производом два комплетна графа. У наставку ћемо конструисати класе нецикличних графова коришћењем операција Кронекерског производа, линијског оператора и оператора пребацивања над класама циркуланта. Резултати у овом одељку су оригинални и базирани на самосталним радовима аутора дисертације [7, 8].

3.1.1 Јако регуларни интегрални циркулантни графови

Мотивисани уоченом грешком у Теореми 4.2 у [23] у којем су аутори покушали да окарактеришу класу интегралних циркулантних графова који су јако регуларни, у наставку доказујемо резултат коришћењем спектралних својстава цикличних матрица. Једини покушај доказа користећи спектралну теорију графова може се наћи у [23] и такође у [51], где је дато само делимично решење за јако регуларне циркуланте чији је ред степен простог броја. Поред потпуне карактеризације јако регуларних интегралних циркулантних графова, презентоваћемо и бројна спектрална својства цикличних матрица. Прецизније, најпре ћемо презентовати нека нова својства Рамануџанових функција. Она је неопходна за доказивање тврђења којим се даје општа карактеризација класе интегралних циркулантних графова који имају све парне елементе са непарним индексима спектра чији је распоред дат у одређеном редоследу. Ова чињеница нам помаже да пронађемо све јако регуларне интегралне циркулантне графове чије су две мање сопствене вредности обе парне или непарне. Испитивањем својства сопствених вредности интегралних циркулантних графова дајемо општу карактеризацију класе интегралних циркулантних графова са две мање сопствене вредности различите парности. Доказ захтева опсежну дискусију кроз велики број различитих случајева.

Сада ћемо укратко објаснити у ком делу доказ из Теореме 4.2 [23] поседује грешку. Кључна идеја доказа је показивање да је друга највећа сопствена вредност λ_2 циркулантог графа G једнака нули користећи метод контрадикције. У пасусу у којем аутори претпостављају да је λ_2 већа од нуле, добијају да G није потпун d-партитни граф, одакле се даље закључује да G није циркулантан (према Теореми 3.4), што би требало да буде контрадикторно. Међутим, Теорема 3.4 каже да је граф G потпун d-партитни граф ако и само ако је је циркулантни граф са одређеним скупом симбола S. Дакле, из чињенице да G није потпун d-партитни граф, можемо само закључити да G није специјална класа циркулантних графа. У општем случају може бити циркулантан, па је јасно да аутори не добијају контрадикцију, односно није могуће на овај начин завршити доказ. Штавише, чињеница да аутори нису користили ниједно од својстава ни интегралних ни циркулантних графова, говори сама по себи да резултат не може да се докаже на предложени начин.

У Лемама 3.1 и 3.2 представљамо нека важна својства Рамануџанове функције дефинисане са (1.9).

У овом одељку са $2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ означићемо канонску факторизацију природног броја n, при чему је $\alpha_i \geqslant 1$ за $1 \leq i \leq k$ и $\alpha_0 \geq 0$.

Такође, за дати прост број p и природни број $n \in \mathbb{N}$, означићемо са $S_p(n)$ максимални број α такав да је $p^\alpha \mid n$, тј. $p^\alpha \parallel n$.

У следећој леми налазимо потребне и довољне услове када је Рамануџанова функција $c(j, n/d)$ непарна, где је $1 \leq j \leq n-1$ фиксирани број са следећом факторизацијом $j = 2^{\gamma_0} p_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \dots p_{i_s}^{\gamma_{i_s}} p_{i_{s+1}}^{\alpha_{i_{s+1}}} \dots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$, $0 \leq \gamma_0 \leq \alpha_0$, $0 \leq \gamma_i < \alpha_i$, за $1 \leq i \leq s$. Нека је $(i_1, \dots, i_k)$ је пермутација бројева $\{1, \dots, k\}$. Можемо приметити да бар један од услова $\gamma_0 < \alpha_0$ или $s \geq 1$ важи пошто је $j < n$. У следећем исказу леме, без губитка општости претпоставимо да је пермутација $(i_1, \dots, i_k)$ једнака $(1, \dots, k)$ да би појединоставили запис.

Лема 3.1. *Нека је $1 \leq j \leq n-1$ произвољан број са следећом канонском факторизацијом $j = 2^{\gamma_0} p_1^{\gamma_1} \dots p_s^{\gamma_s} p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \dots p_k^{\alpha_k}$, за $0 \leq \gamma_0 \leq \alpha_0$, $0 \leq \gamma_i < \alpha_i$, $1 \leq i \leq s$ и $0 \leq s \leq k$. Тада за произвољни делилац d од n, природни број $c(j, n/d)$ је непаран ако и само ако $d = 2^{\beta_0} p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, где је $\beta_0 \in \{\alpha_0 - 1, \alpha_0\}$, $\beta_i \in \{\alpha_i - \gamma_i - 1, \alpha_i\}$ (за $1 \leq i \leq s$) и $\beta_i = \alpha_i$ (за $s+1 \leq i \leq k$).*

Доказ. ($\Rightarrow$) Претпоставимо да је $c(j, n/d)$ непаран број. Пошто је $c(j, n/d) = \mu(t_{n/d,j}) \varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,j})$, онда је $c(j, n/d)$ непаран ако и само ако је $\mu(t_{n/d,j)}) = \pm 1$, тј. $t_{n/d,j}$ је производ различитих простих бројева и $\varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,j})$ је непаран број.

Пошто је $t_{n/d,j} = n/(\mathrm{dnzd}(n/d, j))$ добијамо да је

$$S_{p_i}(t_{n/d,j}) = S_{p_i}(n/d) - \min\{S_{p_i}(n/d), S_{p_i}(j)\},$$

за $0 \leq i \leq k$, где подразумевамо да је $p_0 = 2$.

Ако је $s+1 \leq i \leq k$, онда је $S_{p_i}(j) = \alpha_i \geq S_{p_i}(n/d)$ и стога $S_{p_i}(t_{n/d,j}) = 0$. Ако $p_i \mid n/d$, онда $p_i - 1 \mid \varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,j})$, што је контрадикција пошто смо претходно закључили да је $\varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,j}) \in 2\mathbb{N}+1$. Дакле, имамо да $p_i \nmid n/d$ и $S_{p_i}(d) = \alpha_i$, за сваки $s+1 \leq i \leq k$.

Ако је $0 \leq i \leq s$, онда имамо

$$S_{p_i}(t_{n/d,j}) = \begin{cases} 0, & S_{p_i}(n/d) \leq \gamma_i \\ S_{p_i}(n/d) - \gamma_i, & S_{p_i}(n/d) > \gamma_i. \end{cases}$$

Штавише, за $0 \leq i \leq s$, пошто је $t_{n/d,j}$ производ простих бројева, имамо да је $0 \leq S_{p_i}(t_{n/d,j}) \leq 1$. За $1 \leq i \leq s$, ако $p_i \nmid t_{n/d,j}$ и $p_i \mid n/d$, слично као у претходном случају закључујемо да је $\varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,j}) \in 2\mathbb{N}$, што је контрадикција. Дакле, ако $p_i \nmid t_{n/d,j}$, можемо закључити да $p_i \nmid n/d$ и $S_{p_i}(d) = \alpha_i$. Сада, у другом случају за $p_i \mid t_{n/d,j}$, пошто је $t_{n/d,j}$ производ различитих простих фактора, имамо $S_{p_i}(t_{n/d,j}) = 1$ и стога $S_{p_i}(n/d) = \gamma_i + 1$, одакле коначно добијамо да је $S_{p_i}(d) = \alpha_i - \gamma_i - 1$. Приметимо да у овом случају релација $p_i - 1 \nmid \varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,j})$ такође важи и стога је $\varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,j})$ увек непаран у свим горе наведеним случајевима (у супротном, парно $\varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,j})$ би имплицирало да је $c(j, n/d)$ парно, што би била контрадикција).

За $i = 0$, већ смо приметили да је $0 \leq S_2(t_{n/d,j}) \leq 1$. Ако је $S_2(n/d) \geq 2$, тј. $S_2(d) \leq \alpha_0 - 2$, имамо да $\varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,j}) \in 2\mathbb{N}$, то је контрадикција. Тако закључујемо да је $\alpha_0 - 1 \leq \beta_0 \leq \alpha_0$.
($\Leftarrow$) Претпоставимо да је $d = 2^{\beta_0} p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, где је $\beta_0 \in \{\alpha_0 - 1, \alpha_0\}$, $\beta_i \in \{\alpha_i - \gamma_i - 1, \alpha_i\}$ (за $1 \leq i \leq s$) и $\beta_i = \alpha_i$ (за $s + 1 \leq i \leq k$). Дакле, $n/d = 2^{\delta_0} p_1^{\delta_1} \dots p_k^{\delta_k}$, где је $\delta_0 \in \{0, 1\}$, $\delta_i \in \{0, \gamma_i + 1\}$ (за $1 \leq i \leq s$) и $\delta_i = 0$ (за $s + 1 \leq i \leq k$). Такође, $t_{n/d,j} = 2^{\epsilon_0} p_1^{\epsilon_1} \dots p_s^{\epsilon_s}$, где је $\epsilon_i \in \{0, 1\}$, $\delta_i = 0 \Leftrightarrow \epsilon_i = 0$, за $1 \leq i \leq k$. Коначно, закључујемо да је $t_{n/d,j}$ производ различитих простих фактора и $\varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,j}) \in 2\mathbb{N} + 1$, што имплицира да је $c(j, n/d)$ непаран.

$\square$

Лема 3.2. *Нека је d произвољни делилац броја n такав да је $n/d \in 2\mathbb{N} + 1$ и $0 \leq j \leq n - 1$ произвољан природни број, тада је $c(j, n/d) = -c(j, 2n/d)$ за $j \in 2\mathbb{N} + 1$ и $c(j, n/d) = c(j, 2n/d)$ за $j \in 2\mathbb{N}$.*

У наставку дисертације са $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ означавамо спектар интегралног циркулантног графа $\mathrm{G}_n(D)$, који је задат формулом (1.8). Подсећања ради, напоменимо да је спектрални радијус повезаног $r-$регуларног графа X једнак регуларности r и да је она проста сопствена вредност графа X. Према (1.10), у случају интегралног циркулантног графа са спектром $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ задатим помоћу (1.8), λ_0 је једнака регуларности графа.

Ради јасноће и боље читљивости следећих исказа, уведимо следећу нотацију за подскупове скупа делилаца D, тј. $D_0 = \{d \in D \mid n/d \in 2\mathbb{N} + 1\}$ и $D_1 = \{d \in D \mid n/d \in 4\mathbb{N} + 2\}$.

Такође, за природни број k и скуп A позитивних целих бројева, под kA ћемо подразумевати скуп $\{ka \mid a \in A\}$.

Лема 3.3. *Нека је $\mathrm{G}_n(D)$ интегрални циркулантни граф такав да је $D = D_0 \cup D_1$. Следећа тврђења су еквивалентна:*

i) *свако* λ_j *је парно за непарно* $0 \leq j \leq n-1$.

ii) $D_0 = 2D_1$.

iii) *свако* $\lambda_j = 0$ *за непарно* $0 \leq j \leq n-1$.

Теорема 3.1. *Нека је* $\mathrm{G}_n(D)$ *интегрални циркулантни граф. Следећа тврђења су еквивалентна:*

i) *свако* λ_j *је парно за непарно* $0 \leq j \leq n-1$.

ii) $D_0 = 2D_1$.

iii) *свако* $\lambda_j = 0$ *за непарно* $0 \leq j \leq n-1$.

Сада можемо доказати први резултат који се тиче јако регуларног произвољног графа $\mathrm{G}_n(D)$. У наставку, са θ и τ означавамо две најмање сопствене вредности јако регуларног графа $\mathrm{G}_n(D)$. Надаље, према (1.2) и (1.3) можемо претпоставити да су $\theta \geq 0$ и $\tau < 0$.

Теорема 3.2. *Ако су* θ *и* τ *две парне сопствене вредности датог јако регуларног графа* $\mathrm{G}_n(D)$, *тада граф комплементаран графу* $\mathrm{G}_n(D)$, *означен са* $\overline{\mathrm{G}_n(D)}$, *није повезан.*

Доказ. Према Леми 1.1, део (д), може се закључити да ако је јако регуларан граф неповезан, онда је -1 сопствена вредност његовог спектра. Због тога, пошто су θ и τ парни онда је $\mathrm{G}_n(D)$ повезан и стога је λ_0 једина сопствена вредност спектра $\mathrm{G}_n(D)$ једнака r. Даље, како су $\theta, \tau \in 2\mathbb{N}$ видимо да су све сопствене вредности λ_j парне за непаран $0 \leq j \leq n-1$ и према Теореми 3.1 важи да је $\theta = 0$. Штавише, на основу (1.2) имамо да је $c = r$. Ако означимо са $n, \overline{r}, \overline{a}, \overline{c}$ параметре комплемента графа $\mathrm{G}_n(D)$, онда је

$$\overline{a} = n - 2 - 2r + c = n - r - 2 = \overline{r} - 1,$$

па користећи Лему 1.1 видимо да $\overline{\mathrm{G}_n(D)}$ није повезан, тј. $\mathrm{G}_n(D)$ је непримитиван.

□

Теорема 3.3. *Ако су* θ *и* τ *две непарне сопствене вредности датог јако регуларног графа* $\mathrm{G}_n(D)$, *онда граф није повезан.*

Доказ. Нека су λ_i, за $1 \leq i \leq n-1$, сопствене вредности графа $\mathrm{G}_n(D)$, које су све непарне. Сопствене вредности комплемента графа $\mathrm{G}_n(D)$ су $-1-\lambda_i$ (на пример, видети Лему 8.5.1 из [36]), тако да су оне парне, одакле по Теореми 3.2 закључујемо да је комплемент од $\overline{\mathrm{G}_n(D)}$ неповезан, тј. $\mathrm{G}_n(D)$ је неповезан.

□

У Теоремама 3.2 и 3.3 у сваком од поменутих случајева показано је да је сваки јако регуларни $\mathrm{G}_n(D)$ непримитиван.

У даљем тексту ћемо проучавати нова својства сопствених вредности графова $\mathrm{G}_n(D)$ и утврдити још нека њихова спектрална својства.

Теорема 3.4. *За дати граф $\mathrm{G}_n(D)$, прост број $p \mid n$ и сопствене вредности $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ графа $\mathrm{G}_n(D)$, важи да $p \mid \lambda_{p^{\beta+1}j} - \lambda_{p^\beta j}$, за $p \nmid j$ и $0 \leq p^{\beta+1}j, p^\beta j \leq n-1$.*

Доказ. На основу (1.9) и следеће релације

$$\mathrm{nzd}(p^{\beta+1}j, n/d) = \begin{cases} \mathrm{nzd}(p^\beta j, n/d), & S_p(n/d) \leq \beta \\ p \cdot \mathrm{nzd}(p^\beta j, n/d), & S_p(n/d) > \beta \end{cases} \tag{3.1}$$

имамо да је

$$t_{n/d, p^{\beta+1}j} = \frac{n}{d\mathrm{nzd}(n/d, p^{\beta+1}j)} = \begin{cases} t_{n/d, p^\beta j}, & S_p(n/d) \leq \beta \\ \frac{1}{p} \cdot t_{n/d, p^\beta j}, & S_p(n/d) > \beta \end{cases}. \tag{3.2}$$

Штавише, важи да је $c(p^\beta j, n/d) = \mu(t_{n/d,p^\beta j}) \frac{\varphi(n/d)}{\varphi(t_{n/d,p^\beta j})}$ и због тога

$$c(p^\beta j, n/d) = \begin{cases} c(p^{\beta+1}j, n/d), & S_p(n/d) \leq \beta \\ \mu(p \cdot t_{n/d,p^{\beta+1}j}) \frac{\varphi(n/d)}{\varphi(p \cdot t_{n/d,p^{\beta+1}j})}, & S_p(n/d) > \beta \end{cases}. \tag{3.3}$$

Докажимо да за сваки делилац $d \in D$ важи да $p \mid c(p^{\beta+1}j, n/d) - c(p^\beta j, n/d)$, одакле по формули (1.8) следи да $p \mid \lambda_{p^{\beta+1}j} - \lambda_{p^\beta j}$. У ту сврху разликујемо следеће случајеве.

Ако је $S_p(n/d) \leq \beta$, јасно је да је $c(p^\beta j, n/d) = c(p^{\beta+1}j, n/d)$.

Нека је $S_p(n/d) > \beta$. Ако $p \mid t_{n/d,p^{\beta+1}j}$, онда $p^2 \mid p \cdot t_{n/d,p^{\beta+1}j}$, а тиме је и $\mu(p \cdot t_{n/d,p^{\beta+1}j}) = 0$, тј. $c(p^\beta j, n/d) = 0$. Ако $p^2 \mid t_{n/d,p^{\beta+1}j}$ имамо $c(p^{\beta+1}j, n/d) = 0$, тако да је разлика $c(p^{\beta+1}j, n/d) - c(p^\beta j, n/d) = 0$ дељива са p. У случају $p \parallel t_{n/d,p^{\beta+1}j}$, из дефиниције $t_{n/d,p^{\beta+1}j}$ мора бити

$\beta + 1 = S_p(n/d) - 1$, одакле закључујемо да $p^2 \mid n/d$. Штавише, важи да $p \mid \varphi(n/d)/\varphi(t_{n/d,p^{\beta+1}j})$, што имплицира да $p \mid c(p^{\beta+1}j, n/d)$ и $p \mid c(p^{\beta+1}j, n/d) - c(p^{\beta}j, n/d)$.

Ако $p \nmid t_{n/d,p^{\beta+1}j}$, на основу (3.3) добијамо

$$c(p^{\beta}j, n/d) = -\mu(t_{n/d,p^{\beta+1}j})\frac{\varphi(n/d)}{(p-1)\varphi(t_{n/d,p^{\beta+1}j})} = -\frac{c(p^{\beta+1}j, n/d)}{p-1},$$

одакле коначно закључујемо да је $c(p^{\beta+1}j, n/d) - c(p^{\beta}j, n/d) = - p \cdot c(p^{\beta}j, n/d)$, што је и требало да се докаже.

□

На основу релације

$$\lambda_{p^{\alpha}j} - \lambda_{p^{\beta}j} = (\lambda_{p^{\alpha}j} - \lambda_{p^{\alpha-1}j}) + (\lambda_{p^{\alpha-1}j} - \lambda_{p^{\alpha-2}j}) + \cdots + (\lambda_{p^{\beta+1}j} - \lambda_{p^{\beta}j})$$

за $\alpha > \beta$, добијамо следећу релацију.

Последица 3.1. *За дати граф* $\mathrm{G}_n(D)$*, прост број* $p \mid n$ *и сопствене вредности* $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ *графа* $\mathrm{G}_n(D)$*, важи да* $p \mid \lambda_{p^{\alpha}j} - \lambda_{p^{\beta}j}$*, за* $p \nmid j$*,* $\alpha > \beta$ *и* $0 \leq p^{\alpha}j, p^{\beta}j \leq n-1$.

Теорема 3.5. *Нека* $p_i \mid n$ *прост број и нека су* $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ *сопствене вредности графа* $\mathrm{G}_n(D)$*. Тада важи* $p_i^{\alpha_i} \mid \lambda_0 - \lambda_{n/p_i}$.

Доказ. На основу Тврђења 1.2 закључујемо да је

$$\begin{aligned}
\lambda_0 - \lambda_{n/p_i} &= \sum_{\{d \in D \ \mid \ p_i \mid d\}} (\varphi(n/d) - \varphi(n/d)) + \sum_{\{d \in D \ \mid \ p_i \nmid d\}} \left(\varphi(n/d) + \frac{\varphi(n/d)}{p_i - 1}\right) \\
&= \sum_{\{d \in D \ \mid \ p_i \nmid d\}} \frac{p_i \ \varphi(n/d)}{p_i - 1}.
\end{aligned}$$

За $p_i \nmid d$, имамо $p_i^{\alpha_i} \mid n/d$, па зато можемо писати $\frac{n}{d} = p_i^{\alpha_i}\frac{n'}{d}$, где је $n = p_i^{\alpha_i}n'$ и $\frac{n'}{d} \in \mathbb{Z}$. Коначно, важи да је

$$\lambda_0 - \lambda_{n/p} = \sum_{\{d \in D \ \mid \ p_i \nmid d\}} \frac{p_i p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1) \ \varphi(\frac{n'}{d})}{p_i - 1} = p_i^{\alpha_i} \sum_{\{d \in D \ \mid \ p_i \nmid d\}} \varphi(\frac{n'}{d}).$$

□

Теорема 3.6. *Ако су θ и τ две сопствене вредности различитих парности јако регуларног графа $\mathrm{G}_n(D)$, онда је граф непримитиван.*

Доказ. Нека је $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ канонска факторизација реда n.

Случај 1. Претпоставимо да постоји $p_i \nmid \theta - \tau$ и без губљења општости претпоставимо да је $i = 1$.

Случај 1.1. n је непаран. Тада можемо писати $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$.

Без губљења општости можемо претпоставити да је $n/p_1 \notin D$. Ако $n/p_1 \in D$ доказ се може извести за комплемент графа $\mathrm{G}_n(D)$, тј. $\mathrm{G}_n(D_n \setminus D)$, који је јако регуларан и за који важи $n/p_1 \notin D_n \setminus D$.

Доказ ћемо извести индукцијом тако што ћемо показати да било који делилац d од n такав да $p_1^{\alpha_1} \nmid d$ не припада D.

Прво ћемо показати да било који делилац d_i са канонском факторизацијом $d_i = p_1^i p_2^{\alpha_2} \dots\dots p_k^{\alpha_k}$ не припада D, $0 \leq i \leq \alpha_1 - 1$. Ако $i = \alpha_1 - 1$, видимо да је $d_{\alpha_1 - 1} = n/p_1$ и зато $d_{\alpha_1-1} \notin D$, на основу претпоставке у претходном случају. За $0 \leq i \leq \alpha_1 - 1$, дефинишимо индекс $j_i = p_1^{\alpha_1 - i - 1} p_2^{\alpha_2} \dots\dots p_k^{\alpha_k}$. Користећи Лема 3.1, можемо приметити да је $c(j_i, n/d) \in 2\mathbb{Z}+1$ ако и само ако је $d = d_i$. Штавише, како $d_{\alpha_1-1} \notin D$ важи $c(j_{\alpha_1-1}, n/d) \in 2\mathbb{Z}$, за сваки $d \in D$, па добијамо да $\lambda_{j_{\alpha_1-1}} \in 2\mathbb{Z}$. Са друге стране, према Последици 3.1, имамо да је $p_1 \mid \lambda_{j_{\alpha_1-1}} - \lambda_{j_i}$, те користећи претпоставку у овом случају, такође имамо да је $p_1 \nmid \theta - \tau$. Одавде следи да $\lambda_{j_i} = \lambda_{j_{\alpha_1-1}} \in \{\theta, \tau\}$, за сваки $0 \leq i \leq \alpha_1 - 2$. Према томе, $\lambda_{j_i} \in 2\mathbb{Z}$ и на основу Леме 3.1 закључујемо да за сваки $d \in D$, $c(j_i, n/d)$ мора бити парно и зато $d_i \notin D$.

Претпоставимо сада да за произвољни делилац d од n такав да важи $p_1^{\alpha_1}, p_{i_2}^{\alpha_{i_2}}, \dots, p_{i_l}^{\alpha_{i_l}} \nmid d$, за неко $1 \leq l \leq s \leq k-1$ и $2 \leq i_2, \dots, i_l \leq k$, не припада D. Показаћемо да произвољни делилац d од n такав да важи $p_1^{\alpha_1}, p_{i_2}^{\alpha_{i_2}}, \dots, p_{i_{s+1}}^{\alpha_{i_{s+1}}} \nmid d$, $1 \leq i_2, \dots, i_{s+1} \leq k$, не припада D. Приметимо да смо у претходној дискусији доказали индукцијску хипотезу у случају када је $s = 1$.

Доказујемо да делилац $d_l = p_1^l p_2^{\alpha_2 - \gamma_2 - 1} \dots p_{s+1}^{\alpha_{s+1} - \gamma_{s+1} - 1} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k} \notin D$, за $0 \leq l \leq \alpha_1 - 1$ и $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i - 1$ (без губљења општости претпоставимо да је $i_j = j$ за $2 \leq j \leq s+1$). Дефинишемо индексе $j_l = p_1^{\alpha_1 - l - 1} p_2^{\gamma_2} \dots p_{s+1}^{\gamma_{s+1}} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k}$ за $0 \leq l \leq \alpha_1 - 1$ и $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i - 1$. Користећи Лему 3.1 закључујемо да је $c(j_l, n/d) \in 2\mathbb{Z}+1$ ако и само ако $d \in D^{\alpha_1, l}$, где $D^{\alpha_1, l} = \{p_1^{\beta_1} \dots p_{s+1}^{\beta_{s+1}} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k} \mid \beta_1 \in \{l, \alpha_1\}, \beta_i \in \{\alpha_i - \gamma_i - 1, \alpha_i\}, 2 \leq i \leq s+1\}$.

Са друге стране, дефинишемо индекс $j_{\alpha_1} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_{s+1}^{\gamma_{s+1}} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k}$. Слично, $c(j_{\alpha_1}, n/d) \in 2\mathbb{Z}+1$ ако и само ако $d \in D^{\alpha_1}$, где је $D^{\alpha_1} = \{p_1^{\alpha_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{s+1}^{\beta_{s+1}} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k} \mid \beta_i \in \{\alpha_i - \gamma_i - 1, \alpha_i\}, 2 \leq i \leq s+1\}$. Из дефиниције скупова $D^{\alpha_1,l}$ и D^{α_1}имамо следећу релацију

$$D^{\alpha_1,l} = D^{\alpha_1} \cup \{d_l\} \cup D^l,$$

где је $D^l = \{p_1^l p_2^{\beta_2} \dots p_{s+1}^{\beta_{s+1}} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k} \mid (\forall\ 2 \leq i \leq s+1)\ \beta_i \in \{\alpha_i - \gamma_i - 1, \alpha_i\}$ и $(\exists\ 2 \leq i \leq s+1)\ \beta_i = \alpha_i\}$.

На основу индукцијске хипотезе имамо $D^l \cap D = \emptyset$. Штавише, према Последици 3.1 добијамо да је $p_1 \mid \lambda_{j_{\alpha_1}} - \lambda_{j_l}$, па пошто $p_1 \nmid \theta - \tau$, важи да је $\lambda_{j_{\alpha_1}} = \lambda_{j_l}$ (тривијално видимо да су $\lambda_{j_{\alpha_1}}$ и λ_{j_l} исте парности).

Нека је $D' = D^{\alpha_1} \cap D$. Ако $d_l \in D$, сопствене вредности $\lambda_{j_{\alpha_1}}$ и λ_{j_l} се могу записати на следећи начин

$$\begin{aligned}
\lambda_{j_{\alpha_1}} &= \sum_{d \in D \setminus D'} c(j_{\alpha_1}, \frac{n}{d}) + \sum_{d \in D'} c(j_{\alpha_1}, \frac{n}{d}) \\
\lambda_{j_l} &= \sum_{d \in D \setminus (D' \cup \{d_l\})} c(j_l, \frac{n}{d}) + \sum_{d \in D'} c(j_l, \frac{n}{d}) + c(j_l, \frac{n}{d}_l).
\end{aligned}$$

Пошто $D^l \cap D = \emptyset$, имамо да су $c(j_{\alpha_1}, n/d)$ и $c(j_l, n/d)$ парни, за свако $d \in D \setminus (D' \cup \{d_l\})$ и $c(j_{\alpha_1}, n/d_l)$ је парно. Зато добијамо

$$\lambda_{j_{\alpha_1}} \equiv_2 \sum_{d \in D'} c(j_{\alpha_1}, \frac{n}{d}) \equiv_2 \lambda_{j_l} \equiv_2 \sum_{d \in D'} c(j_l, \frac{n}{d}) + c(j_l, \frac{n}{d_l}).$$

Штавише, како је $c(j_{\alpha_1}, n/d), c(j_l, n/d)$ непаран за $d \in D'$ одавде следи да је $c(j_l, n/d_l) \equiv_2 \sum_{d \in D'} c(j_{\alpha_1}, n/d) - c(j_l, n/d) \equiv_2 0$. Коначно, $c(j_l, n/d_l) \equiv_2 0$ проузрокује $d_l \notin D^{\alpha_1,l}$, што је контрадикција, па закључујемо да $d_l \notin D$.

Дакле, доказали смо да ако је $d \in D$, онда $p_1^{\alpha_1} \mid d$, одакле следи $\mathrm{nzd}(\{d \mid d \in D\}) = p_1^{\alpha_1}$, па је зато $\mathrm{G}_n(D)$ неповезан и тиме непримитиван.

Случај 1.2. n је паран.

Доказаћемо индукцијом да је $D_0 = 2(D_1 \setminus \{n/2\})$.

Најпре доказујемо да за било који делилац d_i са факторизацијом $d_i = 2^{\alpha_0 - 1} p_1^i p_2^{\alpha_2} \dots\dots p_k^{\alpha_k}$ важи да $d_i \in D \Leftrightarrow 2d_i \in D$, $0 \leq i \leq \alpha_1 - 1$. За $0 \leq i \leq \alpha_1 - 1$ дефинишемо индексе $j_i = p_1^{\alpha_1 - i - 1} p_2^{\alpha_2} \dots\dots p_k^{\alpha_k}$ и за $i = \alpha_1$ дефинишемо j_{α_1} као $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots\dots p_k^{\alpha_k}$. Користећи Лему 3.1, ако $0 \leq i \leq \alpha_1 - 1$ можемо приметити да је $c(j_i, n/d) \in 2\mathbb{Z}+1$ ако и само ако је $d \in D^i$, где је $D^i = \{d_i, 2d_i, n/2\}$ и $c(j_{\alpha_1}, n/d) \in 2\mathbb{Z}+1$ ако и само ако је $d = d_{\alpha_1} = n/2$. Стога закључујемо да је $\lambda_{j_{\alpha_1}} \in 2\mathbb{Z}+1 \Leftrightarrow n/2 \in D$ и $\lambda_{j_i} \in 2\mathbb{Z}+1 \Leftrightarrow D^i \subseteq D \veebar |D^i \cap D| = 1$. Са друге стране, према Последици 3.1, имамо да $p_1 \mid \lambda_{j_{\alpha_1}} - \lambda_{j_i}$, а на основу претпоставке у овом случају имамо да $p_1 \nmid \theta - \tau$, што имплицира да је $\lambda_{j_i} = \lambda_{j_{\alpha_1}} \in \{\theta, \tau\}$, за сваки $0 \leq i \leq \alpha_1 - 1$. Дакле, λ_{j_i} и $\lambda_{j_{\alpha_1}}$ имају исту парност, одакле добијамо да је $\lambda_{j_{\alpha_1}} \in 2\mathbb{Z}+1 \Leftrightarrow \lambda_{j_i} \in 2\mathbb{Z}+1 \Leftrightarrow n/2 \in D \Leftrightarrow D^i \subseteq D \veebar |D^i \cap D| = 1$. Коначно, последња еквиваленција је задовољена ако и само ако $d_i, 2d_i \in D$ или $d_i, 2d_i \notin D$, имплицирајући да је $d_i \in D \Leftrightarrow 2d_i \in D$. На исти начин можемо показати да за $d = 2^{\alpha_0 - 1} p_1^{\alpha_1} \dots p_{l-1}^{\alpha_{l-1}} p_l^i p_{1+1}^{\alpha_{l+1}} \dots p_k^{\alpha_k}$ важи $d \in D$ ако и само ако је $2d \in D$.

Претпостављамо сада да је за било који делилац d од n такав да је тачно $2^{\alpha_0 - 1} \parallel d$ и $p_{i_1}^{\alpha_{i_1}}, p_{i_2}^{\alpha_{i_2}}, \dots, p_{i_l}^{\alpha_{i_l}} \nmid d$, за неки $1 \leq l \leq s \leq k-1$ и $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq k$, припада D ако и само ако $2d \in D$. Доказаћемо да је произвољни делилац d броја n такав да $2^{\alpha_0 - 1} \parallel d$ и $p_1^{\alpha_{i_1}}, p_{i_2}^{\alpha_{i_2}}, \dots, p_{i_{s+1}}^{\alpha_{i_{s+1}}} \nmid d$, за $1 \leq s \leq k$ и $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{s+1} \leq k$, припада D ако и само ако $2d \in D$. Приметимо да смо у претходној дискусији доказали хипотезу за $s = 1$.

Доказујемо еквиваленцију

$$d_{\gamma_1} = 2^{\alpha_0 - 1} p_1^{\alpha_1 - \gamma_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - \gamma_2 - 1} \dots p_{s+1}^{\alpha_{s+1} - \gamma_{s+1} - 1} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k} \in D \Leftrightarrow 2d_{\gamma_1} \in D,$$

за $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i - 1$ (без губљења општости претпостављамо $i_j = j$ за $1 \leq j \leq s+1$). Дефинишимо индекс $j_{\gamma_1} = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_{s+1}^{\gamma_{s+1}} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k}$, за $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i - 1$, $1 \leq i \leq s+1$. Користећи Лему 3.1 закључујемо да је $c(j_{\gamma_1}, n/d) \in 2\mathbb{Z} + 1$ ако и само ако $d \in D^{\alpha_1, \gamma_1}$, где је $D^{\alpha_1, \gamma_1} = \{2^{\beta_0} p_1^{\beta_1} \dots p_{s+1}^{\beta_{s+1}} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k} \mid \beta_0 \in \{\alpha_0 - 1, \alpha_0\}, \beta_i \in \{\alpha_i - \gamma_i - 1, \alpha_i\}, 1 \leq i \leq s+1\}$.

Са друге стране, можемо дефинисати индекс j канонском факторизацијом $j_{\alpha_1} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_{s+1}^{\gamma_{s+1}} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k}$. Слично, $c(j_{\alpha_1}, n/d) \in 2\mathbb{Z} + 1$ ако и само ако $d \in D^{\alpha_1}$, где $D^{\alpha_1} = \{2^{\beta_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{s+1}^{\beta_{s+1}} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k} \mid \beta_0 \in \{\alpha_0 - 1, \alpha_0\}, \beta_i \in \{\alpha_i - \gamma_i - 1, \alpha_i\}, 2 \leq i \leq s+1\}$. Из дефиниција скупова D^{α_1, γ_1} и D^{α_1} имамо следећу релацију

$$D^{\alpha_1, \gamma_1} = D^{\alpha_1} \cup \{d_{\gamma_1}, 2d_{\gamma_1}\} \cup D^{\gamma_1},$$

где $D^{\gamma_1} = \{2^{\beta_0} p_1^{\alpha_1 - \gamma_1 - 1} p_2^{\beta_2} \dots p_{s+1}^{\beta_{s+1}} p_{s+2}^{\alpha_{s+2}} \dots p_k^{\alpha_k} \mid \beta_0 \in \{\alpha_0 - 1, \alpha_0\}, (\forall\ 2 \leq i \leq s+1)\ (\beta_i \in \{\alpha_i - \gamma_i - 1, \alpha_i\})$ и $(\exists\ 2 \leq i \leq s+1)\ (\beta_i = \alpha_i)\}$.

На основу индукцијске хипотезе за произвољни $d \in D^{\alpha_1} \cup D^{\gamma_1}$ имамо да $d \in D$ ако и само ако $2d \in D$. Нека је $D' = D^{\alpha_1} \cap D$ и $D'' = (D^{\alpha_1} \cup D^{\gamma_1}) \cap D$. Претпоставимо да $d_{\gamma_1} \in D$ и $2d_{\gamma_1} \notin D$, тада се сопствене вредности $\lambda_{j_{\alpha_1}}$ и $\lambda_{j_{\gamma_1}}$ могу записати на следећи начин

$$\begin{aligned}
\lambda_{j_{\alpha_1}} &= \sum_{d \in D \setminus D'} c(j_{\alpha_1}, \frac{n}{d}) + \sum_{d \in D'} c(j_{\alpha_1}, \frac{n}{d}) \\
\lambda_{j_{\gamma_1}} &= \sum_{d \in D \setminus (D'' \cup \{d_l\})} c(j_{\gamma_1}, \frac{n}{d}) + \sum_{d \in D''} c(j_{\gamma_1}, \frac{n}{d}) + c(j_{\gamma_1}, \frac{n}{d_{\gamma_1}}).
\end{aligned}$$

Пошто је $j_{\alpha_1}, j_{\gamma_1} \in 2\mathbb{N}+1$, на основу Леме 3.2, добијамо да је $\sum_{d\in D'} c(j_{\alpha_1}, n/d) = 0$ и $\sum_{d\in D''} c(j_{\gamma_1}, n/d) = 0$. Како је $c(j_{\alpha_1}, n/d) \in 2\mathbb{Z}$, за $d \in D \setminus D'$ важи да је $\lambda_{j_{\alpha_1}} \in 2\mathbb{Z}$ и како је $c(j_{\gamma_1}, n/d) \in 2\mathbb{Z}$, за $d \in D \setminus (D'' \cup \{d_l\})$ и $c(j_{\gamma_1}, n/d_{\gamma_1}) \in 2\mathbb{Z}+1$ важи да је $\lambda_{j_{\gamma_1}} \in 2\mathbb{Z}+1$. На основу Последице 3.1, имамо да $p_1 \mid \lambda_{j_{\alpha_1}} - \lambda_{j_{\gamma_1}}$, па користећи претпоставку у овом случају важи $p_1 \nmid \theta - \tau$, па добијамо да је $\lambda_{j_{\alpha_1}} = \lambda_{j_{\gamma_1}} \in \{\theta, \tau\}$, за свако $0 \le \gamma_1 \le \alpha_1 - 1$. Ово значи да је $\lambda_{j_{\alpha_1}} \equiv_2 \lambda_{j_l}$, што је евидентна контрадикција. Дакле, доказали смо да важи $d_l \in D \Rightarrow 2d_l \in D$ и на исти начин можемо доказати да је $2d_l \in D \Rightarrow d_l \in D$, па је зато $D_0 = 2(D_1 \setminus \{n/2\})$. Коначно, за $n/2 \notin D$ из Теореме 3.1 може се закључити да је $\theta = 0$. Због тога, даље добијамо да је $c = r$, тј. $\overline{a} = \overline{r} - 1$ одакле следи да $\overline{\mathrm{G}_n(D)}$ није повезан, на основу Леме 1.1. Ако $n/2 \in D$, на основу Тврђења 1.2 важи да је $c(j, 2) = -1$ за $j \in 2\mathbb{N}+1$, одакле даље следи да је $\lambda_j = -1$ за сваки непаран $0 \le j \le n-1$. Сада, можемо уочити да је једна сопствена вредност графа $\overline{\mathrm{G}_n(D)}$ једнака нули, па је зато $\mathrm{G}_n(D)$ повезан, из истог разлога као што је то било у случају $n/2 \notin D$.

Случај 2. Претпоставимо да $p_1 p_2 \ldots p_k \mid \theta - \tau$. Нека је $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ канонска факторизација броја n и $p_0 = 2$.

Релација (1.4) се може записати у следећој форми

$$\begin{aligned} -m_\theta(\theta - \tau) &= n\tau + (r - \tau) \\ m_\tau(\theta - \tau) &= n\theta + (r - \theta), \end{aligned}$$

одакле се може видети да $p_1 p_2 \ldots p_k \mid r - \tau$ и $p_1 p_2 \ldots p_k \mid r - \theta$. На основу Теореме 3.5 важи да је $p_i^{\alpha_i} \mid \lambda_0 - \lambda_{n/p_i}$, за $1 \le i \le k$. Штавише, пошто $\lambda_0 - \lambda_{n/p^i} \in \{r - \tau, r - \theta\}$, закључујемо да постоји $1 \le s \le k$ такав да $p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots p_{i_s}^{\alpha_{i_s}} p_{i_{s+1}} \ldots p_{i_k} \mid r - \tau$ и $p_{i_1} \ldots p_{i_s} p_{i_{s+1}}^{\alpha_{i_{s+1}}} \ldots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}} \mid r - \theta$, где је $(i_1, \ldots, i_k)$ пермутација од $(1, \ldots, k)$. Без губљења општости претпостављамо да је $i_j = j$ за све $1 \le j \le k$.

Користећи сада релацију (1.4) поново, добијамо да $p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s} p_{s+1} \ldots p_k \mid m_\theta(\theta - \tau)$ и $p_1 \ldots p_s p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \ldots p_k^{\alpha_k} \mid m_\tau(\theta - \tau)$. Према (1.5) коначно закључујемо да је

$$p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_k} p_1 \ldots p_k \mid nr\overline{r},$$

и зато $p_1 \ldots p_k \mid r\overline{r}$. У случају када $p_i \mid r$, јасно је да $p_i \mid \theta$ и $p_i \mid \tau$. Са друге стране, ако $p_i \mid \overline{r}$, онда $r \equiv_{p_i} -1$, $\theta \equiv_{p_i} -1$ и $\tau \equiv_{p_i} -1$. Уочимо да је λ_1 могуће представити на следећи начин (на основу Тврђења 1.2)

$$\lambda_1 = \sum_{d \in D} \mu(\frac{n}{d}).$$

Претпоставимо да је $|\lambda_1| \geq 1$ и нека је $m_1 = \prod_{\{1\leq i\leq k \ | \ p_i||\lambda_1|\}} p_i$. Такође дефинишимо $m_2 = \prod_{\{1\leq i\leq k \ | \ p_i||\lambda_1|+1\}} p_i$, ако је $\lambda_1 > 0$ и $m_2 = \prod_{\{1\leq i\leq k \ | \ p_i||\lambda_1|-1\}} p_i$, ако је $\lambda_1 < 0$. Одавде закључујемо да $m_1 \mid |\lambda_1|$ и $m_2 \mid |\lambda_1| + 1$, ако $\lambda_1 > 0$, и $m_2 \mid |\lambda_1| - 1$, ако $\lambda_1 < 0$. Пошто је један од бројева $|\lambda_1|$ или $|\lambda_1|\pm 1$ паран имамо да $2m_1 \mid |\lambda_1|$ или $2m_2 \mid |\lambda_1|\pm 1$. Коначно, у сваком од поменутих случаја важи да је $|\lambda_1| \geq \max\{2m_1, m_2 - 1\}$ или $|\lambda_1| \geq \max\{m_1, 2m_2 - 1\}$. Са друге стране је $|\mu(n/d)| = 1$ ако и само ако $p_i^{\alpha_i - 1} \mid d$ за свако $0 \leq i \leq k$, али ако узмемо у обзир знак функције $\mu(n/d)$, можемо закључити да $-2^k \leq \lambda_1 \leq 2^k$ одакле следи $|\lambda_1| \leq 2^k$. Из последња два закључка добијамо $\max\{2m_1, m_2 - 1\} \leq 2^k$ или $\max\{m_1, 2m_2 - 1\} \leq 2^k$. Ако је $\max\{2m_1, m_2 - 1\} \leq 2^k$ имамо $2m_1 \neq 2^k$ (осим у тривијалном случају $n = 2$ који се може одмах искључити), одакле даље добијамо да је $2m_1 \leq 2^k - 1$ и $m_2 \leq 2^k + 1$, па је зато и

$$2p_1 \dots p_k = 2m_1m_2 \leq (2^k - 1)(2^k + 1) = 4^k - 1.$$

Слично и у преосталом случају, ако $\max\{m_1, 2m_2 - 1\} \leq 2^k$ имамо $2m_2 - 1 \neq 2^k$, одакле даље следи да је $2m_2 \leq 2^k$ и $m_1 \leq 2^k$, па је зато

$$2p_1 \dots p_k = 2m_1m_2 \leq 2^k 2^k = 4^k.$$

Последња неједнакост не може бити задовољена, пошто је $2p_1 > 4$ и $p_i > 4$, за $2 \leq i \leq k$, што је контрадикција. Зато добијамо $\lambda_1 = 0$, одакле следи да је $c = r$ тј. $\overline{a} = \overline{r} - 1$. Коначно закључујемо да $\overline{\mathrm{G}_n(D)}$ није повезан на основу Леме 1.1.

□

Теорема 3.7. *Нека је* $\mathrm{G}_n(D)$ *произвољни повезан интегрални циркулантни граф. Тада је* $\mathrm{G}_n(D)$ *јако регуларан ако и само ако је* n *сложен и* $D = \{d \in D_n \mid m \nmid d\}$*, за произвољни делилац* $m \geq 2$ *.*

Доказ. Претпоставимо да је $\mathrm{G}_n(D)$ произвољан повезан јако регуларан граф. Из Теорема 3.2, 3.3 и 3.6 видимо да сваки такав јако регуларан $\mathrm{G}_n(D)$ мора бити непримитиван. Сада, користећи Лему 1.1, закључујемо да је $\overline{\mathrm{G}_n(D)}$ изоморфан са $mK_{\overline{r}+1}$ и стога је $\mathrm{G}_n(D)$ изоморфан потпуном мултипартитном графу $K_{\underbrace{\overline{r}+1,\dots,\overline{r}+1}_{m}}$, где је $\overline{r}$ регуларност $\overline{\mathrm{G}_n(D)}$ за неки делилац $m \geq 2$. Ова чињеница даје $n = (\overline{r}+1)m$ и стога закључујемо да n мора бити сложен број. Придружимо чворовима партиција графа $K_{\underbrace{\overline{r}+1,\dots,\overline{r}+1}_{m}}$ следећи скуп боја

$C_i = \{0 \le j \le n-1 \mid j \equiv_m i\}$, за $0 \le i \le m-1$. Дакле, добијамо да два чвора a и b нису суседна у $\mathrm{G}_n(D)$ ако и само ако је $a-b \equiv_m 0$. Последња еквиваленција је истинита ако и само ако $a-b \in \{G_n(d) \mid m \mid d\}$. Стога закључујемо да су a и b су суседни ако и само ако $a-b \in \{G_n(d) \mid m \nmid d\}$ и да је $K_{\underbrace{\overline{r}+1,\ldots,\overline{r}+1}_{m}} \cong \mathrm{G}_n(\{d \in D_n \mid m \nmid d\})$, што је и требало бити показано.

С друге стране, $\mathrm{G}_n(\{d \in D_n \mid m \nmid d\})$ је јако регуларан, јер је изоморфан потпуном мултипартитном графу $K_{\underbrace{\overline{r}+1,\ldots,\overline{r}+1}_{m}}$. Сада можемо израчунати параметре r, a и c интегралног циркулантног графа $\mathrm{G}_n(\{d \in D_n \mid m \nmid d\})$. Приметимо прво да из Лема 1.1 директно следи $\overline{c} = 0$ и $\overline{a} = \overline{r}-1 = n/m-2$. Сада важи да је $r = n-\overline{r}-1 = (m-1)\frac{n}{m}$, $a = n-2-2\overline{r}+\overline{c} = (m-2)\frac{n}{m}$ и $c = n-2\overline{r}+\overline{a} = (m-1)\frac{n}{m}$. Користећи Лему 1.1 и једнакости (1.4) , врло лако можемо израчунати сопствене вредности графа заједно с њиховим вишеструкостима. Већ смо закључили да је $\theta = 0$ и будући да је $\Delta = (a-c)^2 + 4(r-c) = \frac{n^2}{m^2}$ добијамо да је $\tau = -\frac{n}{m}$. Коначно, из једнакости (1.4) следи да је $m_\theta = n-m$ и $m_\tau = m-1$.

□

Слично можемо доказати да је неповезани $\mathrm{G}_n(D)$ јако регуларан ако и само ако је $\{d \in D_n \mid m \mid d\}$. Заиста, како је $\mathrm{G}_n(D)$ јако регуларан, онда је $\overline{\mathrm{G}_n(D)}$ повезан јако регуларан и стога је $D_n \setminus D = \{d \in D_n \mid m \nmid d\}$, на основу горње теореме. Ово праволинијски резултира да је $D = \{d \in D_n \mid m \mid d\}$.

У овом одељку окарактерисали смо јако регуларне интегрално циркулантне графове доказујући да ти графови морају бити непримитивни. Уопштено говорећи, докази представљени у овом раду темеље се на повезаности теорије бројева и спектралне теорије графова и садрже велики број различитих случајева. Покушај класификације класа интегралних циркулантних графова са четири различите сопствене вредности би био много захтевнији о чему ће бити знатно више речи у следећој секцији. Сматрамо да је истраживање на ову тему од великог значаја, јер нема много резултата у литератури који разматрају графове са четири различите сопствене вредности у поређењу са резултатима за графове са три различите сопствене вредности (било регуларне или нерегуларне). Одређени резултати за повезане регуларне графове са четири различите сопствене вредности су дати у [28], где су наведена нека својства, конструкције и примери. Још један могући и изазован смер у истраживањима би била класификација свих јако регуларних циркулантних графова, користећи само технике спектралне теорије графова. Неки прелиминарни резултати показују да би коришћење одређених техника теорије бројева, као што су квадратни остаци, могли бити обећавајући смер у истраживању јаке регуларности циркулантних графова. Наиме, може се доказати следеће: било које две сопствене вредности λ_i и λ_j су једнаке, за $0 \leq i, j \leq n-1$, ако и само ако су i и j или оба квадратни остаци или нису квадратни остаци по модулу n, за било који циркулантни граф простог реда n.

3.1.2 Конструкција јако регуларних графова коришћењем линијског оператора

У овом одељку ћемо извести класе нециркулантних јако регуларних графова карактеризацијом итеретавних линијских графова почев од унитарног Кејлијевог графа X_n. У наставку ћемо користећи операцију Кронекерског производа конструисати класе јако регуларних циркулантних графова који садрже унитарне Келијеве графове. Слично претходном, можемо окарактерисати све итеративне линијске графове почевши од X_n са четири различите сопствене вредности који у највећем броју случајева припадају класи нециркулантних графова. Такође, операцијом Кронекерског производа изводимо класе графова са четири различите сопствене вредности. На крају одељка дајемо одговор на питање који итеративни линијски графови графа X_n представљају граф инциденције симетричног блок-дизајна.

Најпре ћемо помоћу оператора L пронаћи још неке класе јако регуларних графова. Познато је да су две класе јако регуларних графова добијене применом линијског оператора L на комплетне графове K_n и комплетне бипартитне графове $K_{n,n}$. Граф $L(K_n)$ има параметре $(n(n-1)/2, 2n-4, n-2, 4)$ (троугаони графови), док $L(K_{n,n})$ има параметре $(n^2, 2n-2, n-2, 2)$ (квадратне решетке). Споменимо да су обе ове класе циркуланти. Како би пронашли што више класа јако регуларних графова, у следећем делу одељка ћемо окарактерисати све линијске графове унитарних Кејлијевих графова који су јако регуларни.

Линијски граф регуларног графа је регуларни граф и у том случају користимо следећу теорему.

Теорема 3.8. *[61] Нека је G $k-$регуларни повезани граф реда n и нека су $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ његове сопствене вредности. Спектар графа $L(G)$ састоји се од -2 са вишеструкошћу $\frac{kn}{2} - n$ и $k + \lambda_i - 2$ за сваки $1 \leq i \leq n$.*

Теорема 3.9. *Нека је X_n унитарни Кејлијев граф реда n. Тада је линијски граф од X_n јако регуларан ако и само ако је n прост број већи од 3 или n је степен од 2 већи од 2.*

Доказ. Нека је $k = \varphi(n)$ регуларност графа X_n.

Ако је $kn/2 - n = 0$ тада је број различитих сопствених вредности од $L(X_n)$ једнак броју различитих сопствених вредности од X_n. У овом случају имамо да је $k = \varphi(n) = 2$, а тиме и $n \in \{3, 4, 6\}$. Како $X_n \simeq C_n \simeq L(X_n)$ за $n \in \{3, 4, 6\}$, према Теореми 3.7, имамо да је $L(X_4)$ једини јако регуларни граф.

Ако је $kn/2 - n > 0$, тада једна сопствена вредност $L(X_n)$ мора бити -2. Сада, претпоставимо да је $L(X_n)$ јако регуларан. Како $L(X_n)$ има три различите сопствене вредности онда или X_n има три различите сопствене вредности такве да је једна од њих једнака $-k$ ($k+\lambda_i-2 = -2$) или X_n има две различите сопствене вредности и ниједна од њих није једнака $-k$.

Користећи Теорему 3.7, X_n има три различите сопствене вредности ако и само ако је $n = p^\alpha$, за неки прост број p и $\alpha \geq 2$, а сопствене вредности од X_n су $\{p^{\alpha-1}(p-1), 0, -p^{\alpha-1}\}$. Штавише, било која сопствена вредност матрице суседства графа $L(X_n)$ узима једну од вредности $\{2p^{\alpha-1}(p-1)-2, p^{\alpha-1}(p-1)-2, p^{\alpha-1}(p-2)-2, -2\}$. Зато, како је $p^{\alpha-1}(p-2)-2$ друга најмања сопствена вредност, у овом случају закључујемо да је $L(X_n)$ јако регуларно ако и само ако је $n = p^\alpha$ и $p^{\alpha-1}(p-2)-2 = -2$, то јест за $n = 2^\alpha$.

Ако X_n има тачно две сопствене вредности, то је граф комплетан, па је лако уочити да ако је $n = p$, за неки прости p, онда су сопствене вредности од X_n једнаке $\{p-1, -1\}$. Јасно је да ниједна од њих није једнака $-k = -\varphi(p) = -p+1$ за $p > 2$ и стога закључујемо да је $L(X_p)$ јако регуларан за $p > 3$, па су сопствене вредности од $L(X_p)$ једнаке $\{2(p-1)-2, p-4, -2\}$.

□

За $k \geq 1$, k-ти итеративни линијски граф од G је $L^k(G) = L(L^{k-1}(G))$, где је $L^0(G) = G$ и $L^1(G) = L(G)$. У следећој теореми доказујемо да се класа јако регуларних графова изведена из унитарних Кејлијевих графова не може више проширити ако се користи операција линијског графа.

Теорема 3.10. *Нека је X_n унитарни Кејлијев граф реда n. Тада је $L^2(X_n)$ јако регуларан ако и само ако је $n = 4$.*

Доказ. Према Теореми 3.8, лако се може приметити да је број различитих сопствених вредности матрице суседства графа G мањи или једнак од броја различитих сопствених вредности матрице суседства графа $L(G)$. Сада, претпоставимо да је $L^2(X_n)$ повезан јако регуларни граф, тј. да $L^2(X_n)$ има три различите сопствене вредности. То значи да $L(X_n)$ може имати тачно три различите сопствене вредности, будући да $L(X_n)$ не може бити комплетан. Заиста, будући да је ред графа $L(X_n)$ једнак $\frac{n\varphi(n)}{2}$, регуларност једнака $2(\varphi(n)-1)$, а релација $\frac{n\varphi(n)}{2}-1=2(\varphi(n)-1)$ никада није задовољена, имамо да $L(X_n)$ није потпун граф. Надаље, према Теореми 3.9, разликујемо два случаја зависно од различитих вредности од n.

Претпоставимо да је $n=p$, за неки прост број $p>3$. Према Теореми 3.9, различите сопствене вредности од $L(X_p)$ су $\{2(p-1)-2,-2,p-4\}$. Штавише, из Теореме 3.8, добијамо да је регуларност $L^2(X_p)$ једнака $2(2(p-1)-2)-2$ и за произвољну сопствену вредност λ_i графа $L^2(X_p)$ важи да $\lambda_i \in \{4p-10,-2,2(p-1)-6,3p-10\}$. Било које две вредности из овог скупа су међусобно различите, будући да је $p>3$, из чега закључујемо да $L^2(X_p)$ није јако регуларан.

Сада, претпоставимо да је $n=2^\alpha$, за $\alpha \geq 2$. Према Теоремама 3.8 и 3.7 различите сопствене вредности од $L(X_n)$ су $\{2^\alpha-2, 2^{\alpha-1}-2,-2\}$ и зато су могуће вредности за сопствене вредности матрице суседства графа $L^2(X_n)$ дате са $\{2^{\alpha+1}-6, 3(2^{\alpha-1}-2), 2^\alpha-6,-2\}$. Коначно, закључујемо да $L^2(X_n)$ има три различите сопствене вредности ако је $2^\alpha-6=-2$, пошто је $\alpha=2$, јер $2^{\alpha+1}-6>3(2^{\alpha-1}-2)>2^\alpha-6\geq -2$.

□

Како је $X_4 \simeq C_4$, даљом применом линијског оператора не можемо проширити већ пронађене класе јако регуларних графова.

Теорема 3.11. *[20] Нека је G повезани граф такав да је $L(G)$ циркулантан. Тада G мора бити C_n, K_4 или $K_{a,b}$ за неке a и b такве да је* $\mathrm{nzd}(a,b)=1$.

У наставку доказујемо да класе $L(X_p)$, за прост број $p>3$, и $L(X_{2^\alpha})$ за $\alpha \geq 2$, представљају нове класе јако регуларних графова, које нису садржане у класи унитарних Кејлијевих графова. Према Теореми 3.9, заправо доказујемо да је $L(X_p)$ за прост број $p>3$, и $L(X_{2^\alpha})$ за $\alpha \geq 2$, нису циркулантни графови (са изузетком $X_4 \simeq C_4$).

Претпоставимо прво да је $L(X_p)$, за прост $p>3$, циркулантан. Како је X_p изоморфан комплетном графу K_p за прост $p>3$, тада X_p за прост $p>3$ не припада ниједној од следећих класа графова C_n, K_4 или $K_{a,b}$, за неке a и b такве да је $\mathrm{nzd}(a,b)=1$.

Сада, претпоставимо да је $L(X_{2^\alpha})$, за $\alpha \geq 2$, циркулантан. Лако је видети да је X_{2^α} комплентни бипартитни граф са партицијама $C_i = \{0 \leq j \leq 2^\alpha - 1 \mid j \equiv_2 i\}$, за $i \in \{0,1\}$. Стога, $X_{2^\alpha} \simeq K_{2^{\alpha-1},2^{\alpha-1}}$ и будући да је $\alpha \geq 2$ имамо $\mathrm{nzd}(2^{\alpha-1}, 2^{\alpha-1}) \neq 1$. Исто тако, број грана графа X_{2^α} једнак је $2^\alpha \cdot 2^{\alpha-1}/2$ и различит је од броја грана графа C_{2^α} који је 2^α (за $\alpha > 2$), одакле према Теореми 3.11 можемо закључити да јако регуларни линијски унитарни Кејлијеви графови нису циркулантни.

3.1.3 Матрице графова са четири сопствене вредности

Теорема 3.12. *Унитарни Кејлијев граф X_n има четири различите сопствене вредности ако и само ако је n производ два различиита проста броја.*

Доказ. Претпоставимо да X_n има тачно четири различите сопствене вредности и да постоји прост број p_i у канонској факторизацији броја $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, тако да је $\alpha_i \geq 2$. Ако је $k = 1$, према Теореми 3.7 X_n је јако регуларан, што је контрадикција, па претпостављамо да је $k \geq 2$.

Нека је $S = \{p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} < n \mid \beta_i \in \{\alpha_i - 1, \alpha_i\}\}$ и $m = p_1 p_2 \cdots p_k$. Како је $k \geq 2$, добијамо $|S| \geq 3$. За $j \in S$, где $j = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$ закључујемо да $t_{n,j} = \frac{n}{\mathrm{nzd}(n,j)} = p_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}$, $\varphi(t_{n,j}) = \prod_{\beta_i=\alpha_i-1}(p_i - 1)$ и

$$\begin{aligned}\lambda_j &= c(j,n) = \\ &= \mu(t_{n,j}) \prod_{\beta_i=\alpha_i-1} p_i^{\alpha_i-1} \prod_{\beta_i=\alpha_i} p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1) = \mu(t_{n,j}) \frac{n}{m} \prod_{\beta_i=\alpha_i} (p_i - 1) \neq 0.\end{aligned}$$

На основу дефиниције индекса $j \in S$, постоји $k-$торка $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ тако да је $j = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, па ћемо писати кад год то буде потребно $j = j(\beta_1, \ldots, \beta_k)$, за дато n. Такође, са j_i, $1 \leq i \leq k$, означићемо индекс $j \in S$ тако да је $j_i = j(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_k)$. Лако је видети да за $1 \leq i_1 < i_2 \leq k$ важи да је $j_{i_1} > j_{i_2}$ и $|\lambda_{j_{i_1}}| > |\lambda_{j_{i_2}}|$. Зато, ако је $k \geq 3$, међу сопственим вредностима $\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_k}$ имамо најмање три различите вредности и заједно са регуларношћу λ_0 и $\lambda_1 = \mu(n) = 0$, закључујемо да X_n има најмање пет сопствених вредности, што је контрадикција. Ако је $k = 2$ онда је очито да је $|S| = 3$. Ове сопствене вредности су $\frac{n}{m}, -\frac{n}{m}(p_1 - 1), -\frac{n}{m}(p_2 - 1)$, па су оне међусобно и различите. Слично, заједно са регуларношћу λ_0 и $\lambda_1 = \mu(n) = 0$, закључујемо да X_n има најмање пет сопствених вредности, што је контрадикција.

Сада, претпоставимо да је n производ различитих простих бројева. Ако је n прост, онда X_n има тачно две различите сопствене вредности, што је контрадикција. Дакле, претпоставимо да n има следећу канонску факторизацију $n = p_1 \dots p_k$, за $k \geq 2$. Тада добијамо да је $t_{n,p_i} = n/\mathrm{nzd}(n, p_i) = n/p_i$ и $\lambda_{p_i} = (-1)^{k-1}(p_i - 1)$, за $1 \leq i \leq k$. Даље, за $1 \leq i, j \leq k$ и $i \neq j$, јасно је да је $\lambda_{p_i} \neq \lambda_{p_j}$. Ако је $k \geq 3$, имамо најмање три различите вредности међу сопственим вредностима $\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots, \lambda_{p_k}$ и заједно са регуларношћу λ_0 и $\lambda_1 = \mu(n) = (-1)^k$, закључујемо да X_n има најмање пет сопствених вредности, што је контрадикција.

За $k = 2$, $n = p_1p_2$ и $\mathrm{nzd}(j, n) = 1$, видимо да је $t_{n,j} = p_1p_2$ и $\lambda_j = 1$. Ако је $\mathrm{nzd}(j, n) = p_1$ онда $t_{n,j} = p_2$ и $\lambda_j = -(p_1 - 1)$. Слично, ако $\mathrm{nzd}(j, n) = p_2$ онда $\lambda_j = -(p_2 - 1)$. Дакле, закључујемо да заједно са регуларношћу λ_0, X_n има тачно четири различите сопствене вредности.

□

3.1.4 Конструкција регуларних графова са четири различите сопствене вредности коришћењем линијског оператора

Теорема 3.13. *Нека је X_n унитарни Кејлијев граф реда n. Тада линијски граф од X_n има тачно четири сопствене вредности ако и само ако или $n = 2p$ или $n = p^\alpha$, за неки прост број $p \geq 3$ и $\alpha \geq 2$.*

Доказ. Претпоставимо да $L(X_n)$ има тачно четири различите сопствене вредности. Према Теореми 3.8, важи да X_n има или три или четири различите сопствене вредности. Претпоставимо сада да X_n има четири различите сопствене вредности. Према Теореми 3.12, n је једнако p_1p_2 за неке просте бројеве p_1 и p_2. Коришћењем Теореме 3.8 и 3.12, за сопствене вредности λ_i графа $L(X_n)$, видимо да $\lambda_i \in \{2(p_1 - 1)(p_2 - 1) - 2, (p_1 - 1)(p_2 - 2) - 2, (p_1 - 2)(p_2 - 1) - 2, (p_1 - 1)(p_2 - 1) - 1, -2\}$. Како је $p_1 < p_2$, X_n може имати четири различите сопствене вредности само ако $(p_1 - 2)(p_2 - 1) - 2 = -2$ и $p_1 = 2$.

Ако је X_n јако регуларан, онда је $n = p^\alpha$, за неки прост број p, $\alpha \geq 2$, и било која сопствена вредност $L(X_n)$ припада скупу $\{2p^{\alpha-1}(p - 1) - 2, p^{\alpha-1}(p - 1) - 2, p^{\alpha-1}(p - 2) - 2, -2\}$, на основу Теореме 3.9. Стога, $L(X_n)$ има тачно четири различите сопствене вредности само ако је $p^{\alpha-1}(p - 2) - 2 \neq -2$, тј. $p \neq 2$.

□

Као и у претходном одељку, доказаћемо да нове класе графова са четири сопствене вредности дате у Теореми 3.13 нису циркулантни графови. Тачније, доказујемо да $L(X_{2p})$ и $L(X_{p^\alpha})$ нису циркуланти, за $p \geq 3$ и $\alpha \geq 2$, осим $L(X_6)$.

Прво ћемо показати да $L(X_{2p})$, $p \geq 3$, није циркулантан. Према Теореми 3.11, довољно је доказати да X_{2p}, $p \geq 3$, није ни циклус C_{2p} (с изузетком C_6), нити комплетни бипартитни граф $K_{a,b}$ тако да је $\mathrm{nzd}(a,b) = 1$. Ако $X_{2p} \simeq C_{2p}$ за неко $p \geq 3$, онда ови графови имају једнак број грана, па важи следећа једнакост $2p \cdot \varphi(2p)/2 = 2p$, која је задовољена само за $p = 3$. У другом случају за $X_{2p} \simeq K_{a,b}$, из једнакости броја грана имамо да је $p(p-1) = ab$, одакле без губитка општости закључујемо да је $p \mid a$. Али из једнакости редова графова следи да је $a + b = 2p$, а последња једнакост важи само за $a = b = p$. Ово је контрадикција са чињеницом да a и b морају бити релативно прости бројеви.

Сада, претпоставимо да је $L(X_{p^\alpha})$, $p \geq 3$ и $\alpha \geq 2$, циркулантни. Ако је $X_{p^\alpha} \simeq C_{p^\alpha}$ за неки $p \geq 3$ и $\alpha \geq 2$, онда ови графови имају једнак број грана, па важи једнакост $p^\alpha \cdot \varphi(p^\alpha)/2 = p^\alpha$, која никад није задовољена, јер је лева страна увек већа од десне стране, за $p \geq 3$ и $\alpha \geq 2$. У другом случају за $X_{p^\alpha} \simeq K_{a,b}$, из једнакости броја грана добијамо да је $p^{2\alpha-1}(p-1)/2 = ab$, одакле без губитка општости закључујемо да је $p^{2\alpha-1} \mid a$, будући да је $\mathrm{nzd}(a,b) = 1$. Из једнакости редова графова следи да је $a + b = p^\alpha$, што је контрадикција пошто је лева страна већа од $p^{2\alpha-1}$.

Следећом теоремом налазимо нове класе регуларних графова са четири различите сопствене вредности.

Теорема 3.14. *Нека је X_n унитарни Кејлијев граф реда n. Тада $L^2(X_n)$ има тачно четири сопствене вредности ако и само ако је n прост број већи од 3 или степен двојке већи од 4 или једнак 6.*

Доказ. Претпоставимо да $L^2(X_n)$ има тачно четири различите сопствене вредности. То значи $L(X_n)$ има три или четири различите сопствене вредности.

Ако је $L(X_n)$ јако регуларан, на основу доказа Теореме 3.10 закључујемо да су сопствене вредности $L^2(X_n)$ $\{4p-10, 3p-10, 2p-8, -2\}$ ако је n прост број већи од 3 и $\{2^{\alpha+1}-6, 3 \cdot 2^{\alpha-1}-6, 2^\alpha-6, -2\}$ ако је n степен двојке већи од 2. Према томе, $L^2(X_n)$ има четири сопствене вредности ако је n или прост број већи од 3 или степен двојке већи од 4.

Ако $L(X_n)$ има четири различите сопствене вредности, разликујемо два случаја зависно од вредности броја n. За $n = 2p$, где је $p \geq 3$ прост број, различите сопствене вредности од $L(X_n)$ су $\{2p-4, p-4, p-2, -2\}$, према Теореми 3.13. Дакле, свака сопствена вредност λ_i од $L^2(X_n)$

задовољава $\lambda_i \in \{2(2p-4)-2, 3p-10, 3p-8, 2p-8, -2\}$, одакле закључујемо да $L^2(X_n)$ има четири различите вредности само ако је $p = 3$ и то је за $n = 6$.

Ако је $n = p^\alpha$, за неки прост број $p \geq 3$ и $\alpha \geq 2$, тада су сопствене вредности матрице суседства графа $L(X_n)$ једнаке $\{2p^{\alpha-1}(p-1)-2, p^{\alpha-1}(p-1)-2, p^{\alpha-1}(p-2)-2, -2\}$.

На основу свега наведеног, свака сопствена вредност λ_i од $L^2(X_n)$ задовољава $\lambda_i \in \{4p^{\alpha-1}(p-1)-6, 3p^{\alpha-1}(p-1)-6, p^{\alpha-1}(3p-4)-6, 2p^{\alpha-1}(p-1)-6, -2\}$. Било које две вредности из овог скупа су међусобно различите, будући да је $p > 3$, одакле закључујемо да $L^2(X_n)$ нема четири различите вредности.

□

Теорема 3.15. *Нека је X_n унитаран Кејлијев граф реда n. Тада $L^3(X_n)$ има тачно четири сопствене вредности ако и само ако је $n = 6$.*

Доказ. Претпоставимо да $L^3(X_n)$ има четири различите сопствене вредности. Ако је $L^2(X_n)$ јако регуларан, користећи Теорему 3.10 имамо да је $X_4 \simeq C_4$ и $L^k(X_4) \simeq C_4$ (за $k \geq 1$) који је јако регуларан. Ако $L^2(X_n)$ има четири различите сопствене вредности онда је или n прост број већи од 3 или је n степен од 2 већи од 4 или $n = 6$.

За прост број $p > 3$, према доказу Теореме 3.14, свака сопствена вредност λ_i од $L^3(X_n)$ задовољава $\lambda_i \in \{8p-22, 7p-22, 6p-20, 4p-14, -2\}$. Било које две вредности из овог скупа су међусобно различите, пошто је $p > 3$, одакле закључујемо да $L^3(X_p)$ нема четири различите вредности.

За $n = 2^\alpha$ и $\alpha \geq 3$, на основу доказа Теореме 3.14, свака сопствена вредност λ_i од $L^3(X_n)$ задовољава $\lambda_i \in \{2^{\alpha+2}-14, 7 \cdot 2^{\alpha-1}-14, 3 \cdot 2^\alpha - 14, 2^{\alpha+1}-10, -2\}$. Било које две вредности из овог скупа су међусобно различите, пошто $\alpha \geq 3$, одакле закључујемо да $L^3(X_n)$ нема четири различите вредности.

За $n = 6$, на осову доказа Теореме 3.14 и Теореме 3.8 видимо да оба спектра графа $L^2(X_6)$ и $L^3(X_6)$ су једнаки $\{2, -1, 1, -2\}$.

□

Лако се може уочити да је пресек класа које су нађене у Теоремама 3.13 и 3.14 једнак графу $X_6 \simeq C_6$. Наиме, по Теореми 3.13 пронађене су две класе: $L(X_{2p})$, за прост број $p \geq 3$, са скупом сопствених вредности $\{2p-4, p-4, p-2, -2\}$ и $L(X_{p^\alpha})$, за прост број $p \geq 3$ и $\alpha \geq 2$, са скупом сопствених вредности $\{2p^{\alpha-1}(p-1)-2, p^{\alpha-1}(p-1)-2, p^{\alpha-1}(p-2)-2, -2\}$. Са друге стране, на основу Теореме 3.14 такође су пронађене две класе: $L^2(X_p)$, за просте бројеве $p > 3$, са скупом сопствених вредности $\{4p-10, 3p-10, 2p-8, -2\}$ и $L^2(X_{2^\alpha})$, за $\alpha \geq 3$, са скупом сопствених вредности $\{2^{\alpha+1}-6, 3\cdot 2^{\alpha-1}-6, 2^\alpha-6, -2\}$. Ако постоје графови G_1 и G_2 који припадају класама добијеним помоћу Теорема 3.13 и 3.14, респективно, тако да је $G_1 \simeq G_2$, тада они морају бити коспектрални. На основу парности сопствених вредности графова G_1 и G_2 које могу имати, закључујемо да постоје прости бројеви $p \geq 3$, $q > 3$ и цео број $\alpha \geq 2$ такви да је $G_1 \simeq L(X_{p^\alpha})$ и $G_2 \simeq L^2(X_q)$. У овом случају, регуларност и једине непарне сопствене вредности графова G_1 и G_2 морају бити једнаке, тако да важе једнакости $2p^{\alpha-1}(p-1)-2 = 4q-10$ и $p^{\alpha-1}(p-2)-2 = 3q-10$. Одузимањем друге једнакости од прве, добијамо да је $p^\alpha = q$, што никада није задовољено, тако да добијамо контрадикцију.

Као и у претходним случајевима, можемо показати да класе графова $L^2(X_p)$ и $L^2(X_{2^\alpha})$ (за прост број $p > 3$ и природан број $\alpha \geq 3$) добијене у Теореми 3.14 нису циркулантни. Према Теореми 3.11, лако се може видети да класе $L(X_p)$ и $L(X_{2^\alpha})$ не могу бити ни циклуси ни потпуни бипартитни графови. Заиста, сопствене вредности $L(X_p)$ и $L(X_{2^\alpha})$ су $\{2p-4, p-4, -2\}$ и $\{2^\alpha-2, 2^{\alpha-1}-2, -2\}$, респективно, и сви су цели бројеви различити од 0. Са друге стране, комплетан бипартитни граф реда $p(p-1)/2$ има 0 као сопствену вредност, а циклус $C_{p(p-1)/2}$ има ирационалну сопствену вредност $2\cos(4\pi/p(p-1))$, за $p > 3$.

3.1.5 Конструкција регуларних графова са четири различите сопствене вредности коришћењем Кронекерског производа

Пратећи идеју из претходног пододељка можемо конструисати регуларне графове са четири различите сопствене вредности користећи Кронекерски производ. Наиме, за дате сложене бројеве n и m, и произвољни делилац такав да $d \mid n$, $d \mid m$ и $d > 1$, можемо искористити спектар графа $K_d \otimes K^*_{n/d}$, $Sp(K_d \otimes K^*_{\frac{n}{d}}) = \{(d-1)\frac{n}{d}^{1}, 0^{(n-d)}, -\frac{n}{d}^{(d-1)}\}$ и извршити операцију Кронекерског производа на следећи начин

$$Sp((K_d \otimes K^*_{\frac{n}{d}}) \otimes (K_d \otimes K^*_{\frac{m}{d}})) =$$
$$\{(d-1)^2\frac{mn}{d^2}^{(1)}, 0^{(nm-d^2)}, -(d-1)\frac{mn}{d^2}^{(2(d-1))}, \frac{mn}{d^2}^{((d-1)^2)}\}.$$

Овом конструкцијом добијамо ширу класу регуларних графова са четири различите сопствене вредности са сложеним редом nm и $d > 2$. Ови графови нису нужно циркулантни и ова чињеница се може потврдити из бројних примера.

Са друге стране, ако $n \neq d^2$, онда класа графова $K_d \otimes K_{\frac{n}{d}}$ са спектром $\{(d-1)(\frac{n}{d}-1)^{(1)}, -(d-1)^{(\frac{n}{d}-1)}, -(\frac{n}{d}-1)^{(d-1)}, 1^{((d-1)(\frac{n}{d}-1))}\}$ садржи циркуланте који нису унитарни Кејлијеви графови. Тачније, за $d \mid n$ такво да је $\mathrm{nzd}(d, n/d) = 1$, важи да су $K_d \otimes K_{\frac{n}{d}}$ циркулантни. Пошто $K_d \simeq \mathrm{G}_d(\{d' \mid d \mid 1 \leq d' \leq d-1\})$, то је довољно доказати $\mathrm{G}_n(D_1) \otimes \mathrm{G}_m(D_2) \simeq X_{nm}(\{d_1 d_2 | \ d_1 \in D_1,\ d_2 \in D_2\})$ за $\mathrm{nzd}(n,m) = 1$ и закључити да је $K_d \otimes K_{\frac{n}{d}}$ циркулантан. Наиме, за $0 \leq k \leq nm-1$ постоје јединствени $0 \leq a \leq n-1$ и $0 \leq b \leq m-1$ такви да $x \equiv am + bn \pmod{mn}$, те можемо успоставити бијекцију између $\mathrm{G}_n(D_1) \otimes \mathrm{G}_m(D_2)$ и $\mathrm{G}_{nm}(\{d_1 d_2 \mid d_1 \in D_1,\ d_2 \in D_2\})$ тако да је $f(a,b) = x$. Штавише, за суседне чворове (a_1, b_1) и (a_2, b_2) из $\mathrm{G}_n(D_1) \otimes \mathrm{G}_m(D_2)$, имамо да је $\mathrm{nzd}(a_1 - a_2, n) = d_1 \in D_1$ и $\mathrm{nzd}(b_1 - b_2, m) = d_2 \in D_2$. Доказаћемо да су $f(a_1, b_1)$ и $f(a_2, b_2)$ суседни у $\mathrm{G}_{nm}(\{d_1 d_2 \mid d_1 \in D_1,\ d_2 \in D_2\})$, тј. показујемо да је $\mathrm{nzd}((a_1 - a_2)m + (b_1 - b_2)n, nm) = d_1 d_2$. Заиста, нека је $d = \mathrm{nzd}((a_1 - a_2)m + (b_1 - b_2)n, nm)$ и без губитка општости можемо претпоставити да $d \mid m$, јер $\mathrm{nzd}(m,n) = 1$. Према томе, важи да је $d \nmid n$ и $d \mid b_1 - b_2$. Како је $\mathrm{nzd}(b_1 - b_2, m) = d_2$, видимо да је $d \mid d_2$. Са друге стране, пошто је $\mathrm{nzd}(b_1 - b_2, m) = d_2$ добијамо да је $d_2 \mid (a_1 - a_2)m + (b_1 - b_2)n$ и слично пошто је $\mathrm{nzd}(a_1 - a_2, n) = d_1$ добијамо да је $d_1 \mid (a_1 - a_2)m + (b_1 - b_2)n$. Коначно, како је $\mathrm{nzd}(d_1, d_2) = 1$, важи да је $d_1 d_2 \mid d$ и стога $d_1 d_2 = d$. Обрнути смер се може добити на сличан начин, тако да се може закључити да је f изоморфизам између графова.

Коначно дајемо карактеризацију регуларних графова са четири различите сопствене вредности међу унитарним Келијевим графовима, који су инцидентни графови неких симетричних блок-дизајна [26].

Теорема 3.16. *Унитарни Келијев граф X_n је граф инциденције симетричног блок-дизајна ако и само ако је $n = 2p$, за неки прост број $p > 2$. Овај симетрични блок-дизајн је одређен параметрима $(p, p-1, p-2)$.*

Доказ. Доказ ћемо извести користећи тврђење да је бипартитан граф инцидентни граф симетричног блок-дизајна ако и само ако је дистантно-регуларан (енг. distance-regular) са дијаметром једнаким три [36]. Дакле, ми морамо окарактерисати бипартитне дистантно-регуларне унитарне Кејлијеве графове дијаметра три.

X_n је бипартитан ако и само ако је n паран [44]. Штавише, X_n има дијаметар три ако и само ако $n = 2^\alpha m$, за $\alpha \geq 1$ и непарно $m \geq 3$ [44]. Штавише, X_n је дистантно-регуларни граф ако и само ако је n степен простог броја или $n = 2p$, где је p непаран прост број [62]. Пресек поменутих класа унитарних Кејлијевих графова су графови X_n такви да је $n = 2p$, за прост број $p > 2$.

Ако симетрични блок-дизајн има параметре (v, k, λ) онда је регуларност инцидентног графа X_{2p} једнака $r = p - 1$. Број елемената у бипартитним класама је $v = b = p$. Параметар λ се може израчунати из једначине $r(k-1) = \lambda(v-1)$ датој у Теореми 1.4 (знајући да је $r = k = p - 1$ због симетрије) и може се добити да је $\lambda = p - 2$.

$\square$

На крају одељка дајемо резултат којим можемо прошири класу циркулантних графова чија матрица суседства има течно четири различите сопствене вредности, коришћењем операције Зајделовог пребацивања. Наиме, можмео стартовати од јако регуларног графа $\mathrm{G}_{kn}(D)$, где је $D = \{d \in D_{kn} \mid k \nmid d\}$ и показати да матрица суседства графа $\mathrm{SS}(\mathrm{G}_{kn}(D))$ има тачно четири различите сопствене вредности. Такође се може показати да је овакав граф изоморфан графу $\mathrm{G}_{kn}(D)$, где је $D = \{d \in D_{kn} \mid 2 \mid d,\ k \nmid d\} \cup \{d \in D_{kn} \mid 2 \nmid d,\ k \mid d\}$, па овим доказујемо и да је циркулантан.

3.2 Минимална најмања сопствена вредност

У овом одељку ћемо израчунати минималну најмању вредност (енг. minimal least eigenvalue) у класи графова $\mathrm{G}_n(D)$ унапред датог фиксираног реда n. Показаћемо да постоји јединствени граф датог реда који поседују минималну најмању сопствену вредност. Резултати у овом одељку су оригинални и базирани на самосталном раду аутора тезе [9].

Минимална најмања сопствена вредност представаља минималну од свих најмањих сопствених вредности спекатара графова $\mathrm{G}_n(D)$ са унапред датим редом n.

За произвољни делилац d_0 од n такав да $p_1 \nmid d_0$, означимо $D_n^{d_0} = \{p_1^{\beta_1} d_0 \mid 0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1\}$.

Лема 3.4. *За произвољни подскуп $D \subseteq D_n^{d_0}$ и $0 \leq j \leq n-1$ важи да је*

$$\sum_{d \in D} c(j, \frac{n}{d}) \geq -\frac{\varphi(\frac{n}{d_0})}{p_1 - 1}.$$

Доказ. Нека је $1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ произвољан индекс такав да је $j = p_1^{\gamma_1} j_1$, за $p_1 \nmid j_1$.

Без губљења општости, можемо претпоставити да је $0 \leq \gamma_1 \leq \alpha_1$. Заиста, ако је $\gamma_1 > \alpha_1$, онда $n - j = p_1^{\alpha_1}(n_1 - p_1^{\gamma_1 - \alpha_1} j_1)$, где смо означили $n = p_1^{\alpha_1} n_1$. Дакле, у том случају можемо да изведемо доказ користећи индекс $n - j$ уместо j, пошто је $c(j, \frac{n}{d}) = c(n - j, \frac{n}{d})$ и $p_1^{\alpha_1} \| n - j$.

Сада, за произвољан $d \in D$ такав да је $d = p_1^{\beta_1} d_0$ и $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$ имамо да је

$$
\begin{aligned}
t_{\frac{n}{d}, j} &= \frac{p_1^{\alpha_1} n_1}{p_1^{\beta_1} d_0 \mathrm{nzd}(p_1^{\alpha_1 - \beta_1} n_1 / d_0, p_1^{\gamma_1} j_1)} \\
&= p_1^{\alpha_1 - \beta_1 - \min(\alpha_1 - \beta_1, \gamma_1)} \frac{n_1}{d_0 \mathrm{nzd}(n_1/d_0, j_1)}.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Ради једноставнијег записа означићемо $N = N(n_1, d_0, j_1) = \frac{n_1}{d_0 \mathrm{nzd}(\frac{n_1}{d_0}, j_1)}$. Приметимо такође да $p_1 \nmid N$.

Сада разликујемо три случаја у зависности од вредности β_1.

Случај 1. $\beta_1 \leq \alpha_1 - \gamma_1 - 2$. Из овог услова директно следи да су $\gamma_1 \leq \alpha_1 - \beta_1 - 2$ и $\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 \geq 2$, одакле према (3.4), следи да је $p_1^2 \mid t_{\frac{n}{d}, j}$, пошто $p_1^{\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1} \| t_{\frac{n}{d}, j}$ и стога је $c(j, n/d) = 0$.

Случај 2. $\beta_1 = \alpha_1 - \gamma_1 - 1$. Како је $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1 - 1$, из (3.4) важи да је $t_{\frac{n}{d}, j} = p_1 N$ и зато

$$
c(j, n/d) = \mu(p_1 N) \frac{\varphi(p_1^{\alpha_1 - \beta_1} n_1 / d_0)}{(p_1 - 1)\varphi(N)} = -\mu(N) \frac{p_1^{\gamma_1} \varphi(\frac{n_1}{d_0})}{\varphi(N)}.
$$

Случај 3. $\alpha_1 - \gamma_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$. Претходна претпоставка је еквивалентна са $\alpha_1 - \beta_1 \leq \gamma_1 \leq \alpha_1$, одакле закључујемо да је $t_{\frac{n}{d}, j} = N$ и

$$
\begin{aligned}
c(j, n/d) &= \mu(N) \frac{\varphi(p_1^{\alpha_1 - \beta_1} n_1 / d_0)}{\varphi(N)} \\
&= \begin{cases} \mu(N) \frac{\varphi(\frac{n_1}{d_0})}{\varphi(N)}, & \alpha_1 = \beta_1 \\ \mu(N) \frac{p_1^{\alpha_1 - \beta_1 - 1}(p_1 - 1)\varphi(\frac{n_1}{d_0})}{\varphi(N)}, & \alpha_1 - \gamma_1 \leq \beta_1 < \alpha_1 \end{cases}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

За дати индекс j, видимо да за све делиоце $d \in D$ који задовољавају услов из случаја 3, вредности $c(j, \frac{n}{d})$ имају исти знак као и $\mu(N)$. Са друге стране, ако је N производ различитих простих фактора, $c(j, \frac{n}{d})$ и $\mu(N)$ имају супротне предзнаке за делиоце d који задовољавају услов из случаја 2.

Ако је $\mu(N) = -1$, из горње дискусије закључујемо да се минимална вредност $\sum_{d\in D} c(j, \frac{n}{d})$ може добити за све делиоце d који задовољавају услов из случаја 3:

$$\begin{aligned}
\sum_{d\in D} c(j, \frac{n}{d}) &\geq \sum_{\beta_1=\alpha_1-\gamma_1}^{\alpha_1} c(j, \frac{n}{p_1^{\beta_1} d_0}) = \\
&= \mu(N)\frac{\varphi(\frac{n_1}{d_0})}{\varphi(N)}(1 + (p_1 - 1)(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\gamma_1 - 1})) \\
&= -\frac{\varphi(\frac{n_1}{d_0})}{\varphi(N)} p_1^{\gamma_1} \geq -\frac{\varphi(\frac{n_1}{d_0})}{\varphi(N)} p_1^{\alpha_1} = -\frac{\varphi(\frac{n}{d_0}) p_1}{\varphi(N)(p_1 - 1)} \geq -\frac{\varphi(\frac{n}{d_0})}{p_1 - 1}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Из $\mu(N) = -1$ и $p_1 \nmid N$ закључујемо да $N \geq p_2$, па је стога $p_1 \leq \varphi(p_2) \leq \varphi(N)$ и да једнакост важи ако и само ако је $p_1 = 2$ и $N = p_2 = 3$. Штавише, једнакост у (3.6) важи за $\gamma_1 = \alpha_1$, тј. за све $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$, што је еквивалентно са $D_n^{d_0} = D$.

Ако $\mu(N) = 1$, онда из случаја 2 закључујемо

$$\sum_{d\in D} c(j, \frac{n}{d}) \geq -\frac{p_1^{\alpha_1 - \beta_1 - 1}\varphi(\frac{n_1}{d_0})}{\varphi(N)} \geq -p_1^{\alpha_1 - 1}\varphi(\frac{n_1}{d_0}) = -\frac{\varphi(\frac{n}{d_0})}{p_1 - 1}.$$

Приметимо да једнакост важи ако и само ако $\beta_1 = 0$ и $N = 1$ тј. за $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1 - 1 = \alpha_1 - 1$.

Случај $\mu(N) = 0$ не утиче на неједнакост коју доказујемо.

$\square$

Са $\overline{D}_{p_1}$ означимо све делиоце $d \in D_n$ такве да $p_1 \nmid d$, тј. $\overline{D}_{p_1} = \{d \in D_n \mid p_1 \nmid d\}$.

Теорема 3.17. *Нека је* $\mathrm{G}_n(D)$ *произвољни интегрални циркулантни граф. Тада важи неједнакост*

$$\lambda_j \geq -\frac{n}{p_1},$$

за сваки $1 \leq j \leq n$ *и* $D \subseteq D_n$. *Једнакост важи ако и само ако* $D = \overline{D}_{p_1}$ *и* $\frac{n}{p_1} \mid j$, *за* $1 \leq j \leq n - 1$.

Доказ. Приметимо да се скуп делилаца D може представити у следећој погоднијој форми

$$D = \bigcup_{d_0 \in \overline{D}_{p_1} \cap D} (D_n^{d_0} \cap D).$$

Приметимо да су скупови $D_n^{d_0} \cap D$, за $d_0 \in \overline{D}_{p_1} \cap D$, по паровима дисјунктни. Ако означимо $n_1 = n/p_1^{\alpha_1}$, као што смо урадили у претходном доказу, према Леми 3.4, може се добити следећа неједнакост

$$\begin{aligned}
\lambda_j(n, D) &= \sum_{d_0 \in \overline{D}_{p_1} \cap D} \sum_{d \in D_n^{d_0} \cap D} c(j, \frac{n}{d}) \geq - \sum_{d_0 \in \overline{D}_{p_1}} \frac{\varphi(\frac{n}{d_0})}{p_1 - 1} \\
&= - \sum_{d_0 \in \overline{D}_{p_1}} \frac{p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)\varphi(\frac{n_1}{d_0})}{p_1 - 1} = -p_1^{\alpha_1 - 1} n_1 = -\frac{n}{p_1}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Једнакост у (3.7) се може постићи ако и само ако $\overline{D}_{p_1} \subseteq D$ и $\sum_{d \in D_n^{d_0} \cap D} c(j, \frac{n}{d}) = -\frac{\varphi(\frac{n}{d_0})}{p_1 - 1}$, за сваки $d_0 \in \overline{D}_{p_1}$. Штавише, једнакост $\sum_{d \in D_n^{d_0} \cap D} c(j, \frac{n}{d}) = -\frac{\varphi(\frac{n_1}{d_0})}{p_1 - 1}$ се потенцијално може постићи коришћењем случаја 2 и случаја 3 доказа Леме 3.4.

Из случаја 3 доказа Леме 3.4 видимо да једнакост $\sum_{d \in D_n^{d_0} \cap D} c(j, \frac{n}{d}) = -\frac{\varphi(\frac{n}{d_0})}{p_1 - 1}$ важи, за сваки $d_0 \in \overline{D}_{p_1}$ ако и само ако је $p_1 = 2$, $\frac{n_1}{d_0 \mathrm{nzd}(n_1/d_0, j)} = 3$ и $D_n^{d_0} \subseteq D$, за сваки $d_0 \in \overline{D}_{p_1}$. То значи да је $\overline{D}_{p_1} \cup D_n^{d_0} \subseteq D$, за сваки $d_0 \in \overline{D}_{p_1}$. Ово даље имплицира да $\bigcup_{d_0 \in \overline{D}_{p_1}} D_n^{d_0} = D_n \subseteq D$, што је контрадикција.

Сада, резонујући као у случају 2 доказа Леме 3.4, можемо видети да једнакост $\sum_{d \in D_n^{d_0} \cap D} c(j, \frac{n}{d}) = -\frac{\varphi(\frac{n}{d_0})}{p_1 - 1}$ важи, за сваки $d_0 \in \overline{D}_{p_1}$ ако и само ако су услови $D_n^{d_0} \cap D = d_0$ ($\beta_1 = 0$), $\gamma_1 = \alpha_1 - 1$ и $\frac{n_1}{d_0 \mathrm{nzd}(n_1/d_0, j_1)} = 1$ задовољени, где је $n_1 = \frac{n}{p_1^{\alpha_1}}$ и $j_1 = \frac{j}{p_1^{\gamma_1}}$. Добија се да једнакост $D = \overline{D}_{p_1}$ следи из $D_n^{d_0} \cap D = d_0$, за сваки $d_0 \in \overline{D}_{p_1}$ и $\overline{D}_{p_1} \subseteq D$. Штавише, из $\frac{n_1}{d_0 \mathrm{nzd}(n_1/d_0, j_1)} = 1$ имамо $\frac{n_1}{d_0} \mid j_1$ за све $d_0 \in \overline{D}_{p_1}$. Коначно, пошто је $\mathrm{nzs}\{n_1/d_0 \mid d_0 \in \overline{D}_{p_1}\} = n_1$ видимо да је $n_1 \mid j_1$ и како $p_1^{\alpha_1 - 1} | j$ ($\gamma_1 = \alpha_1 - 1$) може се закључити да једнакост важи за сваки j такав да $p_1^{\alpha_1 - 1} n_1 \mid j$, а тиме и $\frac{n}{p_1} \mid j$.

$\square$

Претходним тврђењем одредили смо јединствени граф, који је $\mathrm{G}_n(\{d \in D_n \mid p_1 \nmid d\})$, са минималном најмањом сопственом вредношћу међу свим повезаним интегралним циркулантним графовима реда n. Та вредност је једнака $-\frac{n}{p_1}$ и може се добити за било који индекс j дељив са $\frac{n}{p_1}$.

3.3 Минимални спектрални покривач

У овом одељку ћемо израчунати минимални спектрални покривач (енг. spectral spread) у класи графова $\mathrm{G}_n(D)$ унапред датог фиксног реда n. Такође ћемо одредити све графове са минималним спектралним покривачем датог реда. Резултати у овом одељку су оригинални и базирани на самосталном раду аутора тезе [9].

У овом одељку користимо исту нотацију као и у претходном, $n = p_1^{\alpha_1} n_1$, $j = p_1^{\gamma_1} j_1$, $d = p_1^{\beta_1} d_0$ и $N = \frac{n_1}{d_0 \mathrm{nzd}(n_1/d_0, j_1)}$.

Кроз одељак ћемо са $f(n)$ означити најмањи прост делилац који дели n.

У остатку дисертације, са $s(\mathrm{G}_n(D)) = \max\{\lambda_0 - \lambda_j \mid 1 \le j \le n-1\}$ означавамо спектрални покривач графа $\mathrm{G}_n(D)$.

Лема 3.5. *За произвољни индекс j и делилац d од n важе следећа тврђења:*

i) $\varphi(\frac{n}{d}) - c(j, \frac{n}{d}) = \varphi(\frac{n}{d})$, *за* $\beta_1 \le \alpha_1 - \gamma_1 - 2$.

ii) $\varphi(\frac{n}{d}) - c(j, \frac{n}{d}) \le (1 + \frac{1}{p_1 - 1})\varphi(\frac{n}{d})$, *за* $\beta_1 = \alpha_1 - \gamma_1 - 1$. *Једнакост важи ако и само ако је* $N = 1$.

iii) $\varphi(\frac{n}{d}) - c(j, \frac{n}{d}) \le (1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d})$, *за* $\alpha_1 - \gamma_1 \le \beta_1 \le \alpha_1$, *где је* $p_i = f(N)$. *Једнакост важи ако и само ако је* $N = p_i$.

Доказ. Према случају 1 Леме 3.4 јасно је да $c(j, \frac{n}{d}) = 0$ и отуда $\varphi(\frac{n}{d}) - c(j, \frac{n}{d}) = \varphi(\frac{n}{d})$.

На основу случаја 2 Леме 3.4 закључујемо да је $c(j, \frac{n}{d}) = \mu(p_1 N)\frac{\varphi(\frac{n}{d})}{(p_1-1)\varphi(N)}$, одакле следи $\varphi(\frac{n}{d}) - c(j, \frac{n}{d}) \le \varphi(\frac{n}{d}) + \frac{\varphi(\frac{n}{d})}{p_1 - 1} = (1 + \frac{1}{p_1-1})\varphi(\frac{n}{d})$. Очигледно је да се у овом случају максимална вредност постиже за $N = 1$.

Коначно, на основу случаја 3 Леме 3.4 видимо да је $c(j, \frac{n}{d}) = \mu(N)\frac{\varphi(\frac{n}{d})}{\varphi(N)}$, што имплицира да је $\varphi(\frac{n}{d}) - c(j, \frac{n}{d}) \le \varphi(\frac{n}{d}) - (-\frac{\varphi(\frac{n}{d})}{\varphi(f(N))}) = (1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d})$. Дакле, према дефиницији вредности N, једнакост важи за $N = p_i$.

□

Нагласимо да важи $\varphi(\frac{n}{d}) - c(j, \frac{n}{d}) = 0$ за $N = 1$ и $\alpha_1 - \gamma_1 \le \beta_1 \le \alpha_1$.

Нека је $\mathrm{G}_n(D)$ повезан граф са минималним спектралним покривачем у класи свих интегралних циркулантних графова датог реда n. Означићемо ту вредност са $\mathrm{minspread}(n)$, тј. $\mathrm{minspread}(n) = \min\{s(\mathrm{G}_n(D)) \mid D \subseteq D_n\}$.

Нека је D' произвољан подскуп од D и $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_t\}$, такав да је $\mathrm{nzd}(\{d \mid d \in D'\}) = 1$. Граф $\mathrm{G}_n(D')$ је повезан и јасно подграф $\mathrm{G}_n(D)$. Стога, како је

$$\lambda_0(n, D) - \lambda_j(n, D) = \lambda_0(n, D') - \lambda_j(n, D') + \sum_{d \in D \setminus D'} \varphi(\frac{n}{d}) - c(j, \frac{n}{d})$$

и $\varphi(\frac{n}{d}) - c(j, \frac{n}{d}) \geq 0$, за сваки $1 \leq j \leq n-1$, то важи да је $s(\mathrm{G}_n(D)) \geq s(\mathrm{G}_n(D'))$. Пошто је $s(\mathrm{G}_n(D)) = \mathrm{minspread}(n)$, онда је $s(\mathrm{G}_n(D'))$ такође једнако $\mathrm{minspread}(n)$ и $D' \subseteq D$. Дакле, показали смо да постоји $\mathrm{G}_n(D)$ такав да је $\mathrm{nzd}(\{d \mid d \in D\}) = 1$, $s(\mathrm{G}_n(D)) = \mathrm{minspread}(n)$ и за сваки подскуп делилаца $D' \subseteq D$ важи да је $\mathrm{nzd}(\{d \mid d \in D'\}) > 1$ (графови $\mathrm{G}_n(D')$ нису повезани). Даље, из последње претпоставке следи да је $\mathrm{nzd}(d_1, \ldots, d_{l-1}, d_{l+1}, \ldots, d_t) > 1$ за сваки $1 \leq l \leq t$ и из повезаности $\mathrm{G}_n(D)$ имамо $\mathrm{nzd}(d_1, d_2, \ldots, d_t) = 1$. Зато, за свако l постоји прост делилац p_{i_l} од n такав да је $p_{i_l} \nmid d_l$ и $p_{i_l} \mid d_j$ за све $1 \leq j \neq l \leq t$.

Стога можемо дефинисати бијективно пресликавање

$$g : \{d_1, \ldots, d_t\} \to \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_t}\},$$

јер из $d_{l_1} \neq d_{l_2}$ следи $p_{i_{l_1}} \neq p_{i_{l_2}}$. Коначно, закључујемо да за сваки делилац d_l, $1 \leq l \leq t$, важи

$$p_{i_l} \nmid d_l \tag{3.8}$$

$$p_{i_1}, \ldots, p_{i_{l-1}}, p_{i_{l+1}}, \ldots, p_{i_t} \mid d_l. \tag{3.9}$$

На овај начин смо показали да можемо сузити претрагу минималног спектралног покривача на оне графове $\mathrm{G}_n(D)$ задатог реда n, који задовољавају својства (3.27) и (3.28). Зато се у Теоремама 3.18 и 3.19 бавимо само поменутом подкласом графова. Штавише, пошто је g бијекција, може се закључити да ако интегрални циркулантни графови задовољавају ова својства, онда им одговарају скупови делилаца са највише k делилаца.

3.3.1 Графови минималног спектралног покривача са не више од k делилаца

Најпре ћемо доказати следећи помоћни резултат, пре него што израчунамо минимални спектрални покривач циркулантних графова датог реда. Након тога карактеришемо све графове датог реда n чији је скуп делилаца мањи или једнак од k и минимални спектрални покривач $\mathrm{minspread}(n)$, а који задовољавају услове (3.27) и (3.28).

Лема 3.6. *За дато $k \geq 1$, нека су $p_1, \ldots, p_k$ произвољни прости бројеви и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ природни бројеви. Тада важе следећа тврђења:*

i) $(1 + \frac{1}{p_1-1})\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$*, за* $k = 1$

ii) $(1 + \frac{1}{p_1-1})\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) < \sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$*, за* $k = 2$ *и* $(\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2) = (1, 1, 2, 3)$

iii) $(1 + \frac{1}{p_1-1})\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) > \sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$*, за* $k \geq 2$*, осим у случају када је* $(\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2) = (1, 1, 2, 3)$.

Доказ. За $k = 1$ и $k = 2$ тако да је $(\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2) = (1, 1, 2, 3)$ директно проверавамо да једнакост и неједнакост важе, респективно у случајевима *i)* и *ii)*. Доказаћемо да је $(1+\frac{1}{p_1-1})\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) > \sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, за $k \geq 2$, осим у случају за $k = 2$ и $(\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2) = (1, 1, 2, 3)$. Доказ ћемо спровести индукцијом по броју простих фактора.

Претпоставимо да је $k = 2$. Доказујемо да је

$$(1 + \frac{1}{p_1 - 1})p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) > p_1^{\alpha_1} + p_2^{\alpha_2}, \tag{3.10}$$

осим у случају када је $k = 2$ и $(\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2) = (1, 1, 2, 3)$. Имамо да је $(1 + \frac{1}{p_1-1})p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2 - 1) > p_1^{\alpha_1} + p_2^{\alpha_2}$ ако и само ако $p_1^{\alpha_1} > \frac{p_2^{\alpha_2}}{p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1} - 1}$. Лако се може видети да је $\frac{p_2^{\alpha_2}}{p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1} - 1} = 1 + \frac{p_2^{\alpha_2-1}+1}{p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1} - 1} < 2$ ако и само ако је $(p_2 - 2)p_2^{\alpha_2-1} > 2$. Последња неједнакост је истинита ако и само ако $(\alpha_2, p_2) \neq (1, 3)$. Дакле, ако је $(\alpha_2, p_2) \neq (1, 3)$ може се закључити да је $p_1^{\alpha_1} \geq 2 > \frac{p_2^{\alpha_2}}{p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1} - 1}$. Ако $p_2 = 3$ и $\alpha_2 = 1$ онда је неједнакост $(1 + \frac{1}{p_1-1})p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2 - 1) > p_1^{\alpha_1} + p_2^{\alpha_2}$ еквивалентна са $p_1^{\alpha_1} > 3$ што је увек тачно осим у случају када $(\alpha_1, p_1) = (1, 2)$. На овај начин смо доказали базу индукције.

Сада ћемо доказати $(1 + \frac{1}{p_1-1})\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}) > \sum_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}$, за $t \geq 3$, претпостављајући да тврђење леме важи за сваки $t - 1 \geq 2$. Напишимо горњу неједнакост у облику

$$(1 + \frac{1}{p_1 - 1})\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}})(p_t - 1)p_t^{\alpha_t - 1} > \sum_{i=1}^{t-1} p_i^{\alpha_i} + p_t^{\alpha_t}$$

и ставимо да је $b = (1 + \frac{1}{p_1-1})\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}})$ и $a = \sum_{i=1}^{t-1} p_i^{\alpha_i}$. Дакле, потребно је доказати $b(p_t-1)p_t^{\alpha_t-1} > a+p_t^{\alpha_t}$. Дељењем обе стране последње неједнакости са $(p_t - 1)p_t^{\alpha_t-1}$ закључујемо да треба доказати релацију

$$b > \frac{a}{(p_t - 1)p_t^{\alpha_t - 1}} + 1 + \frac{1}{p_t - 1}. \tag{3.11}$$

Са друге стране, према индукцијској хипотези имамо да је $b > a-1$. Пошто је $t-1 \geq 2$, онда следи $a > 4$. Ово имплицира $4a-12 > a$ и стога $a-1 > \frac{a}{4}+2$. Штавише, како је $p_t \geq 5$ то важи да је $(p_t-1)p_t^{\alpha_t-1} \geq 4$ и стога $\frac{a}{(p_t-1)p_t^{\alpha_t-1}} \leq \frac{a}{4}$. Коначно, на основу следећег низа неједнакости добијамо

$$b > a-1 > \frac{a}{4}+2 \geq \frac{a}{(p_t-1)p_t^{\alpha_t-1}}+2 > \frac{a}{(p_t-1)p_t^{\alpha_t-1}}+1+\frac{1}{p_t-1},$$

чиме је доказ завршен.

□

Лема 3.7. *За дати природни број n, у класи свих $\mathrm{G}_n(D)$ датог реда n и скупова делилаца који садрже тачно k делилаца, минимални спектрални покривач једнак је $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, тј.*

$$\min\{s(\mathrm{G}_n(D)) \mid |D| = k \ D \subseteq D_n\} = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

Доказ. Нека је $\mathrm{G}_n(D)$ интегрални циркулантни граф, такав да скуп делилаца D садржи тачно k делилаца.

Ако означимо $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$, онда без губитка општости можемо претпоставити да $p_i \nmid d_i$ и $p_j \mid d_i$, за $1 \leq i, j \leq k$ тако да је $i \neq j$ (према (3.27) и (3.28)). Штавише, такође претпостављамо $0 = \beta_1^1 < 1 \leq \beta_1^2 \leq \ldots \leq \beta_1^k$, где β_1^i означава $S_{p_1}(d_i)$, $1 \leq i \leq k$. Нека је $N_i = \frac{n_1}{d_0^i \mathrm{nzd}(n_1/d_0^i, j_1)}$, за $d_i = p_1^{\beta_1^i} d_0^i$ и $1 \leq i \leq k$. Сада, можемо изаберати индекс $1 \leq j \leq n-1$ такав да је $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^1 - 1 = \alpha_1 - 1$. Како је $\alpha_1 - \beta_1^i - 1 < \gamma_1$, за $2 \leq i \leq k$, из Леме 3.5, случајеви 2 и 3, следи да је

$$\lambda_0 - \lambda_j \leq (1+\frac{1}{p_1-1})\varphi(\frac{n}{d_1}) + \sum_{i=2}^{k}(1+\frac{1}{f(N_i)-1})\varphi(\frac{n}{d_i}). \tag{3.12}$$

Штавише, ако узмемо $j_1 = p_2^{\alpha_2-1} \ldots p_k^{\alpha_k-1}$, из формуле $N_i = \frac{n_1}{d_0^i \mathrm{nzd}(n_1/d_0^i, j_1)}$ може се закључити да $S_{p_i}(N_i) = S_{p_i}(n_1/d_0^i) - \min\{S_{p_i}(n_1/d_0^i), \alpha_i - 1\} = \alpha_i - \min\{\alpha_i, \alpha_i - 1\} = 1$ $(2 \leq i \leq k)$, пошто $p_i \nmid d_0^i$ (јер $p_i \nmid d_i$). Штавише, $S_{p_1}(N_1) = 0$ ($p_1 \nmid n_1$ и стога $p_1 \nmid N_1$) и $S_{p_l}(N_i) = S_{p_l}(n_1/d_0^i) - \min\{S_{p_l}(n_1/d_0^i), \alpha_l - 1\} = S_{p_l}(n_1/d_0^i) - S_{p_l}(n_1/d_0^i) = 0$, за $1 \leq i \neq l \leq k$, ($p_l \mid d_0^i$ и стога $S_{p_l}(n_1/d_0^i) \leq \alpha_l - 1$). Ово коначно имплицира да је $N_1 = 1$

и $N_i = p_i$ за $2 \leq i \leq k$. Дакле, из Леме 3.5 можемо закључити да је једнакост у (3.12) постигнута за $j = p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}$, тј.

$$\lambda_0 - \lambda_j = (1 + \frac{1}{p_1 - 1})\varphi(\frac{n}{d_1}) + \sum_{i=2}^{k}(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_i}). \tag{3.13}$$

Како $p_i \nmid d_i$ важи да је $\varphi(n/d_i) \geq \varphi(p_i^{\alpha_i}) = (p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}$ и стога $\lambda_0 - \lambda_j \geq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Коначно, на основу дефиниције спектралног покривача имамо $s(\mathrm{G}_n(D)) \geq \lambda_0 - \lambda_j \geq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ и отуда $\min\{s(\mathrm{G}_n(D)) \mid |D| = k,\ D \subseteq D_n\} \geq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

Сада доказујемо да ако је $n/d_i = p_i^{\alpha_i}$, онда $s(\mathrm{G}_n(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \frac{n}{p_2^{\alpha_2}}, \dots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}})) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. За $j = p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}$, према (3.13), имамо да је

$$s(\mathrm{G}_n(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \frac{n}{p_2^{\alpha_2}}, \dots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}})) \geq \lambda_0 - \lambda_j = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

Дакле, довољно је доказати да је $\lambda_0 - \lambda_j \leq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, за сваки $0 \leq j \leq n-1$. Пошто је $0 = \beta_1^1 < \alpha_1 = \beta_1^2 = \ldots = \beta_1^k$, где је $\beta_1^i = S_{p_1}(d_i)$, $1 \leq i \leq k$, имамо $\gamma_1 > \alpha_1 - \beta_1^i - 1 = -1$, за $2 \leq i \leq k$ и стога добијамо да је

$$\lambda_0 - \lambda_j \leq (1 + \frac{1}{p_1 - 1})\varphi(p_1^{\alpha_1}) + \sum_{i=2}^{k}(1 + \frac{1}{f(N_i) - 1})\varphi(p_i^{\alpha_i}),$$

за $1 \leq j \leq n-1$, где је $N_i = \frac{n_1}{d_0^i \mathrm{nzd}(n_1/d_0^i, j_1)} = \frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(p_i^{\alpha_i}, j_1)}$ и зато је увек $f(N_i) = p_i$ $(\varphi(p_1^{\alpha_1}) - c(j, p_1^{\alpha_1})$ мање или једнако $(1 + \frac{1}{p_1 - 1})\varphi(p_1^{\alpha_1}))$. Коначно, $\lambda_0 - \lambda_j \leq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, за сваки $0 \leq j \leq n-1$, што имплицира да је $s(\mathrm{G}_n(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \frac{n}{p_2^{\alpha_2}}, \dots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}})) \leq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, а тиме и $s(\mathrm{G}_n(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \frac{n}{p_2^{\alpha_2}}, \dots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}})) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. На овај начин доказујемо да је минимални спектрални покривач једнак $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ у класи $\mathrm{G}_n(D)$ датог реда n, такав да је $|D| = k$.

□

Теорема 3.18. *За природни број $n > 1$, важи једнакост*

$$\mathrm{minspread}(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1, & 2\|n,\ 3\|n \\ \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, & \textit{у супротном} \end{cases}. \tag{3.14}$$

Доказ. У овом доказу ћемо видети у којим случајевима су спектрални покривачи графова $\mathrm{G}_n(D)$ мањи од $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, за $|D| < k$. Испоставиће се да постоји јединствени граф $\mathrm{G}_n(D)$ такав да је $s(\mathrm{G}_n(D)) < \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Подсетимо се да за $\mathrm{G}_n(D)$, тако да је $|D| = k$, имамо да важи $s(\mathrm{G}_n(D)) \geq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, према претходној леми.

Нека је $\mathrm{G}_n(D)$ такав граф да скуп делилаца D садржи $t < k$ делилаца, тј. $D = \{d_1, \ldots, d_t\}$. Према (3.27) и (3.28), за сваки делилац d_l, $1 \leq l \leq t$, постоји прост број $p_{g(l)}$ такав да $p_{g(l)} \nmid d_l$ и $p_{g(l)} \mid d_j$, за све $1 \leq j \leq t$ такве да је $j \neq l$.

Штавише, пошто може постојати више од једног простог броја који дели све делиоце из D осим тачно једног d_l, за дати l, са p_{i_l} означавамо минимални такав прост број, тј. $p_{i_l} = \min\{p_i \mid p_i \nmid d_l,\ p_i \mid d_j, 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \neq l \leq t\}$. Слично доказу претходне леме, може се доказати да је $t_{\frac{n}{d_l},j} = \frac{n}{d_l \mathrm{nzd}(\frac{n}{d_l},j)} = p_{i_l}$, $1 \leq l \leq t$ за $j = p_{i_1}^{\alpha_{i_1-1}} \cdots p_{i_t}^{\alpha_{i_t-1}} p_{i_{t+1}}^{\alpha_{i_{t+1}}} \cdots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$ где $\{p_{i_{t+1}}, \ldots, p_{i_k}\} = \{p_1, \ldots, p_k\} \setminus \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_t}\}$. Због тога, добијамо $c(j, \frac{n}{d_l}) = -\frac{\varphi(\frac{n}{d_l})}{p_{i_l}-1}$, што даље имплицира да је

$$\lambda_0 - \lambda_j = \sum_{l=1}^{t} (1 + \frac{1}{p_{i_l} - 1}) \varphi(\frac{n}{d_l}). \tag{3.15}$$

Нека је $\{q_1, \ldots, q_s\}$ подскуп од $\{p_{i_{t+1}}, \ldots, p_{i_k}\}$ такав да за сваки q_i постоје најмање два делиоца из $\{d_1, \ldots, d_t\}$ која нису дељива са q_i. Разликујемо два случаја у зависности од вредности s.

Случај 1. Претпоставимо да је $s \geq 1$.

Ако $q_i \nmid d_u$ и $q_i \nmid d_v$ за $u \neq v$ онда

$$\begin{aligned}(1 + \frac{1}{p_{i_u} - 1})\varphi(\frac{n}{d_u}) \quad + \quad & (1 + \frac{1}{p_{i_v} - 1})\varphi(\frac{n}{d_v}) > \\ & (1 + \frac{1}{p_{i_u} - 1})\varphi(\frac{n_i}{d_u}) + (1 + \frac{1}{p_{i_v} - 1})\varphi(\frac{n_i}{d_v}) + 2\varphi(q_i^{\alpha_{j_i}}),\end{aligned}$$

где је $S_{q_i}(n) = \alpha_{j_i}$ и $n_i = n/q_i^{\alpha_{j_i}}$. Такође, како је $2\varphi(q_i^{\alpha_{j_i}}) = 2(q_i - 1)q_i^{\alpha_{j_i-1}} = q_i^{\alpha_{j_i}} + (q_i - 2)q_i^{\alpha_{j_i}-1}$ добијамо

$$\lambda_0 - \lambda_j > \sum_{l=1}^{t} (1 + \frac{1}{p_{i_l} - 1}) \varphi(\frac{n_l}{d_l}) + \sum_{i=1}^{s} q_i^{\alpha_{j_i}} + \sum_{i=1}^{s} (q_i - 2) q_i^{\alpha_{j_i}-1}, \tag{3.16}$$

где је $n_l = n/\prod_{q_i \nmid d_l\, 1 \leq i \leq s} q_i^{\alpha_{j_i}}$ и $\alpha_{j_i} = S_{q_i}(n)$.

Нека је $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \setminus \{q_1, \ldots, q_s\}$. По дефиницији P, видимо да за сваки $1 \leq l \leq k - s$ такав да $p_{r_l} \in P$ постоји неки d_i, $1 \leq i \leq t$, тако да је $p_{r_l} \nmid d_i$, тј. $p_{r_l}^{\alpha_{r_l}} \mid \frac{n_i}{d_i}$ и p_{r_l} дели сваки делилац од D осим d_i. Штавише, према Леми 3.6, ако је $\frac{n_l}{d_l} \neq 6$, важи да $(1+\frac{1}{p_{i_l}-1})\varphi(\frac{n_l}{d_l}) > \sum_{p_{r_l}\nmid d_l} p_{r_l}^{\alpha_{r_l}}$ и ако је $\frac{n_l}{d_l} = 6$, важи да $(1+\frac{1}{p_{i_l}-1})\varphi(\frac{n_l}{d_l}) + 1 \geq \sum_{p_{r_l}\nmid d_l} p_{r_l}^{\alpha_{r_l}}$. Према томе, ако $2 \notin \{q_1, \ldots, q_s\}$ онда 2 може припадати P, те зато имамо $\sum_{i=1}^{s}(q_i-2)q_i^{\alpha_{j_i}-1} \geq 1$ и $\sum_{l=1}^{t}(1+\frac{1}{p_{i_l}-1})\varphi(\frac{n_l}{d_l}) \geq \sum_{p_{r_l}\nmid d_l} p_{r_l}^{\alpha_{r_l}} - 1$. У супротном случају, ако је $2 \in \{q_1, \ldots, q_s\}$ онда $2 \notin P$ и тада имамо $\sum_{l=1}^{t}(1+\frac{1}{p_{i_l}-1})\varphi(\frac{n_l}{d_l}) > \sum_{p_{r_l}\nmid d_l} p_{r_l}^{\alpha_{r_l}}$.

Користећи (3.16), у оба случаја даље се добија

$$\lambda_0 - \lambda_j > \sum_{l=1}^{k-s} p_{r_l}^{\alpha_{r_l}} + \sum_{i=1}^{s} q_i^{\alpha_{j_i}} = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

На овај начин смо доказали да за $s \geq 1$ имамо да је $s(\mathrm{G}_n(D)) \geq \lambda_0 - \lambda_j > \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, за сваки $\mathrm{G}_n(D)$ такав да је $|D| < k$.

Случај 2. Претпоставимо да је $s = 0$.

Прво претпоставимо да $\frac{n}{6} \notin D$. Користећи Лему 3.6, добијамо $(1 + \frac{1}{p_{i_l}-1})\varphi(\frac{n}{d_l}) \geq \sum_{p_i\nmid d_l} p_i^{\alpha_i}$, при чему једнакост важи ако и само ако $d_l \in \{\frac{n}{p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}}, \frac{n}{2p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}}\}$ (Лема 3.6, случај 1). Штавише, пошто $t < k$, постоји $1 \leq l \leq t$, тако да бар два проста фактора, на пример, p_{i_l} и p_i не деле d_l. Коришћењем (3.10), то значи да је $(1+\frac{1}{p_{i_l}-1})\varphi(\frac{n}{d_l}) > \sum_{p_i\nmid d_l} p_i^{\alpha_i}$. Зато, пошто $d_l \neq \frac{n}{6}$, за $1 \leq l \leq t$, према (3.15), следи $\lambda_0 - \lambda_j > \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

Сада, ако је $\frac{n}{d_l} = 6$, за неко $1 \leq l \leq t$, онда имамо да је $(1 + \frac{1}{p_{i_l}-1})\varphi(\frac{n}{d_l}) = \sum_{p_i\nmid d_l} p_i^{\alpha_i} - 1$ само у случају када је $p_{i_l} = p_1 = 2$, $p_2 = 3$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ (Лема 3.6, део 2). Из претходне дискусије закључујемо $\lambda_0 - \lambda_j \geq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1$, при чему једнакост важи ако и само ако $d_1 = \frac{n}{6}$ и $d_l = \frac{n}{p_{l+1}^{\alpha_{l+1}}}$ за сваки $2 \leq l \leq t$. Како је d_1 непаран и $s = 0$, можемо приметити да су $d_2, \ldots, d_t$ парни, па је зато $d_l \neq \frac{n}{2p_{l+1}^{\alpha_{l+1}}}$ пошто је $\frac{n}{2p_{l+1}^{\alpha_{l+1}}}$ непаран, $1 \leq l \leq t$. Ово значи да ми можемо успоставити бијекцију из скупа $\{p_3, \ldots, p_k\}$ у скуп $\{d_2, \ldots, d_t\}$ те зато имамо да је $t = k-1$. Коначно је јасно да мора бити $s(\mathrm{G}_n(\frac{n}{6}, \frac{n}{p_3^{\alpha_3}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}})) \geq \lambda_0 - \lambda_j = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1$, за $n = 2 \cdot 3 \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Са друге стране, за сваки $1 \leq j \leq t$ доказаћемо да важи $\lambda_0 - \lambda_j \leq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1$. Како је $\alpha_1 = 1$ и $0 = \beta_1^1 < 1 = \beta_1^2 = \ldots = \beta_1^{k-1}$, где је $\beta_1^i = S_{p_1}(d_i)$, $1 \leq i \leq k-1$, имамо $\gamma_1 \geq \alpha_1 - \beta_1^1 - 1 = 0 > \alpha_1 - \beta_1^i - 1 = -1$, за свако $2 \leq i \leq k-1$, те стога добијамо

$$\lambda_0-\lambda_j \le (1+\frac{1}{p_1-1})\varphi(6)+\sum_{i=3}^{k}(1+\frac{1}{f(N_i)-1})\varphi(p_i^{\alpha_i}),$$

где је $N_i = \frac{n_1}{d_0^i \mathrm{nzd}(n_1/d_0^i, j_1)} = \frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(p_i^{\alpha_i}, j_1)}$ и важи да је $f(N_i) = p_i$. Коначно је $\lambda_0 - \lambda_j \le \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1$, за свако $0 \le j \le n-1$, одакле следи $s(\mathrm{G}_n(\frac{n}{6}, \frac{n}{p_3^{\alpha_3}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}})) \le \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1$, па је стога $s(\mathrm{G}_n(\frac{n}{6}, \frac{n}{p_3^{\alpha_3}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}})) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1$.

Штавише, видимо да је $\varphi(p_i^{\alpha_i}) - c(j, p_i^{\alpha_i}) = (1 + \frac{1}{f(N_i)-1})\varphi(p_i^{\alpha_i})$, $3 \le i \le k$, ако и само ако је $N_i = p_i$ и то је тачно ако и само ако је $p_i^{\alpha_i - 1} \| j$, користећи Лему 3.5 део 3. Са друге стране, важи да је $\varphi(6) - c(j, 6) = (1 + \frac{1}{p_1 - 1})\varphi(6)$ ако и само ако је $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^1 - 1 = 0$ и $N_1 = \frac{3}{\mathrm{nzd}(3,j)} = 1$ тј. $3 \mid j$ (према Леми 3.5, део 2). Коначно, закључујемо да $\lambda_0 - \lambda_j$ достиже вредност $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1$ за

$$j = 3 \cdot p_3^{\alpha_3 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}. \tag{3.17}$$

□

У претходној теореми смо одредили минималну вредност спектралног покривача међу свим интегралним циркулантним графовима датог реда n. Штавише, у следећој теореми налазимо све скупове делилаца D који задовољавају (3.27) и (3.28) и за које спектрални покривач може достићи вредност $\mathrm{minspread}(n)$. Прво да поменемо да према доказу Теореме 3.18, можемо приметити да постоји јединствени граф $\mathrm{G}_n(\frac{n}{6}, \frac{n}{p_3^{\alpha_3}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}})$ реда $n = 2 \cdot 3 \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$ чији спектрални покривач достиже минималну вредност $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1$ међу свим $\mathrm{G}_n(D)$ таквим да је $|D| \le k$. Штавише, ако је $n \ne 2 \cdot 3 \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$ и скуп делилаца D садржи мање од k делилаца имамо да је $s(\mathrm{G}_n(D)) > \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

Такође, из доказа Леме 3.7, ако је број делилаца у D једнак k може се видети да међу свим $\mathrm{G}_n(d_1, \ldots, d_k)$ који достижу минималн спектрални покривач $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, за делиоце d_i, $1 \le i \le k$ важи $\varphi(n/d_i) = \varphi(p_i^{\alpha_i})$, $p_i \nmid d_i$ и $p_j \mid d_i$ за $1 \le j \ne i \le k$. Ово директно имплицира да $d_i \in \{\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}, \frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}\}$, $1 \le i \le k$. Међутим, постоје $k-$торке делилаца $(d_1, \ldots, d_k) \in \prod_{i=1}^{k}\{\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}, \frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}\}$ тако да је $s(\mathrm{G}_n(D)) > \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Следећом теоремом дајемо услове под којима спектрални покривач од $\mathrm{G}_n(d_1, \ldots, d_k)$ достиже вредност $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

Теорема 3.19. *За природан број* $n > 1$ *и скуп делилаца* $D \subseteq D_n$ *такав да је* $|D| \leq k$ *, важе следећа тврђења:*

(*i*) *ако* $2\|n$ *и* $3\|n$ *онда* $s(\mathrm{G}_n(D)) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1$ *ако и само ако* $D = \{\frac{n}{6}, \frac{n}{p_3^{\alpha_3}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}}\}$

(*ii*) *ако* $n \neq 2 \cdot 3 \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$ *онда* $s(\mathrm{G}_n(D)) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *ако и само ако* $(d_1, \ldots, d_k) \in \prod_{i=1}^{k}\{\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}, \frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}\}$ *и* $\sum_{i:S_2(d_i)=\alpha_1-1}(p_i-2)p_i^{\alpha_i-1} \leq 2^{\alpha_1-1}$.

Доказ. Већ смо утврдили да, на основу горње дискусије, тврђење под (*i*) важи. Такође је објашњено зашто $s(\mathrm{G}_n(D)) > \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ за $n \neq 2 \cdot 3 \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$ и $|D| < k$. Стога, претпостављамо да је $|D| = k$ и доказујемо (*ii*). Тврђење (*ii*) за непарно n очигледно такође важи, пошто су сви делиоци $d_1, \ldots, d_k$ непарни због чега је $d_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$, $1 \leq i \leq k$. Слично, ако је n паран и $\alpha_1 = 1$, онда је само делилац d_1 непаран и $d_2, \ldots, d_k$ су парни (због (3.27) и (3.28)), одакле закључујемо $d_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$, $1 \leq i \leq k$. Тривијално је видети да важи $\sum_{i:S_2(d_i)=\alpha_1-1}(p_i-2)p_i^{\alpha_i-1} \leq 2^{\alpha_1-1}$.

Сада доказујемо тврђење под (*ii*) за случај $n \in 2\mathbb{N}$ и $\alpha_1 \geq 2$. У доказу ћемо задржати сличну нотацију као у доказу Теореме 3.18 и претпоставити да $d_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$ или $d_i = \frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}$, $1 \leq i \leq k$. Надаље, означавамо $\beta_1^i = S_{p_1}(d_i)$, $1 \leq i \leq k$, и претпостављамо да $0 = \beta_1^1 < 1 \leq \beta_1^2 \leq \ldots \leq \beta_1^k$, где је $\beta_1^i \in \{\alpha_1, \alpha_1 - 1\}$, $2 \leq i \leq k$. Према Леми 3.5, за произвољан $0 \leq j \leq n-1$ можемо писати

$$\lambda_0 - \lambda_j \leq \sum_{i:\gamma_1 < \alpha_1 - \beta_1^i - 1} \varphi(\frac{n}{d_i}) \;+\; (1 + \frac{1}{p_1 - 1}) \sum_{i:\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^i - 1} \varphi(\frac{n}{d_i})$$
$$+ \sum_{i:\gamma_1 > \alpha_1 - \beta_1^i - 1} (1 + \frac{1}{f(N_i) - 1})\varphi(\frac{n}{d_i}). \tag{3.18}$$

Пошто је $\beta_1^1 = 0$ и $\beta_1^i \in \{\alpha_1 - 1, \alpha_1\}$, $2 \leq i \leq k$, постоје тачно две вредности γ_1 за које $\lambda_0 - \lambda_j$ потенцијално може постићи $s(\mathrm{G}_n(D))$. Тачније, ове две вредности γ_1 су $\alpha_1 - \beta_1^i - 1 \in \{0, \alpha_1 - 1\}$ за $\beta_1^i \in \{0, \alpha_1 - 1\}$, респективно, пошто за $\beta_1^i = \alpha_1$ добијамо $\gamma_1 = -1$, што је немогуће.

Ако је $\gamma_1 = \alpha_1 - 1$ онда се горња неједнакост своди на неједнакост (3.12) (не постоји β_1^i такво да је $\alpha_1 - 1 = \gamma_1 < \alpha_1 - \beta_1^i - 1$). Тачније, $\alpha_1 - 1 = \gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^1 - 1$ и $\alpha_1 - 1 = \gamma_1 > \alpha_1 - \beta_1^i - 1 \in \{0, -1\}$, за $2 \leq i \leq k$, јер је $\alpha_1 \geq 2$. Једнакост је постигнута за $j_1 = p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$, одакле закључујемо $s(\mathrm{G}_n(D)) \geq \lambda_0 - \lambda_j = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, пошто $\varphi(\frac{n}{d_i}) \in \{\varphi(p_i^{\alpha_i}), \varphi(2p_i^{\alpha_i})\}$ и стога $\varphi(\frac{n}{d_i}) = (p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}$.

Ако је $\gamma_1 = 0$ онда $\alpha_1 - \beta_1^1 - 1 > \gamma_1$, пошто $\alpha_1 \geq 2$. Штавише, имамо да је $\gamma_1 = 0 = \alpha_1 - \beta_1^i - 1$, за $\beta_1^i = \alpha_1 - 1$ и $\gamma_1 = 0 > \alpha_1 - \beta_1^i - 1$ за $\beta_1^i = \alpha_1$. За такав j, користећи неједнакост (3.18), добијамо следећу неједнакост

$$\lambda_0 - \lambda_j \leq \varphi(\frac{n}{d_1}) + (1 + \frac{1}{p_1 - 1}) \sum_{i:\beta_1^i = \alpha_1 - 1} \varphi(\frac{n}{d_i}) + \sum_{i:\beta_1^i = \alpha_1} (1 + \frac{1}{f(N_i) - 1}) \varphi(\frac{n}{d_i}).$$

Једнакост се може достићи за $j = \prod_{\beta_1^i = \alpha_i} p_i^{\alpha_i - 1} \prod_{\beta_1^i = \alpha_i - 1} p_i^{\alpha_i}$, јер важи $N_i = \frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(p_i^{\alpha_i}, j_1)}$ одакле закључујемо да је $N_i = p_i$, за $\beta_1^i = \alpha_i$ и $N_i = 1$, за $\beta_1^i = \alpha_i - 1$. Дакле, за такво j, добијамо

$$\lambda_0 - \lambda_j = \varphi(\frac{n}{d_1}) + (1 + \frac{1}{p_1 - 1}) \sum_{i:\beta_1^i = \alpha_1 - 1} \varphi(\frac{n}{d_i}) + \sum_{i:\beta_1^i = \alpha_1} (1 + \frac{1}{p_i - 1}) \varphi(\frac{n}{d_i}).$$

Ова формула се даље може поједноставити на следећи начин

$$\begin{aligned} \lambda_0 - \lambda_j = (p_1 - 1)p_1^{\alpha_1 - 1} \quad &+ \quad (1 + \frac{1}{p_1 - 1}) \sum_{i:\beta_1^i = \alpha_1 - 1} (p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1} \\ &+ \quad \sum_{i:\beta_1^i = \alpha_1} (1 + \frac{1}{p_i - 1})(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}. \end{aligned}$$

Сада, спектрални покривач од $\mathrm{G}_n(D)$ достиже вредност $\sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, ако и само ако је неједнакост $\lambda_0 - \lambda_j \leq \sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ задовољена. За $p_1 = 2$, закључујемо да је ова неједнакост тачна ако и само ако је тачно $\sum_{i:\beta_1^i = \alpha_1 - 1} (p_i - 2)p_i^{\alpha_i - 1} \leq 2^{\alpha_1 - 1}$.

□

Претходна теорема карактерише све интегралне циркулантне графове датог реда n и скупом делилаца кардиналности мање или једнаке k са минималним спектралним покривачем minspread(n) који задовољавају услове (3.27) и (3.28) (услови (3.27) и (3.28) имплицирају $|D| \leq k$). Већ смо коментарисали да је граф $\mathrm{G}_n(\frac{n}{6}, \frac{n}{p_3^{\alpha_3}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}})$ реда $n = 2 \cdot 3 \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$ јединствени граф чији спектрални покривач достиже минималну вредност $\sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} - 1$ међу свим графовима $\mathrm{G}_n(D)$ који задовољавају $|D| \leq k$. Споменимо да су графови описани у другом делу Теореме 3.19 једини графови датог реда $n \neq 2 \cdot 3 \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$ и скупом D са највише k делилаца чији спектрални покривач достиже $\sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$. Заиста, ако постоји $\mathrm{G}_n(D)$ такав да је $s(\mathrm{G}_n(D)) = \sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, при чему је $|D| \leq k$ и делиоци из D не задовољавају релације (3.27) и (3.28), онда постоји скуп делилаца D' такав да $\mathrm{G}_n(D \setminus D')$ задовољава услове (3.27) и (3.28) и $s(\mathrm{G}_n(D \setminus D')) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Према коментарима после Теореме 3.18, имамо да је $s(\mathrm{G}_n(D \setminus D')) > \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, јер $|D \setminus D'| < k$, што је контрадикција.

3.3.2 Графови минималног спектралног покривача са више од k делилаца

Настављамо са карактеризацијом графова $\mathrm{G}_n(D)$ таквих да је $|D| > k$, који достижу минимални спектрални покривач међу свим интегралним циркулантним графовима датог реда n. Нека је $\mathrm{G}_n(D)$ граф такав да је $D = \{d_1, \ldots, d_t\}$, $t > k$ и $s(\mathrm{G}_n(D)) = \mathrm{minspread}(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Најпре тврдимо да постоји делилац d_i такав да је $\mathrm{G}_n(D \setminus \{d_i\})$ повезан. Заиста, ако претпоставимо да је за сваки $1 \leq i \leq t$ граф $\mathrm{G}_n(D \setminus \{d_i\})$ неповезан, онда постоји делилац p_i такав да $p_i \mid d_j$, за све $1 \leq j \neq i \leq t$ и $p_i \nmid d_i$. На овај начин смо успоставили инјективно пресликавање $f : \{d_1, \ldots, d_t\} \to \{p_1, \ldots, p_k\}$ тако да је $f(d_i) = p_i$, али ово је контрадикција пошто је $t > k$. Дакле, показали смо да постоји скуп делилаца D'' такав да је $\mathrm{G}_n(D \setminus D'')$ повезан, $s(\mathrm{G}_n(D \setminus D'')) = \mathrm{minspread}(n)$ и $|D \setminus D''| = k$. У даљем тексту са D' означавамо скуп делилаца $D \setminus D''$.

Нека су $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ и $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ сопствене вредности $\mathrm{G}_n(D)$ и $\mathrm{G}_n(D')$, редом. Користећи чињеницу да за сваки $0 \leq j \leq n-1$, важи

$$\lambda_0 - \lambda_j = \mu_0 - \mu_j + \sum_{d \in D \setminus D'} \varphi(\frac{n}{d}) - c(j, \frac{n}{d}),$$

одакле закључујемо да је $s(\mathrm{G}_n(D)) \geq s(\mathrm{G}_n(D'))$, јер $\varphi(\frac{n}{d}) \geq c(j, \frac{n}{d})$, за сваки $0 \leq j \leq n-1$. Користећи дефиницију $\mathrm{minspread}(n)$ имамо да је $\mathrm{minspread}(n) = s(\mathrm{G}_n(D)) \geq s(\mathrm{G}_n(D')) \geq \mathrm{minspread}(n)$, одакле тривијално важи да је $\mathrm{minspread}(n) = s(\mathrm{G}_n(D'))$. Штавише, из доказа Теореме 3.18 и Теореме 3.19 може се приметити да се минимални спектрални покривач може постићи за $j_0 = p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$, тј. $s(\mathrm{G}_n(D')) = \mu_0 - \mu_{j_0}$. Стављајући $j = j_0$ у горњу једначину, закључујемо да $\varphi(\frac{n}{d}) - c(j_0, \frac{n}{d}) = 0$, за сваки $d \in D \setminus D'$. Последња једначина је тачна ако и само ако $t_{\frac{n}{d}, j_0} = 1$ и отуда $\frac{n}{d} = \mathrm{nzd}(\frac{n}{d}, j_0)$. Одавде закључујемо да за сваки $d \in D \setminus D'$ важи

$$\varphi(\frac{n}{d}) - c(j_0, \frac{n}{d}) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{d} \mid j_0, \tag{3.19}$$

а ово је тачно ако и само ако важи $p_1 \cdots p_k \mid d$. То значи да сваки граф $\mathrm{G}_n(D)$, где је $|D| > k$, који достиже минимални спектрални покривач има скуп делилаца облика $D = D' \cup D''$ где је D' један од скупова описаних у исказу Теореме 3.19, а за D'' важи $D'' \subseteq \{d \in D_n \mid p_1 \cdots p_k \mid$

$d\}$. Међутим, постоје графови са скупом делиоца овог облика који не достижу minspread(n).

Лема 3.8. *Нека је n природан број такав да је $n \neq 2 \cdot 3 \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Тада спектрални покривач графа $\mathrm{G}_n(D)$ где је $D = \{d_1, \ldots, d_k, d_{k+1}\}$, $(d_1, \ldots, d_k) \in \prod_{i=1}^{k}\{\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}, \frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}\}$ и $(d_1, \ldots, d_k) \neq (\frac{n}{p_1}, \ldots, \frac{n}{p_k})$, достиже вредност* minspread$(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *ако и само ако*

(i) $(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) \leq p_i^{\alpha_i - 1}$, *за* $S_{p_i}(d_{k+1}) \leq \alpha_i - 1$, $1 \leq i \leq k$.

и важи један од услова:

(ii) $\sum_{i=1, i: S_2(d_i) = \alpha_1 - 1}^{k} (p_i - 2)p_i^{\alpha_i - 1} + 2\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) \leq 2^{\alpha_1 - 1}$, *ако* $S_2(d_{k+1}) = \alpha_1 - 1$

(iii) $\sum_{i=1, i: S_2(d_i) = \alpha_1 - 1}^{k} (p_i - 2)p_i^{\alpha_i - 1} + \varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) \leq 2^{\alpha_1 - 1}$, *ако* $1 \leq S_2(d_{k+1}) \leq \alpha_1 - 2$

(iv) $\sum_{i=1, i: S_2(d_i) = \alpha_1 - 1}^{k} (p_i - 2)p_i^{\alpha_i - 1} \leq 2^{\alpha_1 - 1}$, *ако* $1 \leq S_2(d_{k+1}) = \alpha_1$.

Доказ. Претпоставимо да је спектрални покривач графа $\mathrm{G}_n(D)$ једнак minspread$(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Ако означимо $\beta_1^i = S_{p_1}(d_i)$, $1 \leq i \leq k+1$, онда имамо да је $\beta_1^1 = 0$, $\beta_1^2, \ldots, \beta_1^k \in \{\alpha_1 - 1, \alpha_1\}$ и $\beta_1^{k+1} \geq 1$, пошто $d_i \in \{\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}, \frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}\}$, $1 \leq i \leq k$ и $p_1 \cdots p_k \mid d_{k+1}$. Како постоји бар један $d_i = \frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}$, $2 \leq i \leq k$, очигледно је да је n паран. Штавише, пошто је $\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}$ непаран, онда су $d_2, \ldots, d_k$ парни (због (3.27) и (3.28)) и стога је $\frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}$ паран, што даље имплицира да је $\alpha_1 \geq 2$.

Дакле, постоји највише три вредности $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^i - 1 \in \{\alpha_1 - 1, 0, \alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1\}$ за које $\lambda_0 - \lambda_j$ може потенцијално да достигне $s(\mathrm{G}_n(D))$. Може се приметити да је $\alpha_1 - 1 > 0$ и $\alpha_1 - 1 > \alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1$.

Сада, разликујемо следеће случајеве за које $\lambda_0 - \lambda_j$ може потенцијално да досегне $s(\mathrm{G}_n(D))$.

Случај 1. $\gamma_1 = \alpha_1 - 1$.

С обзиром да је $\gamma_1 > \alpha_1 - \beta_1^i - 1 \in \{0, -1\}$, за $2 \leq i \leq k$, $\gamma_1 > \alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1$ и $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^1 - 1$ може се видети да важи неједнакост

$$\begin{aligned} \lambda_0 - \lambda_j \leq (1 + \frac{1}{p_1 - 1})\varphi(\frac{n}{d_1}) \quad &+ \quad (1 + \frac{1}{f(N_{k+1}) - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) \\ &+ \quad \sum_{i=2}^{k}(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_i}). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Најпре обратимо пажњу на то да $\varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i})$ достиже вредност $(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, за сваки $1 \leq i \leq k$, ако и само ако је $j = p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$ (према Леми 3.5 делови 2 и 3, користећи чињенице да су $N_1 = 1$ и $N_i = \frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(p_i^{\alpha_i}, j_1)} = p_i$). Штавише, у том случају, пошто $p_1 \cdots p_k \mid d_{k+1}$ имамо да $\frac{n}{d_{k+1}} \mid j$, те је стога $c(j, \frac{n}{d_{k+1}}) = \varphi(\frac{n}{d_{k+1}})$, на основу (3.19). Коначно добијамо $\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+1}}) = 0$ и $\lambda_0 - \lambda_j = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

Претпоставимо да је $j = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1} - 1} p_i^{\delta_i} p_{i+1}^{\alpha_{i+1} - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$ и $0 \leq \delta_i \leq \alpha_i - 2$, за неко $2 \leq i \leq k$. Како је $S_{p_i}(d_i) = 0 \leq \alpha_i - \delta_i - 2$, $2 \leq i \leq k$ према Леми 3.5 део 1, имамо да је $\varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i}) = \varphi(\frac{n}{d_i})$. Слично томе, као што смо претходно закључили, $\varphi(\frac{n}{d_l}) - c(j, \frac{n}{d_l})$ достиже $(1 + \frac{1}{p_l - 1})\varphi(\frac{n}{d_l})$, за сваки $1 \leq l \leq k$, $l \neq i$. С друге стране, како је $N_{k+1} = \frac{n_1}{d_0^{k+1} \mathrm{nzd}(\frac{n_1}{d_0^{k+1}}, j_1)}$ и $p_1 \cdots p_k \mid d_{k+1}$ имамо да је $p_l \nmid N_{k+1}$, за $1 \leq l \leq k$ и $l \neq i$. Дакле, N_{k+1} је степен p_i и максимална вредност $\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+1}})$ може бити $(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})$, за $N_{k+1} = p_i$. Штавише, $N_{k+1} = p_i$ ако и само ако је $\delta_i = S_{p_i}(n/d_{k+1}) - 1$ и то може бити случај ако и само ако је $S_{p_i}(n/d_{k+1}) \geq 1$, тј. $S_{p_i}(d_{k+1}) \leq \alpha_i - 1$. Стога, стављамо $j = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1} - 1} p_i^{\alpha_i - \beta_i^{k+1} - 1} p_{i+1}^{\alpha_{i+1} - 1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ и добијамо да $\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+1}})$ достиже максималну вредност $(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})$, користећи Лему 3.5 део 2. Коначно, ово имплицира да је $\lambda_0 - \lambda_j = \sum_{l=1\ l \neq i}^{k} p_l^{\alpha_l} + \varphi(p_i^{\alpha_i}) + (1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})$ и пошто је $s(\mathrm{G}_n(D))$ једнако $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ добијамо да је $\lambda_0 - \lambda_j \leq \sum_{l=1}^{k} p_l^{\alpha_l}$ и отуда $(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) \leq p_i^{\alpha_i - 1}$. Ово доказује услов (i) за $2 \leq i \leq k$.

Нека је $j = p_{i_1}^{\alpha_{i_1} - 1} p_{i_2}^{\alpha_{i_2} - 1} \cdots p_{i_s}^{\alpha_{i_s} - 1} p_{i_{s+1}}^{\delta_{i_{s+1}}} p_{i_{s+2}}^{\delta_{i_{s+2}}} \cdots p_{i_k}^{\delta_{i_k}}$, где је $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ и $i_{s+1} < i_{s+2} < \cdots < i_k$ и $0 \leq \delta_{i_l} \leq \alpha_{i_l} - 2$, $s + 1 \leq l \leq k$. Сличном дискусијом добијамо да је $N_{i_l} = \frac{p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}}{\mathrm{nzd}(p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}, j)} = p_{i_l}$, за $1 \leq l \leq s$ и $S_{p_{i_l}}(d_{i_l}) = 0 \leq \alpha_{i_l} - \delta_{i_l} - 2$, за $s + 1 \leq l \leq k$. Према Леми 3.5, део 3 и део 1, закључујемо да је $\varphi(\frac{n}{d_{i_l}}) - c(j, \frac{n}{d_{i_l}}) = (1 + \frac{1}{p_{i_l} - 1})\varphi(\frac{n}{d_{i_l}})$, за $1 \leq l \leq s$ и $\varphi(\frac{n}{d_{i_l}}) - c(j, \frac{n}{d_{i_l}}) = \varphi(\frac{n}{d_{i_l}})$, за $s + 1 \leq l \leq k$. Штавише, како је $N_{k+1} = \prod_{l=s+1}^{k} p_{i_l}^{\alpha_{i_l} - \beta_{i_l}^{k+1} - \min\{\alpha_{i_l} - \beta_{i_l}^{k+1}, \delta_{i_l}\}}$ закључујемо да је $\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+1}}) \leq (1 + \frac{1}{p_{i_{s+1}} - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})$ (без губљења општости претпостављамо да је $\delta_{i_{s+1}} \geq 1$). Коначно, имамо

$$
\begin{aligned}
\lambda_0-\lambda_j &\leq \sum_{l=1}^{s}(1+\frac{1}{p_{i_l}-1})\varphi(\frac{n}{d_{i_l}})+\sum_{l=s+1}^{k}\varphi(\frac{n}{d_{i_l}})+(1+\frac{1}{p_{i_{s+1}}-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) \\
&\leq \sum_{l=1}^{s+1}p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}+\sum_{l=s+1}^{k}(p_{i_l}-1)p_{i_l}^{\alpha_{i_l}-1},
\end{aligned}
$$

при чему вредност на десној страни неједнакости не може бити спектрални покривач графа, јер је мања од $\sum_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$, пошто смо већ утврдили да је $(1+\frac{1}{p_{i_{s+1}}-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})\leq p_{i_{s+1}}^{\alpha_{i_{s+1}}-1}$.

Случај 2. $\gamma_1<\alpha_1-1$.

У овом случају имамо $\gamma_1\in\{\alpha_1-\beta_1^{k+1}-1,0\}$.

Случај 2.1. $\alpha_1-\beta_1^{k+1}-1=0$

Приметимо да $\lambda_0-\lambda_j$ може узети максималну вредност само за $\gamma_1=0$. Пошто је $\alpha_1-\beta_1^1-1=\alpha_1-1>\alpha_1-\beta_1^{k+1}-1=\alpha_1-\beta_1^i-1=\gamma_1=0>\alpha_1-\beta_1^j-1=-1$, за $\beta_1^i=\alpha_1-1$ и $\beta_1^j=\alpha_1$, користећи (3.18), можемо написати

$$
\begin{aligned}
\lambda_0-\lambda_j\leq\varphi(\frac{n}{d_1})+(1+\frac{1}{p_1-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) \quad &+ \quad (1+\frac{1}{p_1-1})\sum_{\substack{i=2\\ S_{p_1}(d_i)=\alpha_1-1}}^{k}\varphi(\frac{n}{d_i}) \\
&+ \sum_{\substack{i=2\\ S_{p_1}(d_i)=\alpha_1}}^{k}(1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i}).
\end{aligned}
$$

Како је $\alpha_1-\beta_1^1-1>\gamma_1$ имамо да је $\varphi(\frac{n}{d_1})-c(j,\frac{n}{d_1})=\varphi(\frac{n}{d_1})$ (Лема 3.5, случај 1). Штавише, из Леме 3.5, део 2 директно следи да $\varphi(\frac{n}{d_i})-c(j,\frac{n}{d_i})=(1+\frac{1}{p_1-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, где је $\beta_1^i=\alpha_1-1$, $2\leq i\leq k$, ако и само ако $N_i=\frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(j,p_i^{\alpha_i})}=1$, а то је тачно ако и само ако $p_i^{\alpha_i}\mid j$. С друге стране, $\varphi(\frac{n}{d_i})-c(j,\frac{n}{d_i})=(1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, где је $\beta_1^i=\alpha_1$, $2\leq i\leq k$, ако и само ако $N_i=\frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(j,p_i^{\alpha_i})}=p_i$ (Лема 3.5 део 3), што је тачно ако и само ако $p_i^{\alpha_i-1}\|j$. Како је $N_{k+1}=\frac{n_1}{d_0^{k+1}\mathrm{nzd}(\frac{n_1}{d_0^{k+1}},j_1)}$, $j=\prod_{i=2\ \ i:S_2(d_i)=\alpha_1-1}^{k}p_i^{\alpha_i}\prod_{i=2\ \ i:S_2(d_i)=\alpha_1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}$ и $p_1\cdots p_k\mid d_{k+1}$, имамо да $\frac{n_1}{d_0^{k+1}}\mid j_1$, а тиме и $N_{k+1}=1$. Штавише, пошто је $\beta_1^{k+1}=\alpha_1-\gamma_1-1$ и $N_{k+1}=1$, из Леме 3.5 део 2 добијамо да $\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})-c(j,\frac{n}{d_{k+1}})$ достиже $(1+\frac{1}{p_1-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})$. Ово имплицира да за

$j=\prod_{i=2\ \ i:S_2(d_i)=\alpha_1-1}^{k}p_i^{\alpha_i}\prod_{i=2\ \ i:S_2(d_i)=\alpha_1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}$ добијамо

$$\lambda_0-\lambda_j=\varphi(2^{\alpha_1})+2\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})+2\sum_{\substack{i=2\\ S_2(d_i)=\alpha_1-1}}^{k}\varphi(\frac{n}{d_i})+\sum_{\substack{i=2\\ S_2(d_i)=\alpha_1}}^{k}(1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$$

и пошто је $s(\mathrm{G}_n(D))$ једнако $\sum_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$ мора бити $\lambda_0-\lambda_j\leq\sum_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$. После краћег рачуна добија се да је $\sum_{i:S_2(d_i)=\alpha_1-1}(p_i-2)p_i^{\alpha_i-1}+2\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})\leq 2^{\alpha_1-1}$. Ово доказује услов (ii) тврђења.

Случај 2.2. $\alpha_1-\beta_1^{k+1}-1>0$.

Претпоставимо да је $\gamma_1=0$. Из $\alpha_1-1=\alpha_1-\beta_1^1-1>\alpha_1-\beta_1^{k+1}-1>\alpha_1-\beta_1^i-1=\gamma_1=0>\alpha_1-\beta_1^j-1=-1$, за i и j тако да је $\beta_1^i=\alpha_1-1$ и $\beta_1^j=\alpha_1$, према (3.18), може се приметити да је

$$\begin{aligned}\lambda_0-\lambda_j\leq\varphi(\frac{n}{d_1})+\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})\ &+\ (1+\frac{1}{p_1-1})\sum_{\substack{i=2\\ S_{p_1}(d_i)=\alpha_1-1}}^{k}\varphi(\frac{n}{d_i})\\ &+\sum_{\substack{i=2\\ S_{p_1}(d_i)=\alpha_1}}^{k}(1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i}).\end{aligned}$$

На исти начин као што смо урадили у претходном случају, како је $\beta_1^i=\alpha_1-\gamma_1-1$ за $\beta_1^i=\alpha_1-1$, према Леми 3.5 део 2, види се да је $\varphi(\frac{n}{d_i})-c(j,\frac{n}{d_i})=(1+\frac{1}{p_1-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, $2\leq i\leq k$, ако и само ако $N_i=\frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(j,p_i^{\alpha_i})}=1$, што је тачно ако и само ако $p_i^{\alpha_i}\mid j$. Са друге стране, $\varphi(\frac{n}{d_i})-c(j,\frac{n}{d_i})=(1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, где је $\beta_1^i=\alpha_1$, $2\leq i\leq k$, ако и само ако $N_i=\frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(j,p_i^{\alpha_i})}=p_i$, што је тачно ако и само ако $p_i^{\alpha_i-1}\|j$ (према Леми 3.5 део 3). Штавише, пошто је $0=\beta_1^1<\beta_1^{k+1}<\alpha_1-\gamma_1-1$ имамо да је $\varphi(\frac{n}{d_1})-c(j,\frac{n}{d_1})=\varphi(\frac{n}{d_1})$ и $\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})-c(j,\frac{n}{d_{k+1}})=\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})$ (Лема 3.5 део 1).

Одавде следи да за $j=\prod_{i=2\ \ i:S_2(d_i)=\alpha_1-1}^{k}p_i^{\alpha_i}\prod_{i=2\ \ i:S_2(d_i)=\alpha_1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}$, добијамо

$$\lambda_0-\lambda_j=\varphi(2^{\alpha_1})+\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})+2\sum_{\substack{i=2\\ S_2(d_i)=\alpha_1-1}}^{k}\varphi(\frac{n}{d_i})+\sum_{\substack{i=2\\ S_2(d_i)=\alpha_1}}^{k}(1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$$

и пошто је $s(\mathrm{G}_n(D))$ једнако $\sum_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$ добијамо да је $\lambda_0-\lambda_j\leq\sum_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$. Након краћег рачуна добијамо $\sum_{i:S_2(d_i)=\alpha_1-1}(p_i-2)p_i^{\alpha_i-1}+\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})\leq 2^{\alpha_1-1}$. Ово доказује услов (iii) тврђења.

Претпоставимо сада да је $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1$. Како је $\alpha_1 - 1 = \alpha_1 - \beta_1^1 - 1 > \alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1 = \gamma_1 > \alpha_1 - \beta_1^i - 1 = 0 > \alpha_1 - \beta_1^j - 1 = -1$, за i и j такве да је $\beta_1^i = \alpha_1 - 1$ и $\beta_1^j = \alpha_1$, на основу (3.18) важи

$$\lambda_0 - \lambda_j \leq \varphi(\frac{n}{d_1}) + (1 + \frac{1}{p_1 - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) + \sum_{i=2}^{k}(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_i}).$$

Закључујемо да $\varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i})$ достиже $(1 + \frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, за сваки $2 \leq i \leq k$, ако и само ако је $N_i = \frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(j_1, p_i^{\alpha_i})} = p_i$, што је тачно ако и само ако је $j_1 = p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$ (Лема 3.5 део 3). Са друге стране, како је $N_{k+1} = \frac{n_1}{d_0^{k+1}\mathrm{nzd}(\frac{n_1}{d_0^{k+1}}, j_1)}$ и $p_1 \cdots p_k \mid d_{k+1}$ имамо $\frac{n_1}{d_0^{k+1}} \mid j_1$, и отуда $N_{k+1} = 1$. Сада, пошто важи $\beta_1^{k+1} = \alpha_1 - \gamma_1 - 1$, према Леми 3.5 део 2, закључујемо да $\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+1}})$ достиже вредност $(1 + \frac{1}{p_1-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})$. Ово имплицира да за $j = p_1^{\alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$ добијамо

$$\lambda_0 - \lambda_j = \varphi(2^{\alpha_1}) + 2\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) + \sum_{i=2}^{k}(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_i})$$

и пошто је $s(\mathrm{G}_n(D))$ једнак $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ добијамо да је $\lambda_0 - \lambda_j \leq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Након краћег рачуна може се видети да је $2\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) \leq 2^{\alpha_1 - 1}$. Напоменимо још то да ова неједнакост важи ако $\beta_1^{k+1} < \alpha_1 - 1$ одакле закључујемо да претходни аргуметни комплетирају доказ услова (i) тврђења.

Случај 2.3. $\alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1 < 0$.

Овај услов је еквивалентан са $\beta_1^{k+1} = \alpha_1$. Одавде такође следи $\gamma_1 = 0$.

Како је $\alpha_1 - 1 = \alpha_1 - \beta_1^1 - 1 > \alpha_1 - \beta_1^i - 1 = \gamma_1 = 0 > \alpha_1 - \beta_1^j - 1 = \alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1 = -1$, за i и j такве да је $\beta_1^i = \alpha_1 - 1$ и $\beta_1^j = \alpha_1$, на основу (3.18), може се приметити да је

$$\begin{aligned}\lambda_0 - \lambda_j \leq \varphi(\frac{n}{d_1}) \ &+ \ (1 + \frac{1}{p_1 - 1}) \sum_{\substack{i=2 \\ S_{p_1}(d_i) = \alpha_1 - 1}}^{k} \varphi(\frac{n}{d_i}) \\ &+ \sum_{\substack{i=2 \\ S_{p_1}(d_i) = \alpha_1}}^{k} (1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_i}) + (1 + \frac{1}{f(N_{k+1}) - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}).\end{aligned}$$

На исти начин као што је то урађено у случају 2.1., може се закључити да за $j = \prod_{i=2 \ i:S_2(d_i) = \alpha_1 - 1}^{k} p_i^{\alpha_i} \prod_{i=2 \ i:S_2(d_i) = \alpha_1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1}$, имамо $\varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i}) = (1 + \frac{1}{p_1-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, где је $\beta_1^i = \alpha_1 - 1$, $2 \leq i \leq k$, и $\varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i}) = (1 +$

$\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, где је $\beta_1^i = \alpha_1$, $2 \le i \le k$. Са друге стране, пошто важи $p_1 \cdots p_k \mid d_{k+1}$ биће $\frac{n}{d_{k+1}} \mid j$, па је и $\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+1}}) = 0$ задовољено. Ово значи да је

$$\lambda_0 - \lambda_j = \varphi(2^{\alpha_1}) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ S_2(d_i)=\alpha_1-1}}^{k} \varphi(\frac{n}{d_i}) + \sum_{\substack{i=2 \\ S_2(d_i)=\alpha_1}}^{k} (1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i}).$$

Пошто је $s(\mathrm{G}_n(D)) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ добијамо да је $\lambda_0 - \lambda_j \le \sum_{l=1}^{k} p_l^{\alpha_l}$ и стога $\sum_{i=1, i:S_2(d_i)=\alpha_1-1}^{k} (p_i-2)p_i^{\alpha_i-1} \le 2^{\alpha_1-1}$, што је заправо услов (iv). Споменимо да ово није нови услов, јер делиоци $d_1, \ldots, d_k$ већ задовољавају услов (ii) Теореме 3.19.

Нека је $j = p_{i_2}^{\delta_{i_2}} \cdots p_{i_s}^{\delta_{i_s}} p_{i_{s+1}}^{\alpha_{i_{s+1}}-1} \cdots p_{i_t}^{\alpha_{i_t}-1} p_{i_{t+1}}^{\alpha_{i_{t+1}}} \cdots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$, где је $i_1 = 1$, $i_2 < \ldots < i_s$, $i_{s+1} < \ldots < i_t$, $i_{t+1} < \ldots < i_k$, $0 \le \delta_{i_l} \le \alpha_{i_l} - 2$ за $3 \le s \le k$, $1 \le l \le s$, $\beta_1^{i_l} = \alpha_1$, за $s{+}1 \le l \le t$ и $\beta_1^{i_l} = \alpha_1{-}1$, за $t{+}1 \le l \le k$. Имамо да је $\varphi(\frac{n}{d_{i_l}}) - c(j, \frac{n}{d_{i_l}}) = \varphi(\frac{n}{d_{i_l}})$ јер $S_{p_{i_l}}(d_{i_l}) = 0 \le \alpha_{i_l} - \delta_{i_l} - 2$, $2 \le l \le s$ (Лема 3.5 део 1). Штавише, важи да је $\varphi(\frac{n}{d_{i_l}}) - c(j, \frac{n}{d_{i_l}}) = (1 + \frac{1}{p_{i_l}-1})\varphi(\frac{n}{d_{i_l}})$, јер је $N_{i_l} = \frac{p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}}{\mathrm{nzd}(p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}, p_{i_l}^{\alpha_{i_l}-1})} = p_{i_l}, {-1} = \alpha_1 - \beta_1^{i_l} - 1 < \gamma_1 = 0$, $s{+}1 \le l \le t$ (Лема 3.5 део 3) и $\varphi(\frac{n}{d_{i_l}}) - c(j, \frac{n}{d_{i_l}}) = (1 + \frac{1}{p_1-1})\varphi(\frac{n}{d_{i_l}})$ пошто $N_{i_l} = \frac{p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}}{\mathrm{nzd}(p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}, p_{i_l}^{\alpha_{i_l}})} = 1$, $\alpha_1 - \beta_1^{i_l} - 1 = 0 = \gamma_1$, $t+1 \le l \le k$ (Лема 3.5 део 2). Такође видимо да је $N_{k+1} = \prod_{l=2}^{s} p_{i_l}^{\alpha_{i_l} - \beta_{i_l}^{k+1} - \min\{\alpha_{i_l} - \beta_{i_l}^{k+1}, \delta_{i_l}\}}$ и стога $\varphi(\frac{n}{d_{i_l}}) - c(j, \frac{n}{d_{i_l}}) \le (1 + \frac{1}{p_{i_2}-1})\varphi(\frac{n}{d_{i_1}})$ (без губитка општости претпостављамо да је $\delta_{i_2} \ge 1$). Из горње дискусије закључујемо да је

$$\begin{aligned} \lambda_0 - \lambda_j \le 2^{\alpha_1-1} &+ \sum_{l=2}^{s} (p_{i_l}-1)p_{i_l}^{\alpha_{i_l}-1} + \sum_{l=s+1}^{t} p_{i_l}^{\alpha_{i_l}} \\ &+ 2\sum_{l=t+1}^{k} (p_{i_l}-1)p_{i_l}^{\alpha_{i_l}-1} + (1+\frac{1}{p_{i_2}-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}). \end{aligned}$$

Користећи већ доказане услове (ii), (iii) и (iv) имамо да је $\sum_{\substack{l=1 \\ S_2(d_i)=\alpha_1-1}}^{k} (p_l-2)p_l^{\alpha_l-1} \le 2^{\alpha_1-1}$ или еквивалентно $2\sum_{\substack{l=1 \\ S_2(d_i)=\alpha_1-1}}^{k} (p_l - 1)p_l^{\alpha_l-1} \le 2^{\alpha_1-1} + \sum_{\substack{l=1 \\ S_2(d_i)=\alpha_1-1}}^{k} p_l^{\alpha_l}$, па се може закључити да је $2\sum_{l=t+1}^{k} (p_{i_l} - 1)p_{i_l}^{\alpha_{i_l}-1} \le 2^{\alpha_1-1} + \sum_{l=t+1}^{k} p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}$. Према већ доказаном услову (i) имамо $(1 + \frac{1}{p_{i_2}-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) \le p_{i_2}^{\alpha_{i_2}-1}$ и стога $\lambda_0 - \lambda_j \le 2^{\alpha_1} + p_{i_2}^{\alpha_{i_2}} + \sum_{l=3}^{s} (p_{i_l} -$

$1)p_{i_l}^{\alpha_{i_l}-1} + \sum_{l=s+1}^{k} p_{i_l}^{\alpha_{i_l}} < \sum_{l=1}^{k} p_l^{\alpha_l}$. Коначно добијамо да $\lambda_0 - \lambda_j$ не може бити спектрални покривач графа, јер не може да превазиђе вредност $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, за j са горњом канонском факторизацијом.

$\square$

У следећем тврђењу карактеришемо све $\mathrm{G}_n(D)$ који имају спектрални покривач једнак minspread(n) тако да $D = \{\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}}, d_{k+1}\}$. Наиме, овај проблем се може посматрати као последица претходног тврђења. Заиста, пошто је $\beta_1^1 = 0$, $\beta_1^i = \alpha_1$, $2 \le i \le k$ постоје тачно две вредности за $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^i - 1 \in \{\alpha_1 - 1, \alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1\}$ за које $\lambda_0 - \lambda_j$ може потенцијално да постигне $s(\mathrm{G}_n(D))$. Дакле, ако изузмемо разматрање горњег доказа за случај $\gamma_1 = 0$, може се закључити да је $s(\mathrm{G}_n(D))$ једнак minspread(n) ако и само ако су услови из случаја 1 и другог дела случаја 2.2 задовољени и то даје услов (i) леме.

Последица 3.2. *Нека је n природан број такав да је $n \neq 2\cdot 3\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$. Тада спектрални покривач графа $\mathrm{G}_n(D)$, где је $D = \{\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}}, d_{k+1}\}$, достиже вредност* $\mathrm{minspread}(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *ако и само ако за сваки p_i, $1 \le i \le k$, важи*

$$(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+1}}) \le p_i^{\alpha_i - 1},$$

тако да је $S_{p_i}(d_{k+1}) \le \alpha_i - 1$.

У следећем тврђењу уопштавамо горњи закључак на спектрални покривач графова $\mathrm{G}_n(D)$ таквих да је $D = D' \cup D''$, $D' = \{\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}}\}$ и $D'' = \{d_{k+1}, \ldots, d_t\}$.

Лема 3.9. *Нека је n природан број такав да је $n \neq 2\cdot 3\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$. Тада $s(\mathrm{G}_n(D))$ за $D = \{\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}}, d_{k+1}, \ldots, d_t\}$ достиже* $\mathrm{minspread}(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *ако и само ако за сваки p_i, $1 \le i \le k$ и сваки d_j такав да је $S_{p_i}(d_j) \le \alpha_i - 1$, $k+1 \le j \le t$, што важи*

$$(1 + \frac{1}{p_i - 1}) \sum_{\substack{l=k+1 \\ S_{p_i}(d_l) = S_{p_i}(d_j)}}^{t} \varphi(\frac{n}{d_l}) + \sum_{\substack{l=k+1 \\ S_{p_i}(d_l) < S_{p_i}(d_j)}}^{t} \varphi(\frac{n}{d_l}) \le p_i^{\alpha_i - 1}. \tag{3.21}$$

Доказ. За $t = k+1$ директно примењујемо Последицу 3.2.

Претпоставимо да је $t \ge k+2$ и $s(\mathrm{G}_n(D))$ једнако minspread(n). Означимо са $d_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$, $1 \le i \le k$, и $\beta_1^i = S_{p_1}(d_i)$, $1 \le i \le t$. Како је

$0 = \beta_1^1 < \beta_1^2 = \ldots = \beta_1^k = \alpha_1$, $\lambda_0 - \lambda_j$ може потенцијално достићи $s(\mathrm{G}_n(D))$ за вредности $\gamma_1 \in \{\alpha_1 - 1, \alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1, \ldots, \alpha_1 - \beta_1^t - 1\}$.

Случај 1. $\gamma_1 = \alpha_1 - 1$.

Користећи (3.18) и чињеницу да је $S_{p_1}(d_{k+s}) \geq 1$ имамо $\alpha_1 - \beta_1^{k+s} - 1 < \alpha_1 - 1 = \gamma_1$, $1 \leq s \leq t-k$, и $\gamma_1 = \alpha_1 - 1 > \alpha_1 - \beta_1^i - 1 = -1$, $2 \leq i \leq k$. Зато можемо писати

$$\lambda_0 - \lambda_j \leq (1 + \frac{1}{p_1 - 1})\varphi(\frac{n}{d_1}) \;+\; \sum_{s=1}^{t-k}(1 + \frac{1}{f(N_{k+s}) - 1})\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})$$

$$+ \;\sum_{i=2}^{k}(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_i}). \tag{3.22}$$

Најпре, уочимо да $\varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i})$ достиже вредност $(1 + \frac{1}{p_i - 1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, за свако $2 \leq i \leq k$, ако и само ако је $j_1 = p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$ (на основу Леме 3.5 део 3 и чињенице да је $N_i = \frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(j_0, p_i^{\alpha_i})} = p_i$). Такође примећујемо да је $N_1 = \frac{\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}}{\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\mathrm{nzd}(1, j_1)} = 1$ и $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^1 - 1 = \alpha_1 - 1$ и стога $\varphi(\frac{n}{d_1}) - c(j, \frac{n}{d_1})$ достиже вредност $(1 + \frac{1}{p_1 - 1})\varphi(\frac{n}{d_1})$, према Леми 3.5 део 2. Међутим, како је $\gamma_1 = \alpha_1 - 1$ и зато $j = p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$, користећи $p_1 \cdots p_k \mid d_{k+s}$, имамо $\frac{n}{d_{k+s}} \mid j$ и најзад $\varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s}}) = 0$, $1 \leq s \leq t-k$, (на основу (3.19)). Отуда смо показали да је $\lambda_0 - \lambda_j = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

Случај 1.1. $j = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1} - 1} p_i^{\delta_i} p_{i+1}^{\alpha_{i+1} - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$ и $\delta_i \neq \alpha_i - 1$, за неко $2 \leq i \leq k$.

Ако је $\delta_i = \alpha_i$ онда $\frac{n}{d_i} = p_i^{\alpha_i} = p_i^{\delta_i} \mid j$ што имплицира $\varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i}) = 0$, према (3.19). Ако је $\delta_i \leq \alpha_i - 2$ и стога $S_{p_i}(d_i) = 0 \leq \alpha_i - \delta_i - 2$, на основу Леме 3.5 део 1, имамо да је $\varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i}) = \varphi(\frac{n}{d_i})$. Последњим доказујемо да у овом случају $\lambda_0 - \lambda_j$ достиже максималну вредност ако је $\delta_i \leq \alpha_i - 2$. Такође, $\varphi(\frac{n}{d_l}) - c(j, \frac{n}{d_l})$ достиже вредност $(1 + \frac{1}{p_l - 1})\varphi(\frac{n}{d_l})$, за сваки $1 \leq l \leq k$, $l \neq i$ (према Леми 3.5 део 3 и чињеници да је $N_l = \frac{p_l^{\alpha_l}}{\mathrm{nzd}(j_1, p_l^{\alpha_l})} = p_l$).

С друге стране, за $1 \leq s \leq t-k$, пошто $p_1 \cdots p_k \mid d_{k+s}$ имамо да $S_{p_l}(\frac{n_1}{d_0^{k+s}}) \leq S_{p_l}(j_1)$, што даље имплицира да $p_l \nmid N_{k+s}$, јер $N_{k+s} = \frac{n_1}{d_0^{k+s}\mathrm{nzd}(\frac{n_1}{d_0^{k+s}}, j_1)}$, за $1 \leq l \leq k$ и $l \neq i$. Штавише, пошто је $N_{k+s} = p_i^{\alpha_i - \beta_i^{k+s} - \min\{\alpha_i - \beta_i^{k+s}, \delta_i\}}$ само када важи $\delta_i \in \{\alpha_i - \beta_i^{k+1} - 1, \ldots, \alpha_i - \beta_i^t - 1\}$, онда $\lambda_0 - \lambda_j$ може потенцијално достићи $s(\mathrm{G}_n(D))$, где $\beta_i^l = S_{p_i}(d_l)$, $1 \leq l \leq t$. Заиста, само у случају за $\delta_i = \alpha_i - \beta_i^{k+s_0} - 1$, за неки $1 \leq s_0 \leq t-k$,

N_{k+s_0} може бити једнако p_i и стога $\varphi(\frac{n}{d_{k+s_0}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s_0}})$ може постићи вредност $(1+\frac{1}{p_i})\varphi(\frac{n}{d_{k+s_0}})$ (према Леми 3.5 део 3, јер $1 = \alpha_1 - \gamma_1 \leq \beta_1^{k+s_0}$). Приметимо да у овом случају, мора бити $\beta_i^{k+s_0} \leq \alpha_i - 1$ због $\delta_i \geq 0$.

За делиоце d_{k+s} такве да $\beta_i^{k+s} > \beta_i^{k+s_0}$, за $1 \leq s \leq t-k$, може се уочити да је $\alpha_i - \beta_i^{k+s} - 1 < \alpha_i - \beta_i^{k+s_0} - 1 = \delta_i$ тј. $\alpha_i - \beta_i^{k+s} \leq \delta_i$ што даље имплицира да је $\frac{n}{d_{k+s}} \mid j$ и стога $\varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s}}) = 0$, према (3.19). За делиоце d_{k+s} такве да $\beta_i^{k+s_0} > \beta_i^{k+s}$, за $1 \leq s \leq t-k$, важи $\alpha_i - \beta_i^{k+s} - 1 > \alpha_i - \beta_i^{k+s_0} - 1 = \delta_i$ одакле добијамо да је $\varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s}}) = \varphi(\frac{n}{d_{k+s}})$, према Леми 3.5 део 1, за $1 \leq s_0 \leq t-k$

Коначно, из горње дискусије, лако се види да $\lambda_0 - \lambda_j$ достиже следећу максималну вредност за неки изабрани $1 \leq s_0 \leq t-k$

$$\lambda_0 - \lambda_j = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{k} p_l^{\alpha_l} + \varphi(p_i^{\alpha_i}) + (1 + \frac{1}{p_i - 1}) \sum_{\beta_i^{k+s_0} = \beta_i^{k+s}} \varphi(\frac{n}{d_{k+s_0}}) + \sum_{\beta_i^{k+s_0} > \beta_i^{k+s}} \varphi(\frac{n}{d_{k+s}})$$

и пошто је $s(\mathrm{G}_n(D))$ једнако $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ добијамо да је $\lambda_0 - \lambda_j \leq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Сада, разматрајући ову неједнакост, након кратког рачуна добијамо

$$(1 + \frac{1}{p_i - 1}) \sum_{\beta_i^{k+s_0} = \beta_i^{k+s}} \varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) + \sum_{\beta_i^{k+s_0} > \beta_i^{k+s}} \varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) \leq p_i^{\alpha_i - 1}, \tag{3.23}$$

за $2 \leq i \leq k$.

Случај 1.2. Показујемо неједнакост $\lambda_0 - \lambda_j \leq \mathrm{minspread}(n)$ за $j = p_{i_1}^{\delta_{i_1}} \cdots p_{i_l}^{\delta_{i_l}} p_{i_{l+1}}^{\alpha_{i_{l+1}}-1} \cdots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}-1}$ и неко $2 \leq l \leq k$, где $0 \leq \delta_{i_m} \leq \alpha_{i_m} - 2$, $1 \leq m \leq l$, $i_1 < \ldots < i_l$, $i_{l+1} < \ldots < i_k$ и $i_{l+1} = 1$.

Можемо закључити да је $\varphi(\frac{n}{d_{i_m}}) - c(j, \frac{n}{d_{i_m}}) = \varphi(\frac{n}{d_{i_m}})$ за $1 \leq m \leq l$ (Лема 3.5 део 1), и $\varphi(\frac{n}{d_{i_m}}) - c(j, \frac{n}{d_{i_m}}) = (1 + \frac{1}{p_{i_m}-1})\varphi(\frac{n}{d_{i_m}})$, за сваки $l+1 \leq m \leq k$ (Лема 3.5 део 3). Штавише, за произвољни делилац d_{k+s}, где је $1 \leq s \leq t-k$, према дефиницији $t_{\frac{n}{d_{k+s}},j}$ добијамо да $t_{\frac{n}{d_{k+s}},j} = \prod_{m=1}^{l} p_{i_m}^{\alpha_{i_m} - \beta_{i_m}^{k+s} - \min(\alpha_{i_m} - \beta_{i_m}^{k+s}, \delta_{i_m})}$. Ово имплицира да ако постоји $1 \leq m \leq l$ тако да је $\delta_{i_m} = \alpha_{i_m} - \beta_{i_m}^{k+s} - 1$ онда важи да је $p_{i_m} \mid t_{\frac{n}{d_{k+s}},j}$ и стога $\varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s}}) \leq (1 + \frac{1}{p_{i_m}-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})$. Ако постоји $1 \leq m \leq l$ тако да је $\delta_{i_m} < \alpha_{i_m} - \beta_{i_m}^{k+s} - 1$, онда је $p_{i_m}^2 \mid t_{\frac{n}{d_{k+s}},j}$ а тиме и $\varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s}}) = \varphi(\frac{n}{d_{k+s}})$. Коначно, ако је $\delta_{i_m} > \alpha_{i_m} - \beta_{i_m}^{k+s} - 1$, за сваки $1 \leq m \leq l$, имамо да је $t_{\frac{n}{d_{k+s}},j} = 1$ и стога $\varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s}}) = 0$. То значи да $\varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s}})$ достиже максималну вредност ако за сваки $1 \leq s \leq t-k$ постоји $1 \leq m \leq l$ такав да је $\delta_{i_m} = \alpha_{i_m} - \beta_{i_m}^{k+s} - 1$.

Дакле, за d_{k+1} постоји $1 \leq m_1 \leq l$ тако да је $\delta_{i_{m_1}} = \alpha_{i_{m_1}} - \beta_{i_{m_1}}^{k+1} - 1$. Нека је D_1 подскуп делилаца $d_{k+1}, \ldots, d_t$ тако да је $\beta_{i_{m_1}}^{k+s} \leq \beta_{i_{m_1}}^{k+1}$, за $1 \leq s \leq t-k$ тј. $D_1 = \{d_{k+s} \mid 1 \leq s \leq t-k,\ \beta_{i_{m_1}}^{k+s} \leq \beta_{i_{m_1}}^{k+1}\}$. Слично, можемо дефинисати D_r, $2 \leq r \leq l$, тако да је $D_r = \{d_{k+s} \notin D_1 \cup \ldots \cup D_{r-1} \mid 1 \leq s \leq t-k,\ \beta_{i_{m_r}}^{k+s} \leq \beta_{i_{m_r}}^{k+r}\}$, где m_r означава индекс такав да је $\delta_{i_{m_r}} = \alpha_{i_{m_r}} - \beta_{i_{m_r}}^{k+r} - 1$. Претпоставимо да су $D_1, \ldots, D_f$ непразни и $D_{f+1} = \ldots = D_l = \emptyset$, за неки $1 \leq f \leq l$. По дефиницији D_r и m_r, за $1 \leq r \leq f$, можемо лако приметити да су скупови D_r по паровима дисјунктни, $D_1 \cup \ldots \cup D_f = \{d_{k+1}, \ldots, d_t\}$ и да су индекси m_r по паровима различити.

На основу претходне дискусије, користећи (3.23), за произвољно D_r, $1 \leq r \leq f$, имамо

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{s=1\\ d_{k+s}\in D_r}}^{t-k} \varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) \ &- \ c(j, \frac{n}{d_{k+s}}) \leq \\ &\leq \ (1+\frac{1}{p_{i_{m_r}}-1}) \sum_{\beta_{i_{m_r}}^{k+r}=\beta_{i_{m_r}}^{k+s}} \varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) + \sum_{\beta_{i_{m_r}}^{k+r}>\beta_{i_{m_r}}^{k+s}} \varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) \\ &\leq \ p_{i_{m_r}}^{\alpha_{i_{m_r}}-1},\end{aligned}$$

и због тога даље добијамо да је $\sum_{s=1}^{t-k} \varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s}}) \leq \sum_{r=1}^{f} p_{i_{m_r}}^{\alpha_{i_{m_r}}-1} \leq \sum_{m=1}^{l} p_{i_m}^{\alpha_{i_m}-1}$. Коначно закључујемо

$$\lambda_0 - \lambda_j \leq \sum_{m=1}^{l} \varphi(\frac{n}{d_{i_m}}) + \sum_{m=l+1}^{k} (1+\frac{1}{p_{i_m}-1}) \varphi(\frac{n}{d_{i_m}}) + \sum_{m=1}^{l} p_{i_m}^{\alpha_{i_m}-1} = \sum_{m=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

Кроз случајеве 1.1. и 1.2. испитали смо све вредности j за које $\lambda_0 - \lambda_j$ може да достигне вредност $\mathrm{minspread}(n)$ и доказали да је услов (3.21) за $2 \leq i \leq k$ једини који делиоци морају да задовоље да би спектрални покривач од $\mathrm{G}_n(D)$ досегао вредност $\mathrm{minspread}(n)$ у случају $p_1^{\alpha_1 - 1} \| j$.

Случај 2. $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^{k+s_0} - 1$, за неко $1 \leq s_0 \leq t-k$.

Како је $\gamma_1 \geq 0$ закључујемо да је $\beta_1^{k+s_0} \leq \alpha_1 - 1$.

Приметимо да важи следећи низ неједнакости $\alpha_1 - \beta_1^1 - 1 = \alpha_1 - 1 > \alpha_1 - \beta_1^{k+s} - 1 > \alpha_1 - \beta_1^{k+s_0} - 1 = \gamma_1$, за $\beta_1^{k+s_0} > \beta_1^{k+s}$, $1 \leq s \leq t-k$. Штавише, слично имамо $\alpha_1 - \beta_1^{k+s_0} - 1 = \gamma_1 > \alpha_1 - \beta_1^{k+s} - 1 \geq \alpha_1 - \beta_1^i - 1 = -1$, за $\beta_1^{k+s_0} < \beta_1^{k+s}$, $1 \leq s \leq t-k$ и $2 \leq i \leq k$. Користећи (3.18), добијамо

$$\lambda_0-\lambda_j \leq \varphi(\frac{n}{d_1})+\sum_{\substack{s=1\\ \beta_1^{k+s_0}>\beta_1^{k+s}}}^{t-k}\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})+(1+\frac{1}{p_1-1})\sum_{\substack{s=1\\ \beta_1^{k+s_0}=\beta_1^{k+s}}}^{t-k}\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})$$

$$+\sum_{\substack{s=1\\ \beta_1^{k+s}>\beta_1^{k+s_0}}}^{t-k}(1+\frac{1}{f(N_{k+s})-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})+\sum_{i=2}^{k}(1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i}). \tag{3.24}$$

Како је $\varphi(\frac{n}{d_i})-c(j,\frac{n}{d_i})$ достиже вредност $(1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, за сваки $2\leq i\leq k$ у случају када је $p_i^{\alpha_i-1}\|j$ тј, $j=p_1^{\alpha_1-\beta_1^{k+s_0}-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}$ и $\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})-c(j,\frac{n}{d_{k+s}})=0$, за d_{k+s} тако да је $\beta_1^{k+s}>\beta_1^{k+s_0}$ ($\alpha_1-\beta_1^{k+s}\leq\alpha_1-\beta_1^{k+s_0}-1$, $p_1\cdots p_k\mid d_{k+s}$ и $\frac{n}{d_{k+s}}\mid j$, према (3.19)), закључујемо да $\lambda_0-\lambda_j$ достиже следећу вредност за неки изабрани $1\leq s_0\leq t-k$, тј.

$$\lambda_0-\lambda_j=(p_1-1)p_1^{\alpha_1-1}+\sum_{\substack{s=1\\ \beta_1^{k+s_0}>\beta_1^{k+s}}}^{t-k}\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})$$
$$+(1+\frac{1}{p_1-1})\sum_{\substack{s=1\\ \beta_1^{k+s_0}=\beta_1^{k+s}}}^{t-k}\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})+\sum_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i}.$$

Пошто је спектрални покривач графа $\mathrm{G}_n(D)$ једнак $\sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ добијамо да је $\lambda_0-\lambda_j\leq\sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, па из ове неједнакосто, после краћег рачуна, добијамо неједнакост (3.21) за $i=1$.

Штавише, можемо показати да је $\lambda_0-\lambda_j\leq\mathrm{minspread}(n)$ за $j=p_{i_1}^{\delta_{i_1}}\cdots p_{i_l}^{\delta_{i_l}}p_{i_{l+1}}^{\alpha_{i_{l+1}}-1}\cdots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}-1}$ и неки $2\leq l\leq k$, где је $0\leq\delta_{i_m}\leq\alpha_{i_m}-2$, $1\leq m\leq l$, $i_1<\ldots<i_l$, $i_{l+1}<\ldots<i_k$, $i_1=1$ и $\delta_{i_1}=\alpha_{i_1}-\beta_{i_1}^{k+s_0}-1$, па понављањем целог доказа из случаја 1.2., на тај начин добијамо да је неједнакост (3.21) једини услов тврђења.

□

Користећи Лему 3.9 окарактерисаћемо све графове реда $n=2\cdot3\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$ који имају минимални спектрални покривач $\sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$.

Теорема 3.20. *Нека је n природан број такав да је $n=2\cdot3\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$. Тада је $s(\mathrm{G}_n(D))$, за $D=\{\frac{n}{6},\frac{n}{p_3^{\alpha_3}},\ldots,\frac{n}{p_k^{\alpha_k}},d_{k+1},\ldots,d_t\}$ једнак вредности* minspread(n) *ако и само ако за сваки* p_i, $1 \le i \le k$, *и сваки* d_j *такав да је* $S_{p_i}(d_j) \le \alpha_i - 1$, $k+1 \le j \le t$, *једнак*

$$(3.25)\qquad (1+\frac{1}{p_i-1})\sum_{\substack{l=k+1\\ S_{p_i}(d_l)=S_{p_i}(d_j)}}^{t}\varphi(\frac{n}{d_l}) + \sum_{\substack{l=k+1\\ S_{p_i}(d_l)<S_{p_i}(d_j)}}^{t}\varphi(\frac{n}{d_l}) \le p_i^{\alpha_i-1}.$$

Доказ. Најпре, успоставимо одређене релације између спектара $\mathrm{G}_n(\frac{n}{6},\frac{n}{p_3^{\alpha_3}},\ldots,\frac{n}{p_k^{\alpha_k}},d_{k+1},\ldots,d_t)$ и $\mathrm{G}_{n_1}(\frac{n_1}{p_3^{\alpha_3}},\ldots,\frac{n_1}{p_k^{\alpha_k}},d_0^{k+1},\ldots,d_0^t)$, редом, где је $n_1=\frac{n}{6}$, $d_i=\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$, $3\le i\le k$ и $d_0^i=\frac{d_i}{6}$, $3\le i\le t$. За $0\le j\le n-1$ дефинишимо j_0 као остатак дељења j са n_1, тј. $j=n_1q+j_0$, где је $0\le j_0\le n_1-1$.

За $3\le i\le k$, како важи $\frac{n}{d_i}=\frac{n_1}{d_0^i}$ и $\mathrm{nzd}(p_i^{\alpha_i},n_1q+j_0)=\mathrm{nzd}(p_i^{\alpha_i},j_0)$, имамо $t_{\frac{n}{d_i},j}=t_{p_i^{\alpha_i},j}=\frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(p_i^{\alpha_i},j)}=\frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(p_i^{\alpha_i},n_1k+j_0)}=\frac{p_i^{\alpha_i}}{\mathrm{nzd}(p_i^{\alpha_i},j_0)}=t_{p_i^{\alpha_i},j_0}=t_{\frac{n_1}{d_0^i},j_0}$ и отуда $c(j,\frac{n}{d_i})=c(j_0,\frac{n_1}{d_0^i})$. Коначно, следи да је $\varphi(\frac{n}{d_i})-c(j,\frac{n}{d_i})=\varphi(\frac{n_1}{d_0^i})-c(j_0,\frac{n_1}{d_0^i})$.

Слично, за $k+1\le i\le t$, пошто је $\frac{n}{d_i}=\frac{n_1}{d_0^i}$ и $\mathrm{nzd}(\frac{n}{d_i},j)=\mathrm{nzd}(\frac{n_1}{d_0^i},n_1q+j_0)=\mathrm{nzd}(\frac{n_1}{d_0^i},j_0)$, закључујемо да $t_{\frac{n}{d_i},j}=\frac{n}{d_i\mathrm{nzd}(\frac{n}{d_i},j)}=\frac{n_1}{d_0^i\mathrm{nzd}(\frac{n_1}{d_0^i},j)}=\frac{n_1}{d_0^i\mathrm{nzd}(\frac{n_1}{d_0^i},j_0)}$ $=t_{\frac{n_1}{d_0^i},j_0}$ и зато $\varphi(\frac{n}{d_i})-c(j,\frac{n}{d_i})=\varphi(\frac{n_1}{d_0^i})-c(j_0,\frac{n_1}{d_0^i})$.

Коначно, за сваки $1\le j\le n-1$, имамо да је

$$\begin{aligned}\lambda_0-\lambda_j &= \varphi(6)+\sum_{i=3}^{t}\varphi(\frac{n}{d_i})-c(j,6)-\sum_{i=3}^{t}c(j,\frac{n}{d_i}) = \\ &\varphi(6)-c(j,6)+\sum_{i=3}^{t}\varphi(\frac{n_1}{d_0^i})-\sum_{i=3}^{t}c(j_0,\frac{n_1}{d_0^i})=\varphi(6)-c(j,6)+\mu_0-\mu_{j_0},\end{aligned}$$

где су λ_j и μ_{j_0} сопствене вредности графова $\mathrm{G}_n(\frac{n}{6},\frac{n}{p_3^{\alpha_3}},\ldots,\frac{n}{p_k^{\alpha_k}},d_{k+1},\ldots,d_t)$ и $\mathrm{G}_{n_1}(\frac{n_1}{p_3^{\alpha_3}},\ldots,\frac{n_1}{p_k^{\alpha_k}},d_0^{k+1},\ldots,d_0^t)$, редом, за $0\le j\le n-1$ и $0\le j_0\le n_1-1$.

Претпоставимо да је $s(\mathrm{G}_n(D))$ једнак minspread$(n)=\sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}-1$ и да се постиже за неки $1\le j\le n-1$ такав да је $\lambda_0-\lambda_j=$ minspread(n). Из (3.17) видимо да $2\nmid j$ и $3\mid j$ и отуда $c(j,6)=-\varphi(6)=-2$. Штавише, добијамо $\mu_0-\mu_{j_0}=\lambda_0-\lambda_j-4=\sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}-5=\sum_{i=3}^k p_i^{\alpha_i}$. Коначно, како спектрални покривач од $\mathrm{G}_{n_1}(\frac{n_1}{p_3^{\alpha_3}},\ldots,\frac{n_1}{p_k^{\alpha_k}},d_0^{k+1},\ldots,d_0^t)$ достиже вредност minspread(n_1), на основу Леме 3.9, важи неједнакост (3.25).

Слично, ако неједнакост (3.25) важи, онда спектрални покривач за $\mathrm{G}_{n_1}(\frac{n_1}{p_3^{\alpha_3}},\ldots,\frac{n_1}{p_k^{\alpha_k}},d_0^{k+1},\ldots,d_0^t)$ достиже вредност minspread(n_1), према Леми 3.9. Ово имплицира да је $\mu_0-\mu_{j_0}=\sum_{i=3}^k p_i^{\alpha_i}$, за неки $1\le j_0\le n_1-$

1. Сада, пошто је $\lambda_0 - \lambda_j = \varphi(6) - c(j,6) + \sum_{i=3}^{k} p_i^{\alpha_i}$, $\lambda_0 - \lambda_j$ може да узме максималну вредност ако и само ако је $c(j,6) = -\varphi(6)$. Ово је тачно за j такво да $2 \nmid j$ и $3 \mid j$. После замене добијамо $\lambda_0 - \lambda_j - 2\varphi(6) = \sum_{i=3}^{k} p_i^{\alpha_i}$ и коначно $\lambda_0 - \lambda_j = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} - 1$.

$\square$

Теорема 3.21. *Нека је n природан број такав да $n \neq 2 \cdot 3 \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Тада $s(\mathrm{G}_n(D))$, за $D = \{d_1, \ldots, d_k, d_{k+1}, \ldots, d_t\}$, где је $(d_1, \ldots, d_k) \in \prod_{i=1}^{k} \{\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}, \frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}\}$ и $(d_1, \ldots, d_k) \neq (\frac{n}{p_1}, \ldots, \frac{n}{p_k})$, достиже вредност* $\mathrm{minspread}(n)$ $= \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *ако и само ако*

i) $(1 + \frac{1}{p_i - 1}) \sum_{\substack{l=k+1 \\ S_{p_i}(d_l) = S_{p_i}(d_j)}}^{t} \varphi(\frac{n}{d_l}) + \sum_{\substack{l=k+1 \\ S_{p_i}(d_l) < S_{p_i}(d_j)}}^{t} \varphi(\frac{n}{d_l}) \leq p_i^{\alpha_i - 1}$, *за сваки p_i, $1 \leq i \leq k$, сваки d_j тако да је $S_{p_i}(d_j) \leq \alpha_i - 1$, $k+1 \leq j \leq t$.*

ii) $\sum_{\substack{i=1 \\ S_2(d_i) = \alpha_1 - 1}}^{k} (p_i - 2) p_i^{\alpha_i - 1} + \sum_{\substack{i=k+1 \\ 1 \leq S_2(d_i) \leq \alpha_1 - 2}}^{t} \varphi(\frac{n}{d_i}) + 2 \sum_{\substack{i=k+1 \\ S_2(d_i) = \alpha_1 - 1}}^{t} \varphi(\frac{n}{d_i}) \leq 2^{\alpha_1 - 1}$

Доказ. За $t = k+1$ директно примењујемо Лему 3.8.

Претпоставимо да је $t \geq k+2$ и $s(\mathrm{G}_n(D)) = \mathrm{minspread}(n)$. Стављајући $\beta_1^i = S_{p_1}(d_i)$, $1 \leq i \leq k+1$, имамо да је $\beta_1^1 = 0$, $\beta_1^2, \ldots, \beta_1^k \in \{\alpha_1 - 1, \alpha_1\}$ и $\beta_1^{k+1}, \ldots, \beta_1^{k+s} \geq 1$, пошто је $d_i \in \{\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}, \frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}\}$, $1 \leq i \leq k$ и $p_1 \cdots p_k \mid d_{k+1}$. Како постоји бар један $d_i = \frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}$, $2 \leq i \leq k$, очигледно је да n мора бити паран. Штавише, пошто је $\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}$ непаран онда су $d_2, \ldots, d_k$ парни (због (3.27) и (3.28)), па је зато је $\frac{n}{2p_i^{\alpha_i}}$ паран, што даље имплицира да је $\alpha_1 \geq 2$.

Како је $\beta_1^1 = 0$, $\beta_1^2, \ldots, \beta_1^k \in \{\alpha_1 - 1, \alpha_1\}$, то $\lambda_0 - \lambda_j$ може потенцијално да досегне $s(\mathrm{G}_n(D))$ за вредности $\gamma_1 \in \{\alpha_1 - 1, 0, \alpha_1 - \beta_1^{k+1} - 1, \ldots, \alpha_1 - \beta_1^t - 1\}$.

Случај 1. $\gamma_1 = \alpha_1 - 1$.

С обзиром да је $\gamma_1 > \alpha_1 - \beta_1^i - 1 \in \{0, -1\}$, за $2 \leq i \leq k$, $\alpha_1 - \beta_1^{k+s} - 1 < \alpha_1 - 1 = \gamma_1$, $1 \leq s \leq t-k$ и $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^1 - 1$ видимо да важи неједнакост (3.22), те зато можемо поновити цео доказ Леме 3.9 случај 1 и добити део *i*) тврђења.

Случај 2. $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1^{k+s_0} - 1$, за неко $1 \leq s_0 \leq t-k$.

Претпоставимо да је $\gamma_1 > 0$. Видимо да је $\beta_1^{k+s_0} \leq \alpha_1 - 2$. Приметимо да важи следећи низ неједнакости $\alpha_1 - \beta_1^1 - 1 = \alpha_1 - 1 > \alpha_1 - \beta_1^{k+s} - 1 > \alpha_1 - \beta_1^{k+s_0} - 1 = \gamma_1$, за $\beta_1^{k+s_0} > \beta_1^{k+s}$, $1 \leq s \leq t-k$. Штавише, слично имамо $\alpha_1 - \beta_1^{k+s_0} - 1 = \gamma_1 > \alpha_1 - \beta_1^{k+s} - 1 \geq \alpha_1 - \beta_1^i - 1 \in \{0, -1\}$, за $\beta_1^{k+s_0} < \beta_1^{k+s}$, $1 \leq s \leq t-k$ и $2 \leq i \leq k$. Коришћењем (3.18), показујемо да важи неједнакост (3.24), па зато можемо поновити цео доказ Леме 3.9 случај 2 и добити ставку i) тврђења за $i=1$ и $S_{p_1}(d_j)\le \alpha_1-2$.

Случај 3. $\gamma_1=0$

Уочимо низ релација $\alpha_1-1=\alpha_1-\beta_1^1-1>\alpha_1-\beta_1^i-1=\gamma_1=0>\alpha_1-\beta_1^j-1$, за i и j такве да је $\beta_1^i=\alpha_1-1$ и $\beta_1^j=\alpha_1$. Штавише, како је $\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})-c(j,\frac{n}{d_{k+s}})=\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})$ ако и само ако $\alpha_1-\beta_1^{k+s}-1>\gamma_1=0$ ($\beta_1^{k+s}\le\alpha_1-2$) и $\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})-c(j,\frac{n}{d_{k+s}})\le(1+\frac{1}{f(N_{k+s})-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})$ ако и само ако $\gamma_1>\alpha_1-\beta_1^{k+s}-1$ ($\beta_1^{k+s}=\alpha_1$), имамо да је

$$\begin{aligned}\lambda_0-\lambda_j &\le \varphi(\frac{n}{d_1})+\sum_{\substack{s=1\\1\le S_2(d_{k+s})\le\alpha_1-2}}^{t-k}\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})+2\sum_{\substack{i=2\\S_2(d_i)=\alpha_1-1}}^{k}\varphi(\frac{n}{d_i})+\\ &\quad 2\sum_{\substack{s=1\\S_2(d_{k+s})=\alpha_1-1}}^{t-k}\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})+\sum_{\substack{i=2\\S_2(d_i)=\alpha_1}}^{k}(1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i})+\\ &\quad \sum_{\substack{s=1\\S_2(d_{k+s})=\alpha_1}}^{t-k}(1+\frac{1}{f(N_{k+s})-1})\varphi(\frac{n}{d_{k+s}}).\end{aligned}$$

На исти начин како смо то чинили у случају 2.3. Леме 3.8, за $j=\prod_{i=2\ i:S_2(d_i)=\alpha_1-1}^{k}p_i^{\alpha_i}\prod_{i=2\ i:S_2(d_i)=\alpha_1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}$ закључујемо да је $\varphi(\frac{n}{d_i})-c(j,\frac{n}{d_i})=(1+\frac{1}{p_1-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, где $\beta_1^i=\alpha_1-1$, $2\le i\le k$ и $\varphi(\frac{n}{d_i})-c(j,\frac{n}{d_i})=(1+\frac{1}{p_i-1})\varphi(\frac{n}{d_i})$, где је $\beta_1^i=\alpha_1$, $2\le i\le k$. Са друге стране, како је $p_1\cdots p_k\mid d_{k+s}$, за $1\le s\le t-k$ имамо $\frac{n}{d_{k+s}}\mid j$, за $\beta_1^{k+s}=\alpha_1$, па је зато $\varphi(\frac{n}{d_{k+1}})-c(j,\frac{n}{d_{k+1}})=0$. Ово значи да за такво j добијамо

$$\begin{aligned}\lambda_0-\lambda_j=2^{\alpha_1-1} &+\sum_{\substack{s=1\\1\le S_2(d_{k+s})\le\alpha_1-2}}^{t-k}\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})+2\sum_{\substack{i=2\\S_2(d_i)=\alpha_1-1}}^{k}(p_i-1)p_i^{\alpha_i-1}+\\ &2\sum_{\substack{s=1\\S_2(d_{k+s})=\alpha_1-1}}^{t-k}\varphi(\frac{n}{d_{k+s}})+\sum_{\substack{i=2\\S_2(d_i)=\alpha_1}}^{k}p_i^{\alpha_i}.\end{aligned}$$

Пошто је $s(\mathrm{G}_n(D))=\sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ добијамо да је $\lambda_0-\lambda_j\le\sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, па након краћег рачуна добијамо ставку ii) тврђења. Поменимо да услов i) тврђења за $i=1$ и $S_{p_1}(d_j)=\alpha_1-1$ следи из ii).

Нека је $j=p_{i_2}^{\delta_{i_2}}\cdots p_{i_s}^{\delta_{i_s}}p_{i_{s+1}}^{\alpha_{i_{s+1}}-1}\cdots p_{i_t}^{\alpha_{i_t}-1}p_{i_{t+1}}^{\alpha_{i_{t+1}}}\cdots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$, где је $i_1=1$, $i_2<\ldots<i_s$, $i_{s+1}<\ldots<i_t$, $i_{t+1}<\ldots<i_k$, $0\le\delta_{i_l}\le\alpha_{i_l}-2$ за $1\le l\le s$,

$\beta_1^{i_l} = \alpha_1$, за $s+1 \le l \le t$ и $\beta_1^{i_l} = \alpha_1 - 1$, за $t+1 \le l \le k$. На исти начин како смо спровели доказ у случају 2.3. Леме 3.8 то можемо и овде учинити и закључити да је

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i}) = 2^{\alpha_1 - 1} + \sum_{l=2}^{s} (p_{i_l} - 1) p_{i_l}^{\alpha_{i_l} - 1} + \sum_{l=s+1}^{t} p_{i_l}^{\alpha_{i_l}} + 2 \sum_{l=t+1}^{k} (p_{i_l} - 1) p_{i_l}^{\alpha_{i_l} - 1}.$$

Како услов $i)$ тврђења важи, слично случају 1.2 Леме 3.9 закључујемо да $\sum_{s=1}^{t-k} \varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s}}) \le \sum_{l=2}^{s} p_{i_l}^{\alpha_{i_l} - 1}$. Штавише, пошто услов $ii)$ тврђења важи, добијамо $2 \sum_{l=t+1}^{k} (p_{i_l} - 1) p_{i_l}^{\alpha_{i_l} - 1} \le 2^{\alpha_1 - 1} + \sum_{l=t+1}^{k} p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}$, па зато $\sum_{i=1}^{k} \varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i}) = 2^{\alpha_1} + \sum_{l=2}^{s} (p_{i_l} - 1) p_{i_l}^{\alpha_{i_l} - 1} + \sum_{l=s+1}^{k} p_{i_l}^{\alpha_{i_l}}$. Коначно, на основу претходне дискусије добијамо

$$\lambda_0 - \lambda_j = \sum_{i=1}^{k} \varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i}) + \sum_{s=1}^{t-k} \varphi(\frac{n}{d_{k+s}}) - c(j, \frac{n}{d_{k+s}}) \le \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

Дакле, $\lambda_0 - \lambda_j$ не може бити веће од $\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ за дато j са горе наведеном канонском факторизацијом.

$\square$

Сада настављамо са израчунавањем максималног спектралног покривача графова $\mathrm{G}_n(D)$ датог реда n, тј.

$$\mathrm{maxspread}(n) = \max\{s(\mathrm{G}_n(D)) \mid D \subseteq D_n\}$$

и карактеризацијом графова чији спектрални покривач достиже ову вредност.

Теорема 3.22. *За природан број $n > 1$, важи да је $\mathrm{maxspread}(n) = n$. Спектрални покривач повезаног графа $\mathrm{G}_n(D)$ достиже $\mathrm{maxspread}(n) = n$ ако и само ако $\mathrm{nzd}(\{d \mid d \in D_n \setminus D\}) > 1$.*

Доказ. За произвољни граф $\mathrm{G}_n(D)$ можемо тривијално видети да $\lambda_0 - \lambda_j \le \lambda_0 = \sum_{d \in D} \varphi(\frac{n}{d}) \le \sum_{d \in D_n} \varphi(\frac{n}{d}) = n$.

Сада налазимо све скупове делилаца D такве да је $s(\mathrm{G}_n(D)) = n$, за дати ред n. Прво, доказујемо следеће тврђење. Нека је $\mathrm{G}_n(D)$ граф такав да је $D = \{d_1, \ldots, d_t\}$ и $\mathrm{nzd}(d_1, \ldots, d_t) = d$. Онда је $d > 1$ ако и само ако је $\lambda_0 = \lambda_{\frac{n}{d}}$.

Нека је $\mathrm{G}_n(D)$ граф такав да важи $\mathrm{nzd}(d_1, \ldots, d_t) = d > 1$, где је $D = \{d_1, \ldots, d_t\}$. За $j = \frac{n}{d}$, имамо да је $\frac{n}{d_i} \mid \frac{n}{d}$, $t_{\frac{n}{d_i}, j} = \frac{n}{d_i \mathrm{nzd}(\frac{n}{d_i}, j)} = 1$, па је зато $c(j, \frac{n}{d_i}) = \varphi(\frac{n}{d_i})$, одакле даље следи $\lambda_{\frac{n}{d}} = \sum_{i=1}^{t} \varphi(\frac{n}{d_i}) = \lambda_0$. Са друге стране, ако је $\lambda_0 = \lambda_j$ онда $\sum_{i=1}^{t} \varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i}) = 0$. Штавише, пошто је сваки сабирак $\varphi(\frac{n}{d_i}) - c(j, \frac{n}{d_i})$ већи или једнак нули, имамо $\varphi(\frac{n}{d_i}) = c(j, \frac{n}{d_i})$, за свако $d_i \in D$. На основу (3.19), претходна једнакост важи ако и само ако $\frac{n}{d_i} \mid j$ за свако $1 \le i \le t$, па је стога $\mathrm{nzs}(\frac{n}{d_1}, \ldots, \frac{n}{d_t}) \mid j$. Са друге стране, ако је $\mathrm{nzd}(d_1, \ldots, d_t) = 1$ онда $\mathrm{nzs}(\frac{n}{d_1}, \ldots, \frac{n}{d_t}) = n \mid j$, што је контрадикција пошто индекс j може узети вредности у опсегу $1 \le j \le n-1$. Зато је $\mathrm{nzd}(d_1, \ldots, d_t) > 1$.

Нека су сада $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ и $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ сопствене вредности од $\mathrm{G}_n(D)$ и $\mathrm{G}_n(D_n \setminus D)$, редом. Како је $\mathrm{G}_n(D_n \setminus D)$ комплемент од $\mathrm{G}_n(D)$ добро је познато да важи $\mu_0 = n - 1 - \lambda_0$ и $\mu_i = -1 - \lambda_i$, за $1 \le i \le n-1$. На основу претходно доказаног тврђења, за $\mathrm{G}_n(D_n \setminus D)$ добијамо $d = \mathrm{nzd}\{d \mid d \in D_n \setminus D\} > 1$ ако и само ако $\mu_0 = \mu_{\frac{n}{d}}$. Ово је еквивалентно са $n - 1 - \lambda_0 = -1 - \lambda_{\frac{n}{d}}$, што имплицира да је $\lambda_0 - \lambda_{\frac{n}{d}} = n \le s(\mathrm{G}_n(D)) \le \mathrm{maxspread}(n) = n$. Последња једнакост је очигледно еквивалентна са $s(\mathrm{G}_n(D)) = n$.

□

3.4 Максимални дијаметар

У овом одељку ћемо одредити максималне вредности дијаметара графова у класи графова $\mathrm{G}_n(D)$ датог реда n. Такође ћемо окарактерисати све такве графове. Резултати у овом одељку су базирани на оригиналним радовима [12, 13]. Мотивација за налажење боље горње границе дијаметра интегралних циркулантних графова представља следећа оштра горња граница дата у раду [63].

Теорема 3.23. *За дати граф $\mathrm{G}_n(D)$, нека је t величина најмањег адитивног генератора од Z_n садржаног у D. Тада је*

$$t \le diam(\mathrm{G}_n(D)) \le 2t + 1.$$

Директне последице претходног тврђења су следеће границе

$$2 \le diam(\mathrm{G}_n(D)) \le 2|D| + 1. \tag{3.26}$$

Један од главних резултата у овом одељку тврди да максимални дијаметар интегралних циркулантних графова датог реда n може бити једнак $r(n) + 1$, ако $n \notin 4\mathbb{N} + 2$ и постоји прост фактор p_i такав да је $\alpha_i = 1$, и $r(n)$, у супротном, где је

$$r(n) = k + |\{i \mid \alpha_i > 1,\ 1 \le i \le k\}|$$

за $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Из ових резултата одмах закључујемо да горња граница из (3.26) никада није достижна за $|D| > k$ (како $|D|$ расте, тако расте и разлика између горње границе из (3.26) и стварног дијаметра графа).

Најпре доказујемо да су границе $r(n)$ и $r(n) + 1$ достижне за интегралне циркулантне графове $\mathrm{G}_n(D)$ такве да је $|D| \leq k$. Ова чињеница нам помаже да докажемо да је максимални дијаметар, свих интегралних циркулантних графова $\mathrm{G}_n(D)$ датог реда n и кардиналности скупа делилаца $|D| = k$, једнак $r(n)$. Овај резултат директно имплицира да су дијаметри графова у овој класи графова мањи или једнаки $2k$, из чега закључујемо да ни граница (3.26) није достижна. Даље налазимо све $\mathrm{G}_n(D)$, $|D| = k$ чији је дијаметар једнак $r(n)$. Разматрамо интегралне циркулантне графове $\mathrm{G}_n(D)$ такве да постоји прост број p_i који не дели ниједан $d \in D$ и доказујемо да је максимални дијаметар ове класе графова једнак $r(n)$. Након карактеризације свих екстремалних графова, такође одређујемо све $\mathrm{G}_n(D)$ такве да постоје постоји прост број p_i који не дели ниједан $d \in D$ чији је дијаметар једнак $2|D|+1$. Ова класа графова генерализује пример дат у Теореми 5 из [63]. Коначно, одређујемо максимални дијаметар интегралних циркулантних графова $\mathrm{G}_n(D)$ датог реда n и кардиналности скупа делилаца $t \leq k$, при чему се карактеришу сви екстремални графови. Заправо показујемо да максимални дијаметар може имати вредности $2t$, $2t + 1$, $r(n)$ и $r(n) + 1$ у зависности од вредности t и n, као што је то дато у једнакости (3.41).

Нека је $\mathrm{G}_n(D)$ повезан граф са максималним дијаметром у класи графова реда n и $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_t\}$.

Нека је D' произвољни подскуп скупа D, тако да је $\mathrm{nzd}(\{d \mid d \in D'\}) = 1$. Граф $\mathrm{G}_n(D')$ је повезан и јасно да је подграф од $\mathrm{G}_n(D)$, па важи

$$diam(\mathrm{G}_n(D)) \leq diam(\mathrm{G}_n(D')).$$

Пошто $\mathrm{G}_n(D)$ има максимални дијаметар, имамо $diam(\mathrm{G}_n(D')) = diam(\mathrm{G}_n(D))$. Зато ћемо наћи максимални дијаметар међу свим графовима тако да за сваки прави подскуп делилаца $D' \subseteq D$ важи да $\mathrm{nzd}(\{d \mid d \in D'\}) > 1$ (графови $\mathrm{G}_n(D')$ нису повезани). Штавише, из последње претпоставке следи да је $gcd(d_1, \ldots, d_{s-1}, d_{s+1}, \ldots, d_t) > 1$ за сваки $1 \leq s \leq t$, а из повезаности $\mathrm{G}_n(D)$ имамо $\mathrm{nzd}(d_1, d_2, \ldots, d_t) = 1$. Дакле, закључујемо да за свако s постоји прост делилац p_{i_s} природног броја n такав да $p_{i_s} \nmid d_s$ и $p_{i_s} \mid d_j$ за све $1 \leq j \neq s \leq t$.

Имајући у виду наведено можемо дефинисати бијективно пресликавање

$$f : \{d_1, \ldots, d_t\} \to \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_t}\},$$

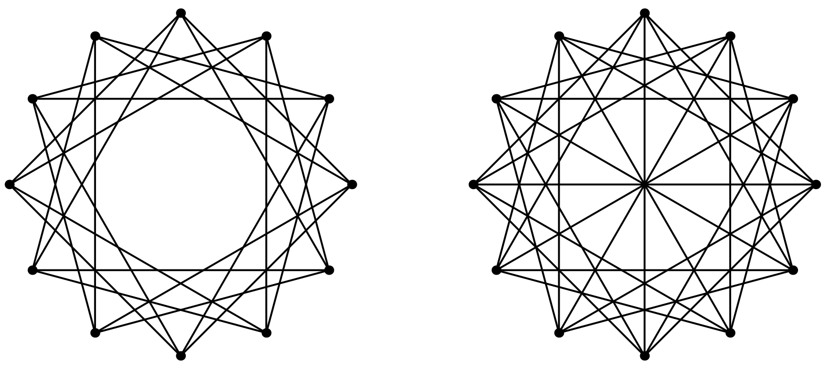
пошто $d_{s_1} \neq d_{s_2}$ имплицира $p_{i_{s_1}} \neq p_{i_{s_2}}$. Коначно, закључујемо да за сваки делилац d_s, $1 \leq s \leq t$, важи

$$p_{i_s} \nmid d_s \tag{3.27}$$

$$p_{i_1}, \ldots, p_{i_{s-1}}, p_{i_{s+1}}, \ldots, p_{i_t} \mid d_s. \tag{3.28}$$

У остатку одељка можемо претпоставити да делиоци графа $\mathrm{G}_n(D)$ задовољавају горње релације, осим када то није другачије наведено.

У следећем примеру показујемо како се претрага за максимални дијаметар међу свим графовима реда $n = 12$ може сузити на само оне са скупом делилаца D' који задовољавају својства (3.27) и (3.28). Лако је видети да имамо само два таква примера скупа $D' = \{2, 3\}$ и $D' = \{3, 4\}$, а дијаметри графова $\mathrm{G}_{12}(\{2, 3\})$ и $\mathrm{G}_{12}(\{3, 4\})$ су 2 и 3, редом. Међутим, дијаметар графа $\mathrm{G}_{12}(\{3, 4, 6\})$, као пример графа који нема својства (3.27) и (3.28), не може бити већи од дијаметра претходна два графа (слика 15).



Слика 15: Граф $\mathrm{G}_{12}(\{3, 4\})$ са леве и граф $\mathrm{G}_{12}(\{3, 4, 6\})$ са десне стране чији су дијаметри једнаки 3 и 2, редом, представљају кандидате за максимални дијаметар у класи графова са 12 чворова.

Подсетимо се да су два чвора a и b из $\mathrm{G}_n(d_1, d_2, \ldots, d_t)$ суседни ако и само ако је $\mathrm{nzd}(a - b, n) = d_i$ за неки $1 \leq i \leq t$. Узимајући у обзир да је граф $\mathrm{G}_n(D)$ чворно-транзитиван, можемо се фокусирати на произвољни чвор (на пример 0) и конструисати најкраћи пут од чвора 0 до било којег другог чвора $0 \leq l = |a - b| \leq n - 1$.

Уколико успемо да нађемо решење $x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ система

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_q \equiv l \pmod{n}$$

и

$$\text{nzd}(x_i, n) = d_{h(i)},$$

за $1 \leq i \leq q$ и неко пресликавање $h : \{1, \dots q\} \mapsto \{1, \dots, t\}$, онда можемо конструисати пут од 0 до l дужине q који пролази кроз чворове

$$0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_q.$$

Решења горњег система конгруенцијских једначина можемо тражити као решење следећег еквивалентног система конгруенцијских једначина

$$d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_t y_t \equiv l \pmod n \tag{3.29}$$

са ограничењима

$$\text{nzd}(d_j y_j, n) = d_j \qquad \text{за} \qquad 1 \leq j \leq t, \tag{3.30}$$

где сваки сабирак $d_j y_j$ одговара једном или више x_i. Приметимо да неки од y_j, $1 \leq j \leq t$, могу бити једнаки нули и у том случају не разматрамо дотично ограничење система (3.30).

У следећој леми доказујемо да је горња граница дијаметра графа $\text{G}_n(d_1, d_2, \dots, d_t)$, за $t = k$, једнака $k + |\{i \ |\alpha_i > 1, \ 1 \leq i \leq k\}|$ и ту вредност у даљем тексту означавамо са $r(n)$.

Лема 3.10. *Дијаметар графа* $\text{G}_n(d_1, d_2, \dots, d_k)$*, где* $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ *задовољава својства (3.27) и (3.28), је мањи или једнак* $r(n)$*.*

Доказ. Како је поредак делилаца у D произвољан и D задовољава (3.27) и (3.28), можемо претпоставити без губитка општости да је $i_s = s$, за $1 \leq s \leq k$. За $t = k$, решавамо систем једначина (3.29), записујући га у следећем облику

$$d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_k y_k \equiv l \pmod{p_j^{\alpha_j}} \quad 1 \leq j \leq k, \tag{3.31}$$

уз ограничења

$$\text{nzd}(d_j y_j, n) = d_j \qquad \text{за} \qquad 1 \leq j \leq k.$$

Последња једначина је еквивалентна са

$$\text{nzd}(y_j, \frac{n}{d_j}) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad p_i \nmid y_j, \text{ ако } S_{p_i}(d_j) < \alpha_i, 1 \leq i \leq k. \tag{3.32}$$

Из (3.27) имамо $S_{p_j}(d_j) = 0 < \alpha_j$ и важи да је $p_j \nmid y_j$.

Штавише, како је $\mathrm{nzd}(d_j, p_j^{\alpha_j}) = 1$ одавде следи

$$y_j \equiv (l - p_j t) \cdot d_j^{-1} \pmod{p_j^{\alpha_j}},$$

где смо са $p_j t$ означили $d_1 y_1 + \cdots + d_{j-1} y_{j-1} + d_{j+1} y_{j+1} + \cdots + d_k y_k$. Приметимо да је једини услов који y_j мора да задовољи тај да y_j не може бити дељиво са p_j, како смо већ претходно дискутовали.

Ако p_j не дели l, можемо директно израчунати y_j које није дељиво са p_j. Претпоставимо сада да p_j дели l.

За $\alpha_j = 1$, из $p_j \mid l$ имамо

$$y_j \equiv (l - p_j t) \cdot d_j^{-1} \equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}.$$

На основу претходног видимо да не укључујемо овакве сабирке $d_j y_j$ у горњи збир (у супротном добијамо контрадикцију са условом $p_j \nmid y_j$). Ово уствари значи да можемо ставити $y_j = 0$ (односно игнорисати овај сабирак), па у овом случају не разматрамо услов $\mathrm{nzd}(d_j y_j, n) = d_j$.

За $\alpha_j > 1$, претпоставимо

$$y_j \equiv (l - p_j t) \cdot d_j^{-1} \equiv p_j^{\beta_j} \cdot s \pmod{p_j^{\alpha_j}}, \tag{3.33}$$

где $p_j \nmid s$. За $\beta_j = \alpha_j$, можемо слично изоставити сабирак $d_j y_j$ из збира.

Ако је $\beta_j < \alpha_j$, онда $y_j = 0$ очигледно није решење конгруенцијске једначине. Можемо сада y_j разложити на збир два сабирка $y'_j + y'''_j$ која су оба узајамно проста са p_j, а њихов збир је једнак $p_j^{\beta_j} \cdot s$ по модулу $p_j^{\alpha_j}$. Ово се лако може урадити одабиром $y'_j = 1$ и $y''_j = p_j^{\beta_j} \cdot s - 1$. Због тога можемо написати сабирак $d_j y_j$ као збир два сабирка који задовољавају услове

$$d_j \cdot 1 + d_j \cdot (p_j^{\beta_i} \cdot s - 1).$$

То значи да су за просте факторе чији су степени $\alpha_j > 1$ потребне две гране да бисмо конструисали пут од 0 до l када важи $p_j^{\beta_j} \| l - p_j t$, $\beta_j < \alpha_j$.

Коначно, закључујемо да ако желимо да конструишемо пут од 0 до l, за произвољан l, треба нам највише једна грана која одговара модулу p_j, ако је $\alpha_j = 1$, и највише две гране које одговарају модулу p_j, ако $\alpha_j > 1$, за сваки $1 \le j \le k$. То значи да је $diam(\mathrm{G}_n(d_1, \ldots, d_k)) \le r(n)$.

$\square$

У следећој теореми показујемо да је максимални дијаметар графа $\mathrm{G}_n(d_1, d_2, \ldots, d_t)$ за $t = k$ једнак $r(n)$ и карактеришемо све екстремалне графове.

Теорема 3.24. *Максимални дијаметар графа* $\mathrm{G}_n(d_1, d_2, \ldots, d_k)$*, где скуп делилаца* $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ *задовољава својства (3.27) и (3.28), је једнак* $r(n)$*. Једнакост важи у следећа два случаја:*

i) *ако је* $\alpha_j > 1$ *онда* $S_{p_j}(d_i) > 1$*, за* $1 \leq i \neq j \leq k$

ii) *ако је* $n \in 4\mathbb{N}+2$ *и* $d_1 \in 2\mathbb{N}+1$ *онда постоји тачно један* $2 \leq j \leq k$ *тако да* $p_j \| d_1$*,* $S_{p_j}(d_i) > 1$*, за* $2 \leq i \leq k$*, а остали прости фактори* p_l *(*$1 \leq l \neq j \leq k$*) задовољавају* $S_{p_l}(d_i) > 1$*, ако је* $\alpha_l > 1$*, за* $1 \leq i \neq l \leq k$*.*

Доказ. Пошто је дијаметар $\mathrm{G}_n(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ мањи или једнак $r(n)$, где скуп делилаца $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ задовољава својства (3.27) и (3.28), према Леми 3.10, у првом делу доказа анализирамо када граф има дијаметар мањи од $r(n)$. Из (3.33) закључујемо да је то случај када је услов $l - p_j t \equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ задовољен, за $\alpha_j > 1$ и $p_j \mid l$.

Уочимо да сума $p_j t$ може бити записана у следећој форми

$$p_j(t_1 + \cdots + t_{u_j}) + p_j^2(t_{u_j+1} + \cdots + t_{k-1}), \tag{3.34}$$

где $u_j = |\{d_i \mid i \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k\},\ p_j \| d_i,\ d_i y_i = p_j t_i\}|$ и $p_j \nmid t_1, \ldots, t_{u_j}$. Из (3.32) закључујемо да је запис у овој форми заиста увек могућ пошто важи $p_j \nmid y_1, \ldots, y_{u_j}$, јер $1 = S_{p_j}(d_i) < \alpha_j$, $1 \leq i \leq u_j$. Штавише, пошто узимамо у обзир вредности $d_i y_i$ по модулу $p_j^{\alpha_j}$, можемо претпоставити, без губљења општости, да је $S_{p_j}(p_j^2 t_i) < \alpha_j$ за $u_j + 1 \leq i \leq k$, где $d_i y_i = p_j^2 t_i$. У овом случају, на основу (3.32) мора бити $p_j \nmid y_i$, за свако $1 \leq i \leq k$.

Претпоставимо најпре да је $u_j \geq 2$. Имамо да је $l - p_j t \equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ ако и само ако

$$t_1 + \cdots + t_{u_j} + p_j(t_{u_j+1} + \cdots + t_{k-1}) \equiv \frac{l}{p_j} \pmod{p_j^{\alpha_j - 1}}. \tag{3.35}$$

Штавише, како је $p_j \nmid t_1$ видимо да t_1 мора да задовољава следећи систем $t_1 \equiv \frac{l}{p_j} - t_2 - \cdots - t_{u_j} - p_j(t_{u_j+1} + \cdots + t_{k-1}) \pmod{p_j^{\alpha_j - 1}}$ и $t_1 \not\equiv p_j s_1 \pmod{p_j^{\alpha_j - 1}}$, за неко $0 \leq s_1 < p_j^{\alpha_j - 2}$. Поново, пошто такође важи $p_j \nmid t_2$, добијамо $t_2 \not\equiv \{\frac{l}{p_j} - t_3 - \cdots - t_{u_j} - p_j(t_{u_j+1} + \cdots + t_{k-1}) - p_j s_1, p_j s_2\} \pmod{p_j^{\alpha_j - 1}}$, за неко $0 \leq s_2 < p_j^{\alpha_j - 2}$. Дакле, ако је $p_j > 2$ можемо наћи вредност t_2 по модулу $p_j^{\alpha_j-1}$ које је решење система уколико узмемо произвољне вредности за $t_3, \ldots, t_{k-1}$ по модулу $p_j^{\alpha_j-1}$ (вредност t_1 по модулу $p_j^{\alpha_j-1}$ се може очигледно израчунати након уврштавања вредности $t_2, \ldots, t_{k-1}$). Ако је $p_j = 2$ и $\frac{l}{p_j} - t_3 - \cdots - t_{u_j} \in 2\mathbb{N}+1$, не можемо наћи непарно t_2 које би било решење система. За такво l, на исти начин можемо показати да систем $d_1(y_1^{(1)}+y_1^{(2)})+d_2y_2+\cdots+d_{j-1}y_{j-1}+d_{j+1}y_{j+1}+\cdots+d_ky_k \equiv l \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, $p_j \nmid y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2, \ldots, y_k$, има решења његовим редуковањем на форму $t_1^1 + t_1^2 + t_2 + \cdots + t_{u_j} + p_j(t_{u_j+1} + \cdots + t_{k-1}) \equiv \frac{l}{p_j} \pmod{p_j^{\alpha_j-1}}$. Дакле, у овом случају потребне су две гране за делове пута од 0 до l који одговарају модулима p_1 и p_j, пошто $l - p_jt \equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ и $y_j = 0$. Коначно, закључујемо да је дијаметар мањи од $r(n)$, јер је $r(p_1^{\alpha_1}) + r(p_j^{\alpha_j}) > 2$.

Нека је сада $u_j = 1$. Ако је $p_j > 2$, слично као у претходном случају испитујући систем $d_1(y_1^{(1)} + y_1^{(2)}) + d_2y_2 + \cdots + d_{j-1}y_{j-1} + d_{j+1}y_{j+1} + \cdots + d_ky_k \equiv l \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ (што одговара систему $t_1^1 + t_1^2 + p_j(t_2 + \cdots + t_{k-1}) \equiv \frac{l}{p_j} \pmod{p_j^{\alpha_j-1}}$) и $p_j \nmid y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2, \ldots, y_k$, видимо да можемо наћи $t_1^1, t_1^2, t_2, \ldots, t_{k-1}$ такве да је $l - p_jt \equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ и зато можемо ставити $y_j = 0$. Штавише, како $p_1 \mid d_2, \ldots, d_k$ важи да је $d_1(y_1^{(1)} + y_1^{(2)}) \equiv l \pmod{p_1}$ и ако су оба $y_1^{(1)}, y_1^{(2)} \neq 0$ онда закључујемо да за $p_1 = 2$ и $l \in 2\mathbb{N}+1$ парност леве и десне стране једначине је различита ($p_1 \nmid y_1^{(1)}, y_1^{(2)}$). Дакле, у овом случају потребна је једна додатна грана и зато највише три гране за делове пута чија је дужина једнака дијаметру одговарају модулима p_1 и p_j. Коначно, закључујемо да се максимални дијаметар графа може достићи ако је вредност $r(p_1^{\alpha_1}) + r(p_j^{\alpha_j})$ једнака 3 и ово је случај ако и само ако је $\alpha_1 = 1$.

Ако је $p_j = 2$, већ смо доказали да за $\frac{l}{p_j} \in 2\mathbb{N}$ систем $t_1^1 + t_1^2 + p_j(t_2 + \cdots + t_{k-1}) \equiv \frac{l}{p_j} \pmod{p_j^{\alpha_j-1}}$, $p_j \nmid t_1^1, t_1^2$ има решење (случај $u_j = 2$) и зато је $l - p_jt \equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ ($y_j = 0$). Разматрајући систем по модулу p_1, можемо наћи $y_1^{(1)}, y_1^{(2)}$ који нису дељиви са p_1 и $y_1^{(1)} + y_1^{(2)} = (l - p_1t')d_1^{-1}$, где је $p_1t' = d_2y_2 + \ldots + d_{j-1}y_{j-1} + d_{j+1}y_{j+1} + \cdots + d_ky_k$, јер је $p_1 > 2$. У овом случају потребне су нам највише две гране за делове пута од 0 до l који одогварају модулима p_1 и p_j (дијаметар овог графа не може досегнути вредност $r(n)$). Ако је $\frac{l}{p_j} \in 2\mathbb{N}+1$, претпоставимо да $p_1 \nmid l$, онда анализирањем система $d_1y_1 + d_2y_2 + \cdots + d_{j-1}y_{j-1} + d_{j+1}y_{j+1} + \cdots + d_ky_k \equiv l \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ (што одговара једначини $t_1 + p_j(t_2 + \cdots + t_{k-1}) \equiv \frac{l}{p_j} \pmod{p_j^{\alpha_j-1}}$) и $p_j \nmid y_1, y_2, \ldots, y_k$, видимо да $t_1 \in 2\mathbb{N}+1$ задовољава следећи систем $t_1 \equiv \frac{l}{p_j} - p_j(t_{u_j+1} + \cdots + t_{k-1}) \pmod{p_j^{\alpha_j-1}}$ и $t_1 \not\equiv p_js$

$(\mathrm{mod}\ p_j^{\alpha_j-1})$, за неко $0 \le s < p_j^{\alpha_j-2}$. Штавише, $y_1 \equiv (l - p_1 t')d_1^{-1} \pmod{p_1^{\alpha_1}}$ је решење конгруенцијске једначине по модулу p_1, па нам је у овом случају потребна једна грана за делове пута од 0 до l који одговарају модулима p_1 и p_j (дијаметар овог графа не може да досегне вредност $r(n)$). Коначно, ако је $\frac{l}{p_j} \in 2\mathbb{N}+1$ и $p_1 \mid l$, следећи систем може се слично решавати $d_2y_2 + \cdots + d_j(y_j^1 + y_j^2) + \cdots + d_ky_k \equiv l \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, $p_j \nmid y_j^1, y_j^2$.

Показали смо да ако је $u_i = 1$, $n \in 2\mathbb{N}$ и $l, d_1 \in 2\mathbb{N}+1$, можемо пронаћи решење система конгруенција $d_1(y_1^{(1)} + y_1^{(2)} + y_1^{(3)}) + d_2y_2 + \cdots + d_{j-1}y_{j-1} + d_{j+1}y_{j+1} + \cdots + d_ky_k \equiv l \pmod{p_i^{\alpha_j}}$, $p_i \nmid y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_1^{(3)}, y_2, \ldots, y_k$. Уочимо да ако је $u_j = 1$ и $p_j \| d_1$ можемо пронаћи решење система конгруенција $d_1(y_1^{(1)} + y_1^{(2)} + y_1^{(3)}) + d_2y_2 + \cdots + d_{j-1}y_{j-1} + d_{j+1}y_{j+1} + \cdots + d_ky_k \equiv l \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, $p_j \nmid y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_1^{(3)}, y_2, \ldots, y_k$. Одавде следи да можемо ставити $y_j = 0$ и закључити да су нам потребне три гране за делове пута који одговарају модулима p_1, p_i и p_j, а дужина овог пута не може да досегне ову вредност $r(n)$. Исти закључак важи за више од два проста фактора.

Из горње дискусије закључујемо да дијаметар може достићи вредност $r(n)$, ако је $S_{p_j}(d_i) > 1$ за $\alpha_j > 1$ и $i \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k\}$ (случај $u_j = 0$). У још једном случају вредност $r(n)$ може бити постигнута, а то је ако важи $S_{p_j}(d_1) = 1 < S_{p_j}(d_i)$, $2 \le i \le k$ и $p_j, d_1 \in 2\mathbb{N}+1$, за $n \in 4\mathbb{N}+2$ (случај $u_j = 1$). Сада доказујемо да постоји чвор l_0 тако да је растојање од 0 до l_0 једнако $r(n)$ у оба наведена случаја.

У првом случају, можемо наћи l_0 из система конгруенцијских једначина, за сваки $1 \le j \le k$,

$$\begin{aligned} l_0 &\equiv -1 \pmod{p_j} &&\text{ако } \alpha_j = 1 \\ l_0 &\equiv p_j \pmod{p_j^{\alpha_j}} &&\text{ако } \alpha_j > 1. \end{aligned}$$

За свако $1 \le j \le k$ тако да је $\alpha_j = 1$, потребан нам је најмање један сабирак d_jy_j у репрезентацији (3.31) броја l_0 пошто $l_0 \not\equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ и сви остали d_i су дељиви са $p_j^{\alpha_j}$ за $i \ne j$. Са друге стране, за свако $1 \le j \le k$ тако да $\alpha_j > 1$ не можемо имати тачно један такав сабирак, иначе бисмо имали $d_jy_j \equiv l_0 - p_j^2 t' \equiv p_j s \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ и $p_j \nmid s$, што би била контрадикција пошто $p_j \nmid d_jy_j$, где је $p_j^2 t' = d_1y_1 + \cdots + d_{j-1}y_{j-1} + d_{j+1}y_{j+1} + \cdots + d_ky_k$. Према томе, потребна су нам најмање два сабирка за $\alpha_j > 1$.

У другом случају налазимо l_0 из следећег система конгруенцијских једначина

$$\begin{array}{lll} l_0 \equiv -1 \pmod{p_i} & & \text{ако } \alpha_i = 1 \\ l_0 \equiv p_j^2 \pmod{p_j^{\alpha_j}} & & \text{ако } S_{p_j}(d_1) = 1 < S_{p_j}(d_l),\ 2 \leq l \leq k \\ l_0 \equiv p_i \pmod{p_i^{\alpha_i}} & & \text{ако } \alpha_i > 1,\ i \neq j. \end{array}$$

Остаје да покажемо да су потребне две гране разматрајући модуле $p_j^{\alpha_j}$, за $p_j, d_1 \in 2\mathbb{N}+1$ и $S_{p_j}(d_1) = 1 < S_{p_j}(d_l),\ 2 \leq l \leq k$. Заиста, не можемо наћи тачно један такав сабирак, јер би у супротном имали $d_j y_j \equiv l_0 - p_j t \equiv p_j s \pmod{p_j^{\alpha_j}}$ и $p_j \nmid s$, што је контрадикција услед $p_j \nmid d_j y_j$.

Овим доказујемо да је дијаметар графа $\mathrm{G}_n(D)$ у овим случајевима већи или једнак од $r(n)$ и зато је $diam(\mathrm{G}_n(D)) = r(n)$, чиме комплетирамо доказ теореме.

□

Дајемо неколико примера који илуструју како се Теорема 3.24 примењује да би се утврдило да ли дијаметар графа $\mathrm{G}_n(D)$, $|D| = k$, достиже $r(n)$.

i) Ако је $n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ и $D = \{3^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^3\}$ онда $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 5$, сходно првом делу Теореме 3.24 и зато дијаметар графа достиже $r(n)$.

Такође ћемо израчунати дијаметар $\mathrm{G}_n(d_1, d_2, d_3)$ за $n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, $d_1 = 3^2 \cdot 5$, $d_2 = 2^2 \cdot 5$ и $d_3 = 2^2 \cdot 3^3$ да би илустровали методе из доказа Теореме 3.24. Заиста, за било који $0 \leq l \leq n-1$ покушаћемо да решимо једначину у следећем облику $d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 \equiv l \pmod{n}$, са ограничењима $\mathrm{nzd}(d_j y_j, n) = d_j$, за $1 \leq j \leq 3$. Ово је еквивалентно следећем систему

$$\begin{array}{rcll} y_1 & \equiv & (l - d_2 y_2 - d_3 y_3) \cdot d_1^{-1} & \pmod{2^2} \\ y_2 & \equiv & (l - d_1 y_1 - d_3 y_3) \cdot d_2^{-1} & \pmod{3^3} \\ y_3 & \equiv & (l - d_1 y_1 - d_2 y_2) \cdot d_3^{-1} & \pmod{5}, \end{array}$$

где је $2 \nmid y_1$, $3 \nmid y_2$ и $5 \nmid y_3$. Ако $2 \nmid l$ онда можемо директно израчунати y_1. Слично ако $3 \nmid l$ или $5 \nmid l$, можемо директно израчунати

y_2 или y_3, редом. Конкретније, ако $2 \nmid l$, $3 \nmid l$ и $5 \nmid l$ закључујемо да је растојање између 0 и l једнако 3.

Ако $2^2 \mid l - d_2y_2 - d_3y_3$ или $3^3 \mid l - d_1y_1 - d_3y_3$ или $5 \mid l - d_1y_1 - d_2y_2$ онда добијамо да је решење одговарајуће једначине $y_1 = 0$ или $y_2 = 0$ или $y_3 = 0$, редом. С друге стране, ако $3^2 \| l - d_1y_1 - d_3y_3$ или $3 \| l - d_1y_1 - d_3y_3$ не можемо пронаћи y_2 које задовољава горњу конгруенцијску једначину тако да $3 \nmid y_2$. Међутим, за такво l постоје y_2' и y_2'' такви да је $y_2' + y_2'' \equiv (l - d_1y_1 - d_3y_3) \cdot d_2^{-1} \pmod{3^3}$ и $3 \nmid y_2', y_2''$. То значи да су нам потребне две гране да бисмо конструисали пут од 0 до l када $3^2 \| l - d_1y_1 - d_3y_3$ или $3 \| l - d_1y_1 - d_3y_3$ које одговарају модулу 3^3. Слично, ако узмемо $2 \| l - d_2y_2 - d_3y_3$ да бисмо конструисали пут од 0 до l, потребне су нам две гране које одговарају модулу 2^2. Коначно, растојање између било која два чвора је мање или једнако 5. На основу горње дискусије можемо изабрати l тако да је

$$\begin{aligned} l &\equiv -1 \pmod{5} \\ l &\equiv 3 \pmod{3^3} \\ l &\equiv 2 \pmod{2^2} \end{aligned}$$

и израчунати да је $l = 354$ користећи Кинеску теорему о остацима. Стога закључујемо да је растојање између 0 и l једнако 5.

ii) Ако је $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ и $D = \{3 \cdot 5^2, 2 \cdot 5^3, 2 \cdot 3^2\}$ онда $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 5$, због дела *ii*) Теореме 3.24, јер постоји тачно један $p_j = 3 \mid d_1$ такав да је $S_{p_j}(d_1) = 1 < S_{p_j}(d_3)$ и $d_1 \in 2\mathbb{N} + 1$, за $n \in 4\mathbb{N} + 2$ и дијаметар графа је једнак $r(n) = 5$.

iii) Ако је $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ и $D = \{3 \cdot 5 \cdot 7, 2^2 \cdot 5 \cdot 7, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\}$ онда је $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 5$ (мање од $r(n)$), пошто је $n \in 4\mathbb{N}$ иако су остали услови из дела *ii*) Теореме 3.24 задовољени. Са друге стране, пошто $S_{p_2}(n) > 1$, за $p_2 = 3$, и $S_{p_2}(d_1) = 1$, закључујемо да први део теореме није задовољен.

iv) Ако је $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $D = \{3 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2^2 \cdot 3 \cdot 7, 2^2 \cdot 3 \cdot 5\}$ онда је $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 4$ (мање од $r(n)$), пошто су сви услови из дела *i*) Теореме 3.24 задовољени осим $S_{p_1}(d_2) > 1$ за $p_1 = 2$ и $d_2 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.

v) Ако је $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ и $D = \{3 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2, 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2, 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2\}$ онда $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 5$ (што је мање од $r(n)$), пошто је услов из дела ii) Теореме 3.24 задовољен за више од једног делиоца (у овом случају за три делиоца $p_j \in \{3, 5, 7\}$).

Такође, можемо директно закључити да у класи свих графова датог реда n и $k-$елементним скупом D не можемо пронаћи пример за који $diam(\mathrm{G}_n(d_1, \ldots, d_k)) = 2k+1$, пошто је $diam(\mathrm{G}_n(d_1, \ldots, d_k)) \leq r(n) \leq 2k$. Дакле, у овом случају горња граница од (3.26) није достижна.

Лема 3.11. *Нека је d произвољни делилац од n. За свако l дељиво са d постоје y_1 и y_2 такви*

$$d(y_1 + y_2) \equiv l \pmod{n}, \text{ ако } \frac{n}{d} \in 2\mathbb{N} + 1$$
$$d(y_1 + y_2 + 1) \equiv l \pmod{n}, \text{ ако } \frac{n}{d} \in 2\mathbb{N}$$

и $\mathrm{nzd}(dy_i, n) = d$*,* $1 \leq i \leq 2$.

Доказ. Налазимо репрезентацију l у следећем облику $dy_1 + dy_2 \equiv l \pmod{n}$ тако да је $\mathrm{nzd}(dy_1, n) = d$, $\mathrm{nzd}(dy_2, n) = d$ и доказујемо да репрезентација l постоји ако је $\frac{n}{d} \in 2\mathbb{N}+1$. Заправо морамо да пронађемо y_1 и y_2 тако да је $y_1 + y_2 \equiv \frac{l}{d} \pmod{\frac{n}{d}}$, $\mathrm{nzd}(y_1, \frac{n}{d}) = 1$ и $\mathrm{nzd}(y_2, \frac{n}{d}) = 1$. Нека је сада p_i произвољан делилац од $\frac{n}{d}$ такав да је $S_{p_i}(\frac{n}{d}) = \alpha_i$. Решавањем горњег система конгруенцијских једначина по модулу $p_i^{\alpha_i}$ добијамо да је $y_1 \equiv \frac{l}{d} - y_2 \not\equiv p_i u \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ и $y_2 \not\equiv 0 \pmod{p_i}$ (што је еквивалентно $y_2 \not\equiv p_i v \pmod{p_i^{\alpha_i}}$), за $0 \leq u, v < p_i^{\alpha_i - 1} - 1$.

Кочано добијамо $y_2 \not\equiv \{p_i v, \frac{l}{d} - p_i u\} \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, па се даље може закључити да максимални број вредности y_2 модуло $p_i^{\alpha_i}$ коју овај број не може узети, једнак је $2p_i^{\alpha_i - 1}$. Овај број вредности је мањи од броја остатака по модулу $p_i^{\alpha_i}$, за $p_i > 2$. То значи да овај систем има решење у овом случају. Претпоставимо сада да је $\frac{n}{d} \in 2\mathbb{N}$. У случају када је $p_i = 2$ можемо уочити да такође постоји y_2 по модулу $p_i^{\alpha_i}$ ако $\frac{l}{d} \in 2\mathbb{N}$. Штавише, за $p_i = 2$ и $\frac{l}{d} \in 2\mathbb{N}+1$, већ смо закључили да постоје $y_1, y_2 \in 2\mathbb{N}+1$ такви да је $dy_1 + dy_2 \equiv l - d \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ (приметимо да је $\frac{l-d}{d} \in 2\mathbb{N}$), па зато репрезентација $dy_1 + dy_2 + d \equiv l \pmod{n}$ постоји, под условима $\mathrm{nzd}(dy_1, n) = d$ и $\mathrm{nzd}(dy_2, n) = d$.

□

Теорема 3.25. *Нека је $diam(\mathrm{G}_m(d_1, \ldots, d_t)) = d > 2$. За $n' > 1$ такво да је $\mathrm{nzd}(n', m) = 1$ важи*

$$diam(\mathrm{G}_{mn'}(d_1, \ldots, d_t)) = \begin{cases} d+1, & n' \in 2\mathbb{N} \\ d, & n' \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases} \tag{3.36}$$

Доказ. Нека је $d'_1y_1 + d'_2y_2 + \cdots + d'_sy_s$ репрезентација броја $0 \leq l \leq n'm - 1$ по модулу m која задовољава услов $\text{nzd}(d'_jy_1, m) = d'_j$, где је $0 \leq s \leq d$ и $d'_j \in \{d_1, \ldots, d_t\}$, $1 \leq j \leq s$.

Сада ћемо испитати које додатне услове бројеви $y_1, y_2, \ldots, y_s$ морају задовољити разматрајући следећи систем

$$\begin{aligned} &d'_1y_1 + d'_2y_2 + \cdots + d'_sy_s \equiv l \pmod{mn'} \\ &\text{nzd}(d'_jy_j, mn') = d'_j,\ 1 \leq j \leq s. \end{aligned}$$

Пошто важи да је $\text{nzd}(n', m) = 1$, $\text{nzd}(d'_jy_j, m) = d'_j$ и $d'_1y_1 + d'_2y_2 + \cdots + d'_sy_s \equiv l \pmod{m}$, закључујемо да је довољно пронаћи $y_1, y_2, \ldots, y_s$ такве да за сваки $p_i \mid n'$ важи да је

$$d'_1y_1 + d'_2y_2 + \cdots + d'_sy_s \equiv l \pmod{n'} \tag{3.37}$$

$$p_i \nmid y_j,\ 1 \leq j \leq s,\ 1 \leq i \leq u, \tag{3.38}$$

где u означава број различитих простих фактора од n'.

Нека је $s = 1$. Из (3.37) и (3.38) следи да услови $y_1 \equiv d_1^{'-1}l \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ и $y_1 \not\equiv 0 \pmod{p_i}$ морају бити задовољени, за свако $1 \leq i \leq u$. Међутим, ако $p_i \mid l$ онда систем нема решења па можемо наставити са разматрањем репрезентације броја l у облику $d'_1y_1^{(1)} + d'_1y_1^{(2)} \equiv l \pmod{m}$ тако да још важи $\text{nzd}(d'_1y_1^{(1)}, m) = d'_1$ и $\text{nzd}(d'_1y_1^{(2)}, m) = d'_1$. На основу Леме 3.11 оваква репрезентација постоји ако $\frac{m}{d'_1} \in 2\mathbb{N}+1$. Штавише, користећи исто тврђење постоји репрезентација броја l у облику $d'_1y_1^{(1)}+d'_1y_1^{(2)}+d'_1 \equiv l \pmod{m}$ тако да је $\text{nzd}(d'_1y_1^{(1)}, m) = d'_1$ и $\text{nzd}(d'_1y_1^{(2)}, m) = d'_1$, ако је $\frac{m}{d'_1} \in 2\mathbb{N}$.

Приметимо да је $s = 0$ ако и само ако је l дељиво са m. То значи да $d_j \mid l$ за $1 \leq j \leq t$ и стога можемо поступити као у претходном случају тако што ћемо пронаћи репрезентацију од l по модулу m са два или три сабирка у зависности од парности m.

Сада, у наставку показујемо да за сваку репрезентацију $d'_1y_1+d'_2y_2+\cdots+d'_sy_s \equiv l \pmod{m}$ са ограничењима $\text{nzd}(d'_jy_1, m) = d'_j$ и $s > 1$ постоји репрезентација (3.37) под ограничењима (3.38) са s или $s+1$ сабирком (у зависности од парности броја n'). Заиста, за било који прост број $p_i \mid n'$ $(1 \leq i \leq u)$, где је $S_{p_i}(n') = \alpha_i$, имамо да је $\text{nzd}(m, p_i) = 1$ што имплицира да је $\text{nzd}(d_j, p_i) = 1$, за $1 \leq j \leq t$. Дакле, из (3.37) и (3.38), закључујемо да је

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv (l - d'_2y_2 - \cdots - d'_sy_s)d_1^{'-1} \pmod{p_i^{\alpha_i}} \\ y_1 &\not\equiv p_iv \pmod{p_i^{\alpha_i}},\ 0 \leq v < p_i^{\alpha_i-1}. \end{aligned}$$

Из ова два услова произилази да $(l - d_2'y_2 - \cdots - d_s'y_s)d_1'^{-1} \not\equiv p_iv \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, $0 \leq v < p_i^{\alpha_i - 1}$, одакле даље добијамо

$$\begin{aligned} y_2 &\not\equiv (l - d_3'y_3 - \cdots - d_s'y_s - p_id_1'v)d_2'^{-1} \pmod{p_i^{\alpha_i}} \\ y_2 &\not\equiv p_iw \pmod{p_i^{\alpha_i}},\ 0 \leq w < p_i^{\alpha_i - 1}. \end{aligned}$$

Пошто v и w могу узети $p_i^{\alpha_i-1}$ вредности, закључујемо да је максималан број вредности по модулу $p_i^{\alpha_i}$ које y_2 не може узети једнак је $2p_i^{\alpha_i-1}$. Овај број је очигледно мањи од броја остатака по модулу $p_i^{\alpha_i}$ за $p_i > 2$, одакле даље закључујемо да ако је $n' \in 2\mathbb{N}+1$, па овај систем конгруенцијских једначина има решење по модулу n'.

Ако је $n' \in 2\mathbb{N}$ и $p_i = 2$ онда (3.38) имплицира да су $y_1, \ldots, y_s \in 2\mathbb{N}+1$ и како су $d_1', \ldots, d_s'$ делиоци од $m \in 2\mathbb{N}+1$ такође важи да је $d_1', \ldots, d_s' \in 2\mathbb{N}+1$. С друге стране, ако изаберемо $l \not\equiv s \pmod 2$, онда добијамо да је $d_1'i_1 + d_2'i_2 + \cdots + d_s'i_s \equiv s \not\equiv l \pmod 2$, што је контрадикција. Ово значи да не можемо да направимо репрезентацију l помоћу $s > 0$ сабирака који задовољавају систем конгруенцијских једначина (3.37) и (3.38) за $n' \in 2\mathbb{N}$ и l такав да $l \not\equiv s \pmod 2$. Међутим, пошто је $l \not\equiv l - d_1' \pmod 2$, постоји репрезентација са s сабирака броја $l - d_1'$ и отуда постоји репрезентација са $s+1$ сабирком броја l таква да $l \not\equiv s \pmod 2$.

Из горње дискусије закључујемо да је за $n' \in 2\mathbb{N}+1$ ($m \in 2\mathbb{N}$) дијаметар графа $\mathrm{G}_{mn'}(d_1, \ldots, d_t)$ једнак $\max\{3, d\} = d$. С друге стране, ако је $n' \in 2\mathbb{N}$ ($m \in 2\mathbb{N}+1$) дијаметар графа $\mathrm{G}_{mn'}(d_1, \ldots, d_t)$ је једнак $\max\{2, d+1\} = d+1$.

$\square$

Напомена 3.1. *Приметимо да је за комплетан граф* $\mathrm{G}_m(D_m)$ *дијаметар графа* $\mathrm{G}_{mn'}(D_m)$ *једнак* 2 *ако је* $n' \in 2\mathbb{N}+1$ *и једнак* 3 *ако* $n' \in 2\mathbb{N}$. *Заиста, пошто за сваку грану uv постоји пут* $u - w - v$, *закључујемо да за свако* $0 \leq l \leq m-1$ *постоји репрезентација (3.29) по модулу n на* $s = 2$ *сабирака, то из другог дела горњег доказа директно важи тврђење. Штавише, за граф такав да му је дијаметар* $diam(\mathrm{G}_m(D)) = 2$ *и* $m \in 2\mathbb{N}+1$, *према горњем доказу имамо да је* $diam(\mathrm{G}_{mn'}(D)) = 3$. *Са друге стране, ако је* $m \in 2\mathbb{N}$ *и за свако* $0 \leq l \leq m-1$ *постоји пут* $0 - l_1 - l$ *за неко* $0 \leq l_1 \leq l \leq m-1$, *дијаметар графа* $\mathrm{G}_{mn'}(D)$ *остаје исти као и дијаметар графа* $\mathrm{G}_m(D)$. *Иначе је* $diam(\mathrm{G}_{mn'}(D)) = 3$.

Из Теореме 3.25 следи да $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(d_1, \ldots, d_k)) \leq diam(\mathrm{G}_n(d_1, \ldots, d_k)) + 1$, за неке $n' > 1$ и $\mathrm{nzd}(n, n') = 1$. Надаље, по Теореми 3.24 имамо

$diam(\mathrm{G}_n(d_1,\ldots,d_k)) \leq r(n)$, што имплицира да је $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(d_1,\ldots,d_k)) \leq r(n){+}1$. Коначно, из дефиниције функције r, пошто је $\mathrm{nzd}(n,n')=1$ и $n'>1$, следи да је $r(n){+}1 \leq r(n{\cdot}n')$ и стога важи да је $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(d_1,\ldots,d_k)) \leq r(n{\cdot}n')$. Према томе, горња граница за дијаметар дата у Теореми 3.24 се не може повећати користећи Теорему 3.25, али можемо пронаћи нове класе графова који достижу ту границу.

Даље видимо да једнакост $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(d_1,\ldots,d_k)) = r(n\cdot n')$ важи ако и само ако $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(d_1,\ldots,d_k)) = diam(\mathrm{G}_n(d_1,\ldots,d_k))+1$, $diam(\mathrm{G}_n(d_1,\ldots,d_k)) = r(n)$ и $r(n){+}1 = r(n{\cdot}n') = r(n){+}r(n')$. Према Теореми 3.25 добијамо да је $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(d_1,\ldots,d_k)) = diam(\mathrm{G}_n(d_1,\ldots,d_k))+1$ ако и само ако $n' \in 2\mathbb{N}$ и $n \in 2\mathbb{N}+1$. Штавише, пошто је $n \in 2\mathbb{N}+1$, дијаметар графа $\mathrm{G}_n(d_1,\ldots,d_k)$ може достићи вредност $r(n)$ само у случају датом у првом делу тврђења Теореме 3.24. Коначно, $r(n)+1 = r(n)+r(n')$ важи ако и само ако је n' прост број што доказује следећу теорему.

Теорема 3.26. *Нека је $diam(\mathrm{G}_n(d_1,\ldots,d_k)) > 2$. Дијаметар графа $\mathrm{G}_{n\cdot n'}(d_1,d_2,\ldots,d_k)$, где је $n'>1$, $\mathrm{nzd}(n,n')=1$ и скуп делилаца $\{d_1,d_2,\ldots,d_k\}$ задовољава својства (3.27) и (3.28) у односу на просте бројеве $\{p_1,\ldots p_k\}$, мањи је или једнак $r(n\cdot n')$. Једнакост важи ако и само ако $n'=2$, $n \in 2\mathbb{N}+1$ и скуп делилаца $D \subseteq 2\mathbb{N}+1$ задовољава услов i) из тврђења Теореме 3.24.*

Већ смо поменули да су Saxena и остали одредили горњу границу дијаметра $\mathrm{G}_n(d_1,\ldots,d_t)$ у функцији броја делилаца t, тј. $diam(\mathrm{G}_n(d_1,\ldots,d_t)) \leq 2t+1$. Они су такође презентовали класу графова $\mathrm{G}_n(D)$, $n=2m$, $m=p_1^2\cdots p_k^2$ и $D_0=\{m/p_1^2,\ldots,m/p_k^2\}$ у Теореми 5 [63], за коју је горња граница достижна. Међутим, користећи сличан приступ као у доказу Теореме 3.26 можемо окарактерисати све графове $\mathrm{G}_{n\cdot n'}(d_1,\ldots,d_k)$ чији је дијаметар једнак $2k+1$. Приметимо најпре да је

$$diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(d_1,\ldots,d_k)) \leq diam(\mathrm{G}_n(d_1,\ldots,d_k))+1 \leq r(n)+1 \leq 2k+1.$$

Једнакост важи ако и само ако је $n' \in 2\mathbb{N}$, $\alpha_1>1,\ldots,\alpha_k>1$ и скуп делилаца $\{d_1,\ldots,d_k\} \subseteq 2\mathbb{N}+1$ задовољава услове из i) у тврђењу Теореме 3.24. Коначно, дијаметар графа $\mathrm{G}_{n\cdot n'}(d_1,\ldots,d_k)$, за $\mathrm{nzd}(n,n')=1$, достиже горњу границу $2k+1$ ако и само ако је $n' \in 2\mathbb{N}$ и за сваки $d_j \in 2\mathbb{N}+1$, $1 \leq j \leq k$, $p_j \nmid d_j$, $p_i^2 \mid d_j$, $1 \leq i \neq j \leq k$. Јасно је да класа графова $\mathrm{G}_{2m}(D_0)$ презентована у Теореми 5 из [63] има најмање параметре n и $d_1,\ldots,d_k$ који задовољавају горњи услов.

На основу Напомене 3.1 можемо извести нове класе графова чији максимални дијаметри достижу горње границе $r(n)$ или $r(n){+}1$ у неким специјалним случајевима.

Теорема 3.27. *За природан број $n > 1$, дијаметар графа $\mathrm{G}_n(D)$ једнак је $r(n)$ у следећим случајевима:*

i) $n = p_1p_2 \in 2\mathbb{N}+1$, $D = \{1\}$,

ii) $n = 4p_2$, $D = \{1\}$,

iii) $n = 2p_2p_3$, $D \in \{\{1\}, \{1, p_2\}, \{2, p_2\}, \{p_2, p_3\}, \{1, p_2, p_3\}\}$,

iv) $n = 2p_2^2$, $D \in \{\{1\}, \{1, p_2\}\}$.

Дијаметар графа $\mathrm{G}_n(D)$ једнак је $r(n) + 1$ ако је $n = 2p_2$, $D = \{1\}$.

Доказ. Приметимо да је $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(D)) = 3$ ако је $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 1$ и $n' \in 2\mathbb{N}$. Видимо да $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(D))$ достиже вреност $r(n \cdot n')$ ако $n \cdot n' \in \{2p_2^2, 4p_2, 2p_2p_3\}$. Пошто је $\mathrm{nzd}(n, n') = 1$, даље имамо $(n', n) \in \{(2, p_2^2), (4, p_2), (2, p_2p_3), (2p_2, p_3)\}$. Ако је $n = p_2$, онда је $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 1$ за $D = \{1\}$, ако је $n = p_2^2$, онда $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 1$ за $D = \{1, p_2\}$ и ако $n = p_2p_3$, онда $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 1$ за $D = \{1, p_2, p_3\}$. Штавише, $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(D))$ достиже $r(n\cdot n')+1$ ако $n\cdot n' = 2p_2$ и стога $(n', n) = (2, p_2)$, $D = \{1\}$.

Дијаметар графа $\mathrm{G}_{n\cdot n'}(D)$ једнак је 2 ако је $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 1$ и $n' \in 2\mathbb{N}+1$. Штавише, $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(D))$ достиже $r(n\cdot n')$ ако је $(n, n') = (p_1, p_2)$ и $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 1$ ако је $D = \{1\}$.

Дијаметар $\mathrm{G}_{n\cdot n'}(D)$ једнак је 3 ако је $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 2$ и $n \in 2\mathbb{N} + 1$. Штавише, $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(D)) = 3$ достиже $r(n \cdot n')$ ако $(n', n) \in \{(2, p_2p_3), (2p_2, p_3), (2, p_2^2)\}$. Ако је $n = p_2p_3$ онда $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 2$ за $D \in \{\{1\}, \{1, p_2\}, \{p_2, p_3\}\}$ и ако $n = p_2^2$ онда $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 2$ за $D = \{1\}$.

Дијаметар $\mathrm{G}_{n\cdot n'}(D)$ је једнак 3 ако је $diam(\mathrm{G}_n(D)) = 2$, $n \in 2\mathbb{N}$ и постоји $0 \leq l \leq n-1$ такви да су $(0, l)$ суседни и не постоји $0 \leq l_1 \neq l \leq n-1$ такво да су $(0, l_1)$ суседни и (l_1, l) суседни. Штавише, $diam(\mathrm{G}_{n\cdot n'}(D)) = 3$ достиже $r(n \cdot n')$ ако $(n', n) \in \{(p_2p_3, 2), (p_2, 2p_3), (p_2^2, 2), (p_2, 4)\}$. Ако је $n = 2p_3$, онда $D \in \{\{1, p_3\}, \{2, p_3\}\}$ и ако је $n = 4$, онда је $D = \{1\}$.

□

У следећем тврђењу без губитка општости претпостављамо да су индекси $\{i_1, \ldots, i_t\}$ из релација (3.27) и (3.28) једнаки $\{1, \ldots, t\}$. Штавише, претпостављамо да за сваки прост број p_i, $1 \leq i \leq k$ постоји бар један d_j, $1 \leq j \leq t$, такав да је $p_i \mid d_j$ (у супротном случају смо већ израчунали дијаметар у Теореми 3.26).

Теорема 3.28. *Нека је* $\mathrm{G}_n(d_1, d_2, \ldots, d_t)$ *граф такав да је* $t < k$ *и скуп делилаца* $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_t\}$ *задовољава својства (3.27) и (3.28) у односу на просте бројеве* $\{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$. *Тада је дијаметар графа мањи или једнак:*

i) $r(n)$, *ако* $n \notin 4\mathbb{N}+2$ *и постоје најмање два делиоца* p_i *и* p_j, $1 \le i \ne j \le k$, *таква да је* $\alpha_i = \alpha_j = 1$. *Једнакост важи ако и само ако* $\{d_1, \ldots, d_t\}$ *задовољава (i) из Теореме 3.24, постоје* $p_1, \ldots, p_t \in 2\mathbb{N}+1$ *и инјекција* $f : \{t+1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, t\}$ *таква да за сваки прост број* p_j, $t+1 \le j \le k$, *постоји тачно један* $d_{f(j)}$ *такав да је* $p_j \nmid d_{f(j)}$ *и* $\alpha_j = \alpha_{f(j)} = 1$.

ii) $r(n)+1$, *ако је* $n \in 4\mathbb{N}+2$ *и постоји бар један делилац* $p_i \in 2\mathbb{N}+1$, $1 \le i \le k$, *такав да је* $\alpha_i = 1$. *Једнакост важи ако и само ако* $\{d_1, \ldots, d_t\}$ *задовољава (i) из Теореме 3.24, постоје* $p_1, \ldots, p_t \in 2\mathbb{N}+1$ *и инјекција* $f : \{t+1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, t\}$ *таква да је за сваки прост број* p_j, $t+1 \le j \le k$, *постоји тачно један* $d_{f(j)}$ *такав да је* $p_j \nmid d_{f(j)}$ *и* $\alpha_j = \alpha_{f(j)} = 1$.

iii) $2t$, *ако је* $n \in 2\mathbb{N}+1$ *и постоји највише један делилац* p_i, $1 \le i \le k$, *такав да је* $\alpha_i = 1$. *Једнакост важи ако и само ако постоје* $p_1, \ldots, p_t$ *тако да за сваки* d_j, $1 \le j \le t$, $p_i^2 \mid d_j$, $1 \le i \ne j \le t$.

iv) $2t+1$, *ако је* $n \in 2\mathbb{N}$ *и постоји највише један делилац* p_i, $1 \le i \le k$, *такав да је* $\alpha_i = 1$. *Једнакост важи ако и само ако постоји* $p_1, \ldots, p_t \in 2\mathbb{N}+1$ *тако да за сваки* d_j, $1 \le j \le t$, $p_i^2 \mid d_j$, $1 \le i \ne j \le t$.

Доказ. Најпре доказујемо делове *i)* и *ii)* тврђења. На основу доказа Леме 3.10 показујемо да нам је за сваки прост фактор p_j, $1 \le j \le t$, потребна највише једна грана ако је $\alpha_j = 1$ и две гране ако је $\alpha_j > 1$ да би се конструисао пут од 0 до l, $0 \le l \le n-1$. Дакле, можемо писати

$$d_1 y_1 + d_2 y_2 + \cdots + d_t y_t \equiv l \pmod{p_j^{\alpha_j}}, \tag{3.39}$$

за $1 \le j \le t$, где неки y_i, $1 \le i \le t$, морају бити записани као збирови два сабирка $y_i' + y_i''$ за $\alpha_i > 1$ и одређене вредности l по модулу $p_j^{\alpha_j}$. Приметимо да неко y_i може бити једнак нули.

У наставку ћемо испитати колико грана можемо највише додати да би добили пут дужине дијаметра, разматрајући модуле p_j, $t+1 \le j \le k$. Сада, нека је p_j прост фактор од n такав да је $t+1 \le j \le k$. Уочимо да се релација (3.39) може преписати у следећем облику

$$s_1 + \cdots + s_{u_j} + p_j(s_{u_j+1} + \cdots + s_t) \equiv l \pmod{p_j^{\alpha_j}}, \tag{3.40}$$

где је $u_j = |\{d_i \mid i \in \{1,\dots,t\},\quad p_j \nmid d_i\}|$, $s_i = d_i y_i$, за $1 \le i \le u_j$ и $p_i s_i = d_i y_i$, за $u_j + 1 \le i \le t$.

Претпоставимо $p_j > 2$. Сличним разматрањем као у доказу Теореме 3.24 где је показано постојање $t_1,\dots,t_{k-1}$ у једначини (3.35) на исти начин можемо закључити да постоје $s_1,\dots,s_t$ по модулу p_j за $u_j > 1$, тако да је $p_j \nmid y_1,\dots,y_t$. Ово значи да нам нису потребне никакве додатне гране за пут од 0 до l које одговарају модулу p_j. Међутим, ако је $u_j = 1$ онда мора бити да $p_j \mid s_1$ за l дељиво са p_j, што је контрадикција. Штавише, како је $p_j \in 2\mathbb{N}+1$ и $p_j \nmid d_1$, према Леми 3.11 важи да се y_1 може записати као збир два сабирка $y_1'+y_1''$, пошто постоје y_1' и y_1'' који нису дељиви са p_j тако да је $y_1'+y_1'' \equiv (l-p_j t)d_1^{-1} \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, где је $p_j t = d_{u_j+1} i_{u_j+1} + \cdots + d_t y_t$. Дакле, у овом случају су нам потребне две гране за делове пута који одговарају модулима p_1 и p_j. Коначно, закључујемо да се дужина пута повећава за један ако је потребна једна грана за део пута који одговара модулу p_1 у случају $\alpha_1 = 1$. Такође приметимо да ове две гране могу да досегну вредност $r(p_1^{\alpha_1}) + r(p_j^{\alpha_j})$ ако и само ако $\alpha_j = 1$. Ако постоје два проста броја $p_{j_1} > 2$ и $p_{j_2} > 2$ која не деле d_1, за $t+1 \le j_1, j_2 \le k$, може се одмах видети да постоје y_1', y_1'' по модулу p_{j_i} тако да је $p_{j_i} \nmid y_1', y_1''$, $1 \le i \le 2$ и дужина пута се не може повећати. Тиме доказујемо да је дужина пута увећана за један ако и само ако произвољан делилац није дељив са тачно два проста фактора p_i и p_j, где је $1 \le i \le t$, $t+1 \le j \le k$ и $\alpha_i = \alpha_j = 1$. Ако сада изаберемо l тако да једначина (3.39) има максималан број сабирака, а то је за $r(p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t})$, добијамо да је дијаметар графа једнак $r(n)$ за $n \in 2\mathbb{N}+1$. На овај начин смо такође доказали да је дијаметар мањи од $r(n)$ и $r(n)+1$, за $n \in 4\mathbb{N}$ и $4\mathbb{N}+2$, респективно ако је $p_1 = 2$. Стога, у наставку претпостављамо да је $p_1,\dots,p_t \in 2\mathbb{N}+1$.

Претпоставимо сада да је $n \in 2\mathbb{N}$. Ако је $p_j = 2$, слично као у претходној дискусији можемо закључити да постоје $s_1,\dots,s_t$ по модулу p_j за $u_j > 2$, те нам нису потребне никакве додатне гране за пут од 0 до l. Штавише, ако је $u_j = 1$, на основу Леме 3.11 следи да се y_1 може записати као збир три сабирка $y_1'+y_1''+y_1'''$, $p_j \nmid y_1', y_1'', y_1'''$. У овом случају су нам потребне три гране за делове пута који одговарају модулима p_1 и p_j и ове три гране достижу вредност $r(p_1^{\alpha_1}) + r(p_j^{\alpha_j}) + 1$ ако и само ако је $\alpha_1 = \alpha_j = 1$. Овим доказујемо, да под условима датим у делу $ii)$ тврђења, дијаметар графа достиже $r(n)+1$. Штавише, ако је $n \in 4\mathbb{N}$ онда $r(p_1^{\alpha_1}) + r(p_j^{\alpha_j}) + 1 > 3$ и $r(p_1^{\alpha_1}) + r(p_j^{\alpha_j}) = 3$ ако и само ако је $\alpha_1 = 1$. Тако закључујемо да под условима из дела $i)$ дијаметар графа достиже вредност $r(n)$, за $n \in 4\mathbb{N}$.

Да бисмо у потпуности доказали тврђење $i)$ и $ii)$, морамо доказати да ако је $p_j = 2$ и $u_j = 2$ дужина пута од 0 до l не може бити већа или једнака од $r(n)+1$ за $n \in 4\mathbb{N}+2$ и $r(n)$ за $n \in 4\mathbb{N}$. Заиста, поново према Леми 3.11, потребне су нам три гране (y_1', y_1'' и y_2) за делове пута који одговарају модулима p_1, p_2 и p_j и како је $r(p_1^{\alpha_1}) + r(p_2^{\alpha_2}) + r(p_j^{\alpha_j})$ увек веће или једнако три, види се да је $r(p_1^{\alpha_1}) + r(p_2^{\alpha_2}) + r(p_j^{\alpha_j}) + 1 > 3$ за $n \in 4\mathbb{N}+2$ и $r(p_1^{\alpha_1}) + r(p_2^{\alpha_2}) + r(p_j^{\alpha_j}) > 3$ за $n \in 4\mathbb{N}$.

Сада ћемо доказати делове *iii*) и *iv*) тврђења. Прво, претпоставимо да постоје $p_1, \ldots, p_t$ тако да је $\alpha_1, \ldots, \alpha_t > 1$. Према доказу Леме 3.10 пут од 0 до l, за одређене вредности $0 \leq l \leq n-1$ и $d_1, \ldots, d_t$ који задовољавају *i*) из Теорема 3.24, може се записати у облику

$$d_1(y_1' + y_1'') + d_2(y_2' + y_2'') + \cdots + d_t(y_t' + y_t'') \equiv l \pmod{p_j^{\alpha_j}},$$

за $1 \leq j \leq t$. Пратећи горњу дискусију закључујемо да за свако $p_j > 2$, $t+1 \leq j \leq k$ тако да је $p_j \nmid d_s$, $1 \leq s \leq t$, можемо пронаћи y_s' и y_s'' по модулу p_j тако да $p_j \nmid y_s', y_s''$. Слично, ако је $p_j = 2$ и $p_j \nmid d_s$ за неки $1 \leq s \leq t$, онда не можемо пронаћи y_s' и y_s'' по модулу p_j такве да је $p_j \nmid y_s', y_s''$. Стога замењујемо ове две гране $y_s'+y_s''$ са три гране $y_s'+y_s''+y_s'''$ по модулу p_j тако да $p_j \nmid y_s', y_s'', y_s'''$. Дакле, ако је $n \in 2\mathbb{N}+1$ не можемо пронаћи l тако да нам треба више од $2t$ сабирака, а за $n \in 2\mathbb{N}$ то је могуће повећањем броја сабирака за један.

Коначно, ако не постоје $p_1, \ldots, p_t$ тако да је $\alpha_1, \ldots, \alpha_t > 1$ онда постоји делилац d_i такав да је $p_u \nmid d_i \Rightarrow \alpha_u = 1$ за $1 \leq u \leq k$. Са друге стране, пошто постоји највише један прост фактор p_i од n тако да је $\alpha_i = 1$, видимо да је p_i једини фактор који не дели d_i (ако постоји) и за све остале просте факторе важи $p_u \mid d_i$, $1 \leq u \neq i \leq k$, где је $\alpha_u > 1$. Према доказу Леме 3.10 пут од 0 до l, за одређене вредности $0 \leq l \leq n-1$, се може написати на следећи начин

$$d_1(y_1' + y_1'') + \cdots + d_i y_i + \cdots + d_t(y_t' + y_t'') \equiv l \pmod{p_j^{\alpha_j}},$$

за $1 \leq j \leq t$ (максимални број сабирака је једнак $2t-1$ узимајући у обзир модуле $p_1, \ldots, p_t$). Као што смо видели за било који $p_j > 2$, $t+1 \leq j \leq k$ тако да је $p_j \nmid d_s$, $1 \leq s \neq i \leq t$ не можемо повећати број сабирака и за $p_j = 2$, $t+1 \leq j \leq k$ тако да је $p_j \nmid d_s$, $1 \leq s \neq i \leq t$ можемо повећати број сабирака за један, али не можемо достићи вредност $2t+1$.

□

Напомена 3.2. *На основу i) и ii) тврђења можемо приметити да постоји подскуп* $\{d_{f(t+1)}, \ldots, d_{f(k)}\}$ *скупа делилаца* D *такав да постоје* *тачно два проста делиоца* $p_i, p_{f(i)} \nmid d_{f(i)}$ *и* $p_i, p_{f(i)} \| n$, *за* $t+1 \leq i \leq k$. *Сада, ако је* $s(n) = |\{i \mid \alpha_i = 1,\ 1 \leq i \leq k\}|$ *закључујемо да је* $2(k-t) \leq s(n)$, *па је зато* $k - \lfloor \frac{s(n)}{2} \rfloor \leq t < k$. *Дакле, тврђења* $i)$ *и* $ii)$ *важе за скупове делилалаца кардиналности* $k - \lfloor \frac{s(n)}{2} \rfloor \leq t < k$, *а за кардиналности* $t < k - \lfloor \frac{s(n)}{2} \rfloor$ *се врло лако може видети да је* $diam(\mathrm{G}_n(d_1, \ldots, d_t)) \leq 2t$ *ако је* $n \in 2\mathbb{N}+1$ *и* $diam(\mathrm{G}_n(d_1, \ldots, d_t)) \leq 2t+1$ *ако је* $n \in 2\mathbb{N}$ *(резоновање је аналогно оном у деловима* $iii)$ *и* $iv)$*).*

Приметимо да не можемо повећати нити пронаћи нове класе графова чији дијаметри достижу $r(n)$ или $r(n)+1$ користећи Теореме 3.25 и 3.28, где је n ред графа. Заиста, ако је $n' \in 2\mathbb{N}+1$ онда дијаметар графа $\mathrm{G}_{n \cdot n'}(d_1, \ldots, d_t)$ остаје исти и потенцијална горња граница $r(n \cdot n')$ се не може достићи пошто $r(n \cdot n') > r(n)$. Штавише, ако је $n' \in 2\mathbb{N}$ онда $n \in 2\mathbb{N}+1$, па важи

$$diam(\mathrm{G}_{n \cdot n'}(d_1, \ldots, d_t)) = diam(\mathrm{G}_n(d_1, \ldots, d_t)) + 1 \leq r(n) + 1 \leq r(n \cdot n').$$

Није тешко уочити да ако је $diam(\mathrm{G}_{n \cdot n'}(d_1, \ldots, d_t)) = r(n \cdot n')$ онда је $n' = 2$ и стога је $n \cdot n' \in 4\mathbb{N}+2$. Међутим, како је $n \cdot n' \in 4\mathbb{N}+2$, на основу дела $ii)$ Теореме 3.28 постоје $d'_1, \ldots, d'_t$ тако да је $diam(\mathrm{G}_{n \cdot n'}(d_1, \ldots, d_t))$ једнак $r(n \cdot n') + 1$.

Сада, ако је $n \cdot n'$ дељиво са највише једним простим фактором, нове класе графова чији дијаметри достижу границе $2t$ и $2t+1$ могу бити пронађене у случајевима $n \cdot n' \in 2\mathbb{N}+1$ и $n \cdot n' \in 2\mathbb{N}$, редом.

Са друге стране, ако n има највише један делилац $p_i \| n$ и $n \cdot n'$ је дељиво са најмање два делиоца p_i и p_j тако да је $p_i, p_j \| n \cdot n'$, онда имамо за $n \in 2\mathbb{N}+1$, $n' \in 2\mathbb{N}$ $D = \{d_1, \ldots, d_t\}$ релацију

$$diam(\mathrm{G}_{n \cdot n'}(D)) = diam(\mathrm{G}_n(D)) + 1 \leq 2t+1 \leq 2(k-1)+1 \leq r(n) < r(n \cdot n').$$

Слично, ако је $n' \in 2\mathbb{N}+1$ и $n \in 2\mathbb{N}$ можемо закључити на сличан начин да је $diam(\mathrm{G}_{n \cdot n'}(d_1, \ldots, d_t)) = diam(\mathrm{G}_n(d_1, \ldots, d_t)) \leq 2t+1 < r(n \cdot n')$. Пошто је $n \cdot n'$ дељиво са најмање два делиоца p_i и p_j тако да је $\alpha_i = \alpha_j = 1$, према $i)$ и $ii)$ горњег тврђења постоји скуп делилаца $d'_1, \ldots, d'_t$ такав да је $diam(\mathrm{G}_{n \cdot n'}(d'_1, \ldots, d'_t)) \geq r(n \cdot n')$ и стога не можемо повећати нити пронаћи нове класе графова чији дијаметри достижу максималне вредности коришћењем Теореме 3.25.

На крају дајемо формулу за максимални дијаметар графа датог реда n и скупа делилаца D чија је кардиналност t, тј.

$$\max(diam(\mathrm{G}_n(D))) = \begin{cases} r(n), & t = k \\ r(n)+1, & n \in 4\mathbb{N}+2,\ s(n) \geq 2,\ k - \lfloor \frac{s(n)}{2} \rfloor \leq t < k \\ r(n), & n \notin 4\mathbb{N}+2,\ s(n) \geq 2,\ k - \lfloor \frac{s(n)}{2} \rfloor \leq t < k \\ 2t+1, & n \in 2\mathbb{N},\ s(n) \geq 2,\ t < k - \lfloor \frac{s(n)}{2} \rfloor \\ 2t, & n \in 2\mathbb{N}+1,\ s(n) \geq 2,\ t < k - \lfloor \frac{s(n)}{2} \rfloor \\ 2t+1, & n \in 2\mathbb{N},\ s(n) \leq 1,\ t < k \\ 2t, & n \in 2\mathbb{N}+1,\ s(n) \leq 1,\ t < k. \end{cases} \tag{3.41}$$

У неким реалним применама добро је знати максимални дијаметар интегралних циркулантних графова датог реда n.

Довољно је проверити да ли постоји неки $\mathrm{G}_n(D)$ чији је максимални дијаметар $2|D|+1$ или $2|D|$ и већи је од $r(n)+1$ или $r(n)$. Из (3.41) следи да дијаметар графа $\mathrm{G}_n(D)$ може достићи $2|D|+1$ или $2|D|$, ако је $s(n) \leq 1$ или $s(n) \geq 2$ и $t < k - \lfloor \frac{s(n)}{2} \rfloor$. Сада, претпоставимо прво да $s(n) \leq 1$. Ако уочимо низ неједнакости

$$diam(\mathrm{G}_n(D)) \leq 2|D|+1 \leq 2(k-1)+1 \leq 2k-s(n) = s(n)+2(k-s(n)) = r(n),$$

онда видимо да се у овом случају не може наћи класа графова са дијаметром већим од $r(n)$.

Ако је $s(n) \geq 2$ и $t < k - \lfloor \frac{s(n)}{2} \rfloor$ онда имамо

$$diam(\mathrm{G}_n(D)) \leq 2|D|+1 \leq 2(k-\lfloor \frac{s(n)}{2} \rfloor -1)+1 = 2k-(s(n)-1)-1 = r(n),$$

па зато закључујемо да је максимални дијаметар једнак $r(n)+1$ ако $n \in 4\mathbb{N}+2$ и $s(n) \geq 2$, или $r(n)$ у супротном.

Са друге стране, примећујемо да не можемо побољшати доњу границу у неједнакости (3.26) за дато n и било коју кардиналност скупа делилаца D. Заиста, према Теореми 9 из [44] имамо да је $diam(\mathrm{G}_n(1)) = 2$ ако и само ако је n степен двојке или је n непаран (у оба случаја имамо додатни услов да је n сложен). Ово имплицира да је $diam(\mathrm{G}_n(1, d_2, \ldots, d_t))$ $= 2$, за било које t и поменуте вредности n (све док је $\{1, d_2, \ldots, d_t\} \neq D_n$).

У другом случају, за $n = 2^{\alpha_1} m$, где је $m > 1$ непаран и $\alpha_1 \geq 1$, можемо доказати да је $diam(\mathrm{G}_n(1, 2^{\alpha_1})) = 2$. Заиста, за сваки $0 \leq l \leq n-1$, такав да је l паран, доказаћемо постојање l у облику $s_1 + s_2 \equiv l \pmod{n}$ тако да је $\mathrm{nzd}(s_1, n) = 1$, $\mathrm{nzd}(s_2, n) = 1$. Сада, нека је p_i

произвољан прост делилац од n такав да је $S_{p_i}(n) = \alpha_i$. Решавањем горњег система конгруенцијских једначина по модулу $p_i^{\alpha_i}$ добијамо да је $s_1 \equiv l - s_2 \not\equiv p_i u \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ и $s_2 \not\equiv 0 \pmod{p_i}$ (што је еквивалентно са $s_2 \not\equiv p_i v \pmod{p_i^{\alpha_i}}$), за $0 \leq u, v < p_i^{\alpha_i - 1} - 1$. Дакле, добијамо $s_2 \not\equiv \{p_i v, l - p_i u\} \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, па се може закључити да је максималан број вредности које s_2 по модулу $p_i^{\alpha_i}$ не може узети, једнак $2p_i^{\alpha_i - 1}$. Овај број је мањи од броја остатака по модулу $p_i^{\alpha_i}$ за било који p_i (пошто је l паран), тако да овај систем има решење у овом случају.

Претпоставимо сада да је $l \in 2\mathbb{N} + 1$. Налазимо s_1 и s_2 такви да је $s_1 + s_2 \equiv l \pmod{n}$, $\mathrm{nzd}(s_1, n) = 1$ и $\mathrm{nzd}(s_2, n) = 2^{\alpha_1}$. Слично као у претходном расуђивању, можемо закључити да се горе наведени услови могу свести на следећи систем $s_2 \not\equiv \{p_i v, l - p_i u\} \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, за $2 \leq i \leq k$ и $s_2 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha_1}}$. Како је $p_i > 2$ овај систем има решење. Коначно закључујемо да је $diam(\mathrm{G}_n(1, 2^{\alpha_1}, d_3, \ldots, d_t)) = 2$, за било које t и поменуте вредности n (све док је $\{1, 2^{\alpha_1}, d_3, \ldots, d_t\} \neq D_n$).

3.5 Сложеност израчунавања и перформансе модела

У овом одељку испитујемо сложеност извршавања графовских модела чија је матрица суседства модела Теплицова. Да би се решио овај задатак, најпре ћемо одредити сложености спектралних декомпозиција класа циркулатних графова добијених у претходним одељцима (пошто је идеја апроксимирати Теплицову матрицу погодном цикличном). Пре свега се задржавамо на спектру, с обзиром да су сопствени вектори дати формулом (1.7).

Најпре израчувамо сложеност Рамануџанове функције $c(j, n)$, $0 \leq j \leq n - 1$ дефинисане формулом (1.9), узевши у обзир да се путем ове функције налази спектар графова $\mathrm{G}_n(D)$ и X_n. Приметимо да важи $\mathrm{nzd}(j, n) = \mathrm{nzd}(\mathrm{nzd}(j, n), n)$, па последично имамо да је $t_{n,j} = t_{n,\mathrm{nzd}(j,n)}$ и $c(j, n) = c(\mathrm{nzd}(j, n), n)$. Одавде закључујемо да није потребно израчунати све вредности $c(j, n)$, за фиксирано n и свако $0 \leq j \leq n - 1$, већ је довољно израчунати само оне вредности $c(d, n)$, где је $d \in D_n$. Како је број делилаца природног броја n мањи или једнак од $2\sqrt{n}$, то број корака потребних за израчунавање функција $c(j, n)$, $0 \leq j \leq n-1$, спада у класу асимптотске временске сложености $O(\sqrt{n})$.

Даље, ако најпре извршимо факторизацију броја n, што можемо урадити у временској сложености $O(\sqrt{n})$, онда пошто $t_{n,j} \mid n$, тј. $t_{n,j} = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, довољно је израчунати степене $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Пошто β_1 добијамо као број понављања поступка испитивања дељивости n са p_1, као и њиховог дељења, то значи да ћемо $\beta_1, \ldots, \beta_k$ наћи у броју корака $\beta_1 + \cdots + \beta_k$. Са друге стране, како је $p_1^{\beta_1+\cdots+\beta_k} \leq n \leq p_k^{\beta_1+\cdots+\beta_k}$, имамо да се број корака $\beta_1 + \cdots + \beta_k$ може наћи у времеској сложености $O(\log n)$. Функције μ и φ такође се извршавају у логаритамској временској сложености. Коначно можемо закључити да се функција $c(j,n)$ за фиксиране j и n извршава у логаритамској сложености уколико знамо канонску факторизацију броја n. Коначно можемо закључити да целокупан спектар графа X_n, $\lambda_j = c(j,n)$, можемо извршити у $|D_n|$ корака уз претходно извршавање алгоритма канонске факторизације броја n, па је укупна сложеност $O(\sqrt{n}+\sqrt{n}\log n)$, што је мања сложеност од линеарне. Подсетимо да се спектар произвољне цикличне матрице може ефикасно одредити у сложености $O(n \log n)$ брзом Фуријеовом трансформацијом.

Међутим, ова сложеност израчунавања спектра се може додатно побољшати уколико се примети да се X_n може декомпоновати као Кронекерски производ графова $X_{p_i^{\alpha_i}}$, где је $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (релација (1.14)). На основу Теореме 3.7 имамо да је сваки од графова јако регуларан, тј. има три различите сопствене вредности, па како се спектар графа X_n може добити множењем сопствених вредности графова $X_{p_i^{\alpha_i}}$ (у производима из сваког од k спектара множимо по тачно једну сопствену вредност), за $1 \leq i \leq k$ (видети релацију (1.15)) имамо да је сложеност израчунавања овог метода $O(3^k)$. Како је средњи ред величине за k једнак $\log\log n$, добијамо да сложеност израчунавања спектра спада у $O(\log n)$.

На основу претходна два одељка имамо да граф $\mathrm{G}_n(D)$, где је $D = \{\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\}$, има најмањи спектрални покривач и највећи дијаметар у класи свих интегралних циркулантних графова реда n. Већи дијаметар и мањи спектрални покривач имплицира мањи главни део спектра. У радовима [21] и [71] је констатовано да циклична матрица која добро апроксимира Теплицову матрицу има све сопствене вредности осим најмање и највеће сопствене вредности спектра које су густо кластероване око средње вредности. Ово значи да су поменути графови $\mathrm{G}_n(D)$ добри кандидати за апроксимацију Теплицове матрице графа модела.

Најпре, можемо примети да за $j = p_i^{\beta_i} j_0$, где $p_i \nmid j_0$, важи да је

$$c(j, p_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} 0, & \beta_i \leq \alpha_i - 2 \\ -p_i, & \beta_i = \alpha_i - 1 \\ 1, & \beta_i = \alpha_i. \end{cases} \tag{3.42}$$

Одавде имамо да се функција $c(j, p_i^{\alpha_i})$ извршава у $O(1)$, за свако $1 \leq i \leq k$ и $0 \leq j \leq n-1$. Пошто је средња вредност реда величине за k једнака $O(\log\log n)$ [74, 30], то је сложеност израчунавања сваке сопствене вредности једнако $O(\log\log n)$, односно целог спектрума $O(n \log\log n)$.

Сада за дату Теплицову матрицу A задату елементима прве колоне и врсте $a_{-(n-1)}, \ldots$
$, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, можемо одредити њој најближу цикличну матрицу C по Фробенијусовој норми чија је прва врста $c_0, \ldots, c_{n-1}$. Из овог услова произилази да је $c_i = \frac{ia_{-(n-i)}+(n-i)a_i}{n}$ за свако $-(n-1) \leq i \leq n-1$ (видети [21]). Сада, ову цикличну матрицу апроксимирамо матрицом C' чија се прва врста састоји од елемената $c'_0, \ldots, c'_{n-1}$, где је

$$c'_j = w_1 = (\sum_{\substack{i=1 \\ \mathrm{nzd}(i,n)=1}}^{n-1} c_i)/\varphi(n),$$

за свако $1 \leq j \leq n-1$ тако да је $\mathrm{nzd}(j, n) = 1$ и

$$c'_j = w_2 = (\sum_{\substack{i=1 \\ \mathrm{nzd}(i,n)\neq 1}}^{n-1} c_i)/(n-1-\varphi(n)),$$

за свако $1 \leq j \leq n-1$ тако да је $\mathrm{nzd}(j, n) \neq 1$. Одавде закључујемо да је спектар цикличне матрице облика $w_1\lambda_i + w_2(-1-\lambda_i)$, за $1 \leq i \leq n-1$, где је λ_i спектар графа X_n. Како је сложеност израчунавања матрице C једнака $O(n)$, ова сложеност надјачава сложеност израчунавања спектра матрице C' па је укупна сложеност апроксимације $O(n)$.

Ако користимо спектар графа $\mathrm{G}_n(D)$, где је $D = \{\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}}\}$, тада можемо израчунати матрицу C' на следећи начин:

$$c'_j = w_1 = (\sum_{i \in \cup_{l=1}^{k} G_n(\frac{n}{p_l^{\alpha_l}})} c_i)/\varphi(n),$$

за свако $j \in \cup_{i=1}^{k} G_n(\frac{n}{p_i^{\alpha_i}})$ и

$$c'_j = w_2 = (\sum_{i \notin \cup_{l=1}^{k} G_n(\frac{n}{p_l^{\alpha_l}})} c_i)/(n-1-\varphi(n)),$$

за свако $j \notin \cup_{i=1}^{k} G_n(\frac{n}{p_i^{\alpha_i}})$. Слично као у претходном случају имамо да је спектар цикличне матрице облика $w_1\lambda_i + w_2(-1-\lambda_i)$, за $1 \leq i \leq n-1$, где је λ_i спектар графа $\mathrm{G}_n(D)$. У овом случају корак израчунавања спектра графа $\mathrm{G}_n(D)$ по временској сложености надјачава корак формирања матрице C, па је сложеност метода $O(n \log\log n)$.

Просец генерисања податак је сличан оном који је коришћен у експерименталној поставци из претходног поглавља, па га нећемо дубље елеборирати. Наиме, на вектор Y_{train}, са координатама y_i, генерисаног из нормалне расподеле $\mathcal{N}(0,\,1)$ додаје се фиксина шум из расподеле $\mathcal{N}(0,\,0.33)$, а затим се на гране графа G, добијеног из генератора синтетичких графова чија је матрица суседства Теплицова са фиксним нивоом гранксе густине од 30%, додају тежине које су експоненцијалне функције разлике координата. Другим речима, тежинска матрица суседства графа G садржи тежине $e^{-(y'_i - y'_j)}$, за $(i,j) \in E(G)$, где смо y'_i добили из y_i додавањем шума из расподеле $\mathcal{N}(0,\,0.25)$.

Уколико користимо апроксимацију базирану на унитарном Кејлијевом графу, при чему је почетни граф реда 1500 добићемо да је ниво средње-квадратне грешке 0.33 док је време извршења модела 0.17 ± 0.02. Са друге стране, ако користимо апроксимацију базирану на циркулантном графу $\mathrm{G}_n(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{n}{p_k^{\alpha_k}})$ добијамо да је средње-квадратна грешка несто нижа и износи 0.23 док је време извршења модела више и износи 0.25 ± 0.03. Међутим, уколико се број чворова графа повећава $n \in \{5000, 20000, 30000, 40000\}$, док је фиксан ниво гранске густине од 30% задржан, примећујемо да се средње-квадратна грешка модела базираног на циркулатном графу смањује до неке границе, док то није случај са средње-квадратном грешком модела базираног на графу X_n. Разлог томе лежи у чињеници што се Фробениусова норма апроксимације спрам реда матрице у овим случајевима смањује. Време извршења модела зансованог на унитарном Кејлијевом графу константно бива мање у односу на други модел, што је и било заочекивати с обзиром на разлике у асимптотским временским сложеностима. Слични резултати и закључци се добијају и у случају блок-Теплицових матрица.

4 Закључак

У дисертацији су презентовани матрични методи што мање асимптотске сложености којима би се што прецизније проценили непознати параметри неусмереног графичког модела приликом њиховог нумеричког извршавања и израчунавања. Прецизније, нумерички (најчешће градијентни) метод оперише линеарном матричном функцијом Лапласове матрице графа модела (матрицом прецизности), па је за итеративно ажурирање параметара модела потребно налажење трага инверза Лапласове матрице. Пошто је проблем оптимизације могуће формулисати у еквивалетни проблем налажења оптимума рационалних функција по непознатим параметрима модела спектралном композицијом Лапласове матрице графа, у дисертацији смо обрадили одређене апроксимативне методе за налажење спектра Лапласове матрице графа модела, како у специјалним случајевима, тако и у општем. Итеративни методи за налажење сопствених вредности и вектора извршени над целом матрицом графа су рачунски сложени (QR, Lancozs, Power iterations, Inverse iterations), па се апроксимативни методи углавном своде на налажење матрица нижег ранга које би апроксимирале Лапласову матрицу графа модела, а која би задржала доминантна спектрална својства поменуте матрице.

Пошто се свака реална мрежа може на ефективни начин представити Кронекерским графом, природно се намеће идеја да се граф модела апроксимира Кронекерским производом два графа у односу на неку норму. Проблем налажења ових графова своди се на примену метода за налажење сингуларне декомпозиције ранга 1 на одређени тип пермутационе матрице изведене из матрице суседства графа модела, па овај корак проузрокује додатно увећање сложености алгоритма спектралне декомпозиције. Међутим, ова идеја се не може директно применити, с обзиром на то да се спектрална декомпозиција Лапласове матрице Кронекерског производа графова не може извести употребом спектралне декомпозиције графова чинилаца, те је било потребно осмислити нове апроксимативне методе за решење овог проблема, што је био један од циљева дисертације. Напоменимо да се карактеризација Лапласовог спектра и сопствених вектора Кронекерског производа графова коришћењем Лапласових спектара фактор-графова до данас сматра отвореним проблемом. Процењене сопствене вредности и сопствени вектори су поређени са оригиналним у односу на различите врсте рандом графова и нивое гранских густина. Добијене процене спектара су веома блиске нумерички израчунатим спектрима са процентима грешака у распону од $\pm 10\%$ за већину сопствених вредности, за ретке графове. Штавише, теоријски је показано да процењене сопствене вредности постају тачније у односу на стварне вредности када ред графа расте или се повећава ниво гранске густине. Овим је објашњена чињеница да је расподела процентуалних грешака између процењених и оригиналних сопствених вредности скоро равномерно распоређена око 0. Тачност процењених сопствених вектора исказано је кроз метрику коефицијената корелације, где је израчунавањем експлицитних формула за одређене коефицијенте корелације уочено да оне могу да имају веома високе вредности (што је и експериментално показано). У дисертацији смо применили процене Лапласових сопствених вредности и одговарајућих сопствених вектора за Кронекерски производ графова на неусмерени графовски модел. Да бисмо тестирали предложене моделе, спроведени су експерименти на три типа случајних графова и постигнуто је значајно побољшање тачности у поређењу са моделом који се користи у [35]: добијене средње-квадратне грешке предложених апроксимационих модела су најмање 3 пута ниже од средње-квадратних грешака претходно предложених модела. Са друге стране, средње-квадратна грешка ових модела је нешто већа од оригиналног графовског модела уз реда величине мању сложеност израчунавања метода.

Директна декомпозиција Лапласове матрице графа модела је још један правац у којем се одвијало истраживање у смислу побољшања ефикасности модела. Овим приступом би се заобишао проблем карактеризације Лапласовог спектра графа у функцији Лапласових спектара његових фактор-графова, чиме би се смањила комплексност извршавања метода. Наиме, добро је познато да се сложеност израчунавања линеарног Теплицовог система може смањити апроксимацијом Теплицове матрице цикличном и то одређеним размештањем елемената прве врсте Теплицове матрице или апроксимацијом у односу на неку норму. Овај апроксимативни метод је само специјални случај декомпозиције матрице путем суме цикличних матрица са одговарајућом релаксацијом. Зато смо окарактерисали графове са одређеним спектралним својствима у класи циркулантних графова да бисмо допринели ефикасној циркуларној декомпозицији графа модела. У случају једночлане декомпозиције коришћене су цикличне матрице на којима би се спектрална декомпозиција ефикасно извршила, као што су матрице суседства графова малог дијаметра: унитарни Кејлијеви графови, Кронекерски производи циркулантних графова, графови са малим бројем сопствених вредности, итд. Повећањем дијаметра, повећава се и тачност процене параметара модела, док се брзина конвергенције метода по правилу смањује. Дијаметар графа је у директној кореспонденцији са модулом друге највеће сопствене вредности, а њена величина утиче на тзв. главни део спектра, па смо у наставку презентовали резултате којима се израчунава максимална вредност дијаметра графа у класи циркулантних графова датог реда, при чему су окарактерисани сви такви ектремални графови. Такође, мањи спектрални покривач имплицира мањи главни део спектра графа, па су одређени минимална најмања сопствена вредност и минимални спектрални покривач у класи циркулантних графова датог реда, као и графови који имају оваква својства. Изведене су анализе асимптотске сложености, као и нумеричка израчунавања којима је показано да употреба горњих теоријских резултата даје добре резултате по питању тачности модела у случају када је матрица суседства графа квази-периодична (Теплицова, блок-Теплицова, итд.).

Апроксимација Лапласове матрице графа модела своди се на налажење матрице довољно великог ранга која се може ефикасно факторисати. Да би се решио проблем повећања ранга матрице којом се апроксимира матрица суседства графа модела, даља истраживања могу се развијати у следећим правцима:

- представљање матрице суседства у виду збира Кронекерских производа два графа. Овај проблем се може еквивалентно формулисати као проблем налажења k највећих сингуларних вредности матрице суседства, као и њихових одговарајућих сингуларних вектора, где је k број сабирака у репрезентацији апроксимативног графа чија је матрица суседства збир Кронекерских производа матрица;

- апроксимација графа модела неким Кронекерским графом нижег ранга који поседује доминантна спектрална својства полазног графа (у литератури се под термином Кронекерски графови сматрају графови добијени као производи и степени одређеног броја Кронекерских графова);

- моделирање Лапласове матрице графа Декартовим производом графова;

- процена спектра и сопствених вектора Хермитских Лапласових матрица Кронекерског производа усмерених графова;

- представљање графа модела Кронекерским производом циркуларног графа малог дијаметра (унитарни Кејлијев, јако-регуларни) и произвољног неусмереног графа чија матрица суседства има задовољавајући ранг;

- одређивање оптималног броја елемената (сабирака) у циркуларној декомпозицији тако да се направи баланс између разумног губитка тачности модела и проређивања матрице да би се успешно применила брза Фуријеова трансформација у спектралној декомпозицији.

4.1 Научни допринос дисертације

Најважнији теоријски резултати који представљају научни допринос ове дисертације су:

- нове апроксимације графа модела графовима са Кронекерском структуром коришћењем сингуларне декомпозиције графовских матрица модела;

- нови начини ефикасне спектралне декомпозиције Лапласове матрице графа модела коришћењем Кронекерског производа сопствених вектора (нормализованих) Лапласових матрица фактор-графова и налажењем одговарајућих апроксимативних формула за сопстевне вредности Лапласових матрица модела, чиме се постиже веома мало одступање у процени параметара модела уз мању сложеност израчунавања метода;

- добијање оптималних вредности метрика које показују тачност горе наведених апроксимација за сопствене векторе и сопствене вредности Лапласове матрице графа модела. Коефицијент корелације метрика за апроксимиране сопствене векторе коришћењем Кронекерског производа соптвених вектора (нормализованих) Лапласових матрица фактор-графова узима вредности око 0.9 за ретке графове, док одступање за метрику дистрибуција релативне грешке сопствених вредности не прелази 10%, а медијана се поклапа са x-осом;

- теорема којом се доказује да се апроксимације за сопствене вредности приближавају стварним сопственим вредностима Лапласове матрице Кронекерског графа када се ниво гранске густине графа повећава за фиксирани ред графа, односно када се ред графа повећава за фиксни ниво гранске густине;

- низ теорема којима се одређују егзактне формуле за одређене коефицијенте корелације апроксимативних вектора, као и за очекиване вредности коефицијената корелације;

- утврђивање неједнакости између одређених коефицијената корелације налажењем доњих граница заборављеног тополошког индекса графа модела у случају рандом графова, као и у општем случају;

- доказ да је сложеност извршавања графовских модела који користе горње апроксимативне методе мања од сложености оригинилалних графовских модела уз веома високу тачност предикције;

- карактеризација јако регуларних циркулантних графова спектралним методама;

- конструкција нових класа графова са малим бројем сопствених вредности коришћењем операција Кронекерског производа, линијског оператора и Зајделовог пребацивања;

- налажење минималне најмање сопствене вредности, као и спектралног покривача у класи циркулантних графова датог реда, као и карактеризација свих таквих графова;

- максимални дијаметар у класи циркулантних графова датог реда и одређивање таквих екстремалних графова;

- примена дводимензионалне брзе Фуријеове трансформације у циркуларним декомпозицијама и апроксимацији сопствених вредности Лапласове матрице графа модела у случајевима када су матрице графовског модела квази-периодичне.

Из претходног се може закључити да су сви добијени резултати у овом раду веома значајни у теорији графовских модела и спектралној теорији графова уопште. Део добијених резултата је већ публикован у водећим међународним часописима, док су остали у процесу припреме за објављивање.

Литература

[1] E. Agliari, F. Tavani, *The exact Laplacian spectrum for the Dyson hierarchical network*, Scientific reports, 7(1), 1–21, 2017.

[2] L. Anselin, *Spatial Econometrics: Methods and Models.* Kluwer Academic, 1988, 289.

[3] B. Arsić, M. Bašić, P. Spalević, M. Ilić, M. Veinović, *Facebook profiles clustering*, In Proceedings of the 6th International Conference on Information Society and Technology (ICIST 2016), pages 154–158, Kopaonik, Serbia, 2016. Society for Information Systems and Computer Networks.

[4] K. Balinska, D. Cvetković, Z. Radosavljević, S. Simić, D. Stevanović, *A survey on integral graphs*, Univerzitet Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat., (13), 2002, 42–65.

[5] S. Barik, R. Bapat, S. Pati, *On the Laplacian spectra of product graphs*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 39–58, 2015.

[6] M. Bašić, *Hamiltonian properties of unitary Cayley graphs*, Filomat, Volume 32, 2018, No. 1, 71–85.

[7] M. Bašić, *Characterization of strongly regular integral circulant graphs by spectral approach*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, (to appear).

[8] M. Bašić, *Graph matrices with three and four eigenvalues based on circulants*, (submitted manuscript).

[9] M. Bašić,*Minimal spread and minimal least eigenvalue of integral circulant graphs*, (submitted manuscript).

[10] M. Bašić, *Which weighted circulant networks have perfect state transfer?*, Information Sciences, 257 (2014) 193–209.

[11] M. Bašić, A. Ilić, *Polynomials of unitary Cayley graphs*, Filomat, 29(9), 2015, 2079–2086

[12] M. Bašić, A. Ilić, A. Stamenković, *Maximal diameter on a class of circulant graphs*, Lecture Notes in Computer Science/Lecture Notes in Artificial Intelligence, Algebraic Informatics, CAI 2019, Vol. 11545, 2019, 76–87.

[13] M. Bašić, A. Ilić, A. Stamenković, *Maximal diameter in integral circulant graphs*, Informatin & Computation, (to appear).

[14] M. Bašić, B. Arsić, Z. Obradović, *Another estimation of Laplacian spectrum of the Kronecker product of graphs*, Information Sciences, arXiv preprint arXiv:2102.02924 (to appear).

[15] M. Bašić, B. Arsić, Z. Obradović, *Further results on structured regression for multi-scale networks*, arXiv preprint arXiv:1909.00853.pdf(submitted manuscript).

[16] M. Bašić, A. Todorović, *Attention-based Graph Classification for Prediction in Immunotherapy Response*, Learning and Analytics in Intelligent Systems, "Applied Artificial Intelligence", First Serbian International Conference on Applied Artificial Intelligence (SICAAI), 2022.

[17] E. Bertram, P. Horak, *Some applications of graph theory to other parts of mathematics*, The Mathematical Intelligencer (Springer-Verlag, New York) (1999) 6-11.

[18] L. Bo, C. Sminchisescu, *Twin Gaussian Processes for Structured Prediction*, International Journal of Computer Vision, vol. 87, no. 1–2, pp. 28–52, 2009.

[19] J. P. Brockwell, A. R. Davis,*Time Series: Theory and Methods*, Graduate Texts in Mathematics, 1991, Springer.

[20] J. Brown, R. Hoshino, *Line graphs and circulants*, Ars Combinatoria, 105 (2012), 463–476.

[21] T. F. Chan, *An optimal circulant preconditioner for Toeplitz systems*, SIAM journal on scientific and statistical computing, 9(4):766–771, 1988.

[22] Z. Che, Z. Chen,*Lower and upper bounds of the forgotten topological index*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem, 3(76), 635–648, (2016).

[23] T. T. Chelvam, S. Raja, I. Gutman, *Strongly regular integral circulant graphs and their energies*, Bull. Inter. Math. Virtual Inst. (2012), 9–16.

[24] F. Chung, M. Radcliffe, *On the spectra of general random graphs*, The electronic journal of combinatorics, 1 (18), P215, (2011).

[25] D. Cvetkovic, *A note on construction of graphs by means of their spectra*, Publications de L'Institut Mathematiquh, 27 (41), (1980), 27–30.

[26] D. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Application*, Academic Press, New York, (1980).

[27] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, *Eigenspaces of Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[28] E. R. van Dam, *Regular Graphs With Four Eigenvalues*, Linear Algebra Appl. 226–228, 139–162, (1995).

[29] E. R. van Dam, *Nonregular Graphs with Three Eigenvalues*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 73(2), 101–118, (1998).

[30] P. Diaconis, *Asymptotic Expansions for the Mean and Variance of the Number of Prime Factors of a Number*, Dept. Statistics Tech. Report 96, Stanford, CA: Stanford University, 1976.

[31] M. De Domenico, A. Solé-Ribalta, E. Cozzo, M. Kivelä, Y. Moreno, M. Porter, S. Gómez, A. Arenas, *Mathematical formulation of multilayer networks*, Physical Review X, 3(4), 041022–1–041022–15, 2013.

[32] R. Elsässer, B. Monien, R. Preis, A. Frommer, *Optimal diffusion schemes and load balancing on product graphs*, Parallel Processing Letters, 14(01), 61–73, 2004.

[33] B. Furtula, I. Gutman, *A forgotten topological index*, J. Math. Chem., Volume 53 (2015) 1184–1190.

[34] J. Glass, M. Ghalwash, M. Vukićević, Z Obradović, *Extending the Modelling Capacity of Gaussian Conditional Random Fields while Learning Faster*, AAAI, 1596–1602, 2016.

[35] J. Glass, Z. Obradović, *Structured Regression on Multiscale Networks*, IEEE Intelligent Systems Volume 32, Issue 2, 2017, 23–30.

[36] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, New York: Springer-Verlag, 2004.

[37] G.R. Grimmett and D.R. Stirzaker , *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, 1984.

[38] M. Girvan, Mark EJ Newman, *Community structure in social and biological networks*, Proceedings of the national academy of sciences, 99(12), 7821–7826, 2002.

[39] I. Gutman, K. C. Das, *The first Zagreb index 30 years after*, MATCH Commun.Math. Comput. Chem., 50 (2004) 83–92.

[40] F. Harary, A. Schwenk, *Which graphs have integral spectra?*, in: R. Bari, F. Harary (Eds.), Graphs and Combinatorics, Springer, Berlin, 1974, p. 45.

[41] G.H. Hardy, E.M. Wright, D.R. Heath-Brown, J.H. Silverman *An introduction to the Theory of Numbers*, 6th ed, Oxford University Press, 2008.

[42] M. Kivelä, A. Arenas, M. Barthelemy, J. Gleeson, Y. Moreno, M. Porter, *Multilayer networks*, Journal of complex networks, 2(3), 203–271, 2014.

[43] A. Ilić, M. Bašić, *Path matrix and path energy of graphs*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 335, 2019, 537-541

[44] W. Klotz, T. Sander, *Some properties of unitary Cayley graphs*, Electron. J. Combin. 14 (2007), #R45..

[45] S. Kumar, M. Hebert, *Discriminative Random Fields*, International Journal of Computer Vision, vol. 68, no. 2, pp. 179–201, 2006.

[46] J. Lafferty, A. McCallum, F. Pereira, *Conditional random fields: Probabilistic models for segmenting and labeling sequence data*, Proceedings of the eighteenth international conference on machine learning, ICML, Volume 1, 282–289, 2001.

[47] J. Leskovec, D. Chakrabarti, J. Kleinberg, C. Faloutsos, Z. Ghahramani, *Kronecker graphs: An approach to modeling networks*, Journal of Machine Learning Research, Volume 11, 985–1042, 2010.

[48] O. Leveque, *https://mathoverflow.net/questions/176689/limiting-empirical-spectral-distribution-of-the-laplacian-matrix-on-an-erdos-ren*, Mathoverflow, (2014).

[49] Y. Liu, J. Carbonell, J. Klein-Seetharaman, V. Gopalakrishnan, *Comparison of probabilistic combination methods for protein secondary structure prediction*, Bioinformatics, 20(17), 3099–3107, 2004.

[50] L. Lovasz, L. Pyber, D. J. A. Welsh and G. M. Ziegler, *Combinatorics in pure mathematics, in Handbook of Combinatorics*, Elsevier Sciences B. V., Amsterdam (1996).

[51] D. Marušič, *Strong regularity and circulant graphs*, Discrete Mathematics, 78, 119–125, 1989.

[52] R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii, U. Alon, *Network motifs: simple building blocks of complex networks*, Science, 298(5594), 824–827, 2002.

[53] I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović, E. R. Glogić, *On Laplacian eigenvalues of connected graphs*, Czechoslovak Mathematical Journal, 65(2015), 529–535.

[54] D. S. Mitrinović, D. Ž. Đoković, *Polinomi i matrice*, ICS, Beograd 1975.

[55] A. Polychronopoulou, Z. Obradović, *Structured regression on multilayer networks*, In Proceedings of the 2016 SIAM International Conference on Data Mining, pages 612–620. SIAM, 2016.

[56] N. Pržulj, *Protein-protein interactions: Making sense of networks via graph-theoretic modeling*, Bioessays, 33(2), 115–123, 2011.

[57] T. Qin, Y.T Liu, X.D. Zhang, D.S. Wang, H. Li,*Global ranking using continuous conditional random fields*, Advances in neural information processing systems, 1281–1288, 2009.

[58] V. Radosavljević, S. Vučetić, Z. Obradović, *Neural gaussian conditional random fields*, Joint European conference on machine learning and knowledge discovery in databases, 614–629, 2014.

[59] V. Radosavljević, S. Vučetić, Z. Obradović, *Continuous Conditional Random Fields for Regression in Remote Sensing*, ECAI, 809–814, 2010.

[60] K. Ristovski, V. Radosavljević, S. Vučetić, Z. Obradović, *Continuous Conditional Random Fields for Efficient Regression in Large Fully Connected Graphs*, AAAI, 2013.

[61] H. Sachs, *Über Teiler, Faktoren und charakteristische Polynome von Graphen*, Teil II, Wiss. Z. TH Ilmenau 13 (1967), 405–412.

[62] A. Satyanarayana Reddy, *Adjacency Algebra of Unitary Cayley Graph*, Journal of Global Research in Mathematical Archives 1(1) (2013), 77–84.

[63] N. Saxena, S. Severini, I. Shparlinski, *Parameters of integral circulant graphs and periodic quantum dynamics*, International Journal of Quantum Information 5 (2007), 417–430.

[64] H. Sayama, *Estimation of Laplacian spectra of direct and strong product graphs*, Discrete Applied Mathematics 205 (2016), 160–170.

[65] S. Shekhar, P. R. Schrater, R. R. Vatsavai, S. Chawla, *Spatial contextual classification and prediction models for mining geospatial data*, IEEE Transactions on Multimedia, 4(2), 174–188, 2002.

[66] J. Shi, J. Malik, *Normalized cuts and image segmentation*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 22(8), 888–905, 2000.

[67] J. Slivka, M. Nikolić, K. Ristovski, V. Radosavljević, Z. Obradović, *Distributed gaussian conditional random fields based regression for large evolving graphs*. In Proc. 14th SIAM Int'l Conf. Data Mining Workshop on Mining Networks and Graphs, Philadelphia, volume 298, 2014.

[68] W. So, *Integral circulant graphs*, Discrete Mathematics 306 (2006), 153–158.

[69] A. Solberg, T. Taxt, and K. Jain, *A Markov random field model for classification of multisource satellite imagery*, IEEE transactions on geoscience and remote sensing, 34(1), 110–113, 1996.

[70] A. Sole-Ribalta, M. D. Domenico, N. E. Kouvaris, A. Diaz-Guilera, S. Gomez, A. Arenas. *Spectral properties of the laplacian of multiplex networks*, Physical Review E, 88(3): 032807, 2013.

[71] G. Strang, *A Proposal for Toeplitz Matrix Calculations*, Studies in Applied Mathematics, Volume 74, 171–176, 1986.

[72] C.F. Van Loan, N. Pitsianis, *Approximation with Kronecker products.* In *Linear algebra for large scale and real-time applications*, 293–314, Springer, 1993.

[73] C.F. Van Loan, N. Pitsianis,*The ubiquitous Kronecker product*, Volume 123 (1), 85–100, 2000.

[74] E. W. Weisstein, *Distinct Prime Factors*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource,

http:\\mathworld.wolfram.com\DistinctPrimeFactors.html.

[75] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, New Jersey, Second edition, 2001.

[76] G. Yu, H. Qu, *Hermitian Laplacian matrix and positive of mixed graphs*, Applied Mathematics and Computation, 269, 70–76, 2015.

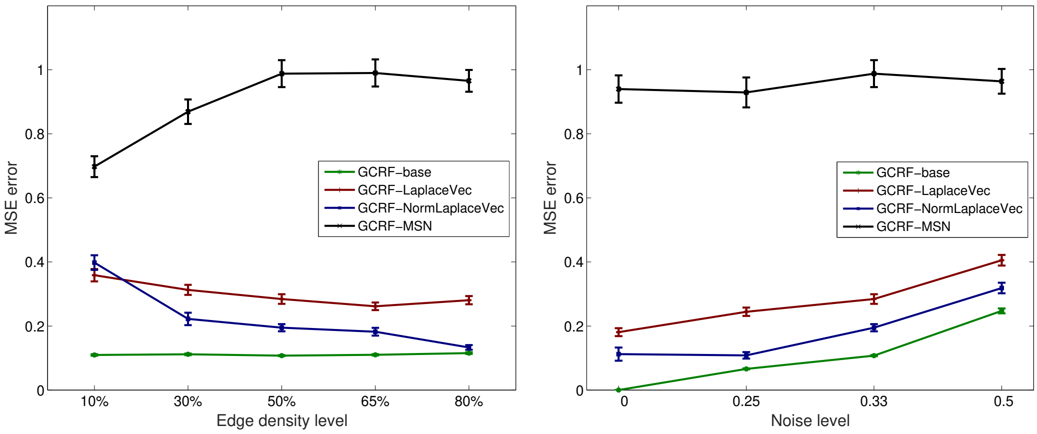
[77] G. Yu, X. Liu, H. Qu, *Singularity of Hermitian (quasi-)Laplacian matrix of mixed graphs*, Applied Mathematics and Computation, 293, 287–292, 2017.

[78] G. Yu, M. Dehmer, F. Emmert-Streib, H. Jodlbauer, *Hermitian normalized Laplacian matrix for directed networks*, Information Sciences, 495, 175–184, 2019.

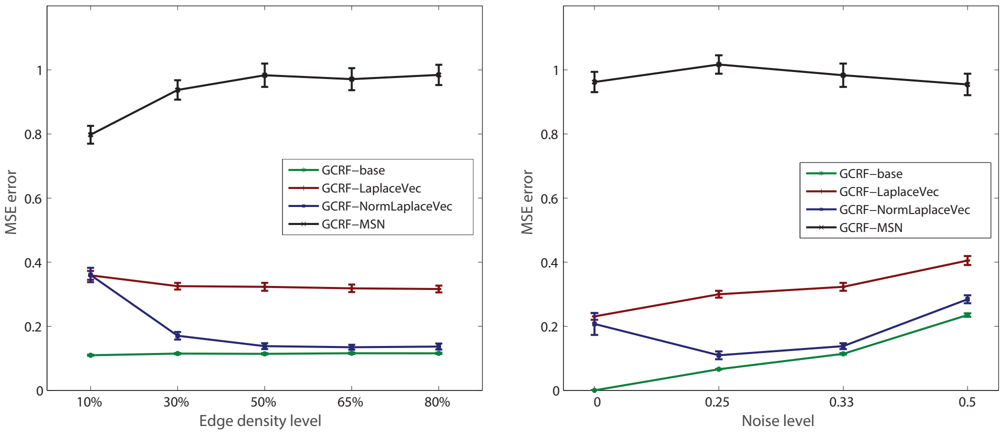
[79] F. Zhou, M. Ghalwash, Z. Obradović *A fast structured regression for large networks*, IEEE International Conference ob Big Data, 106–115, 2016.

5 Прилог А

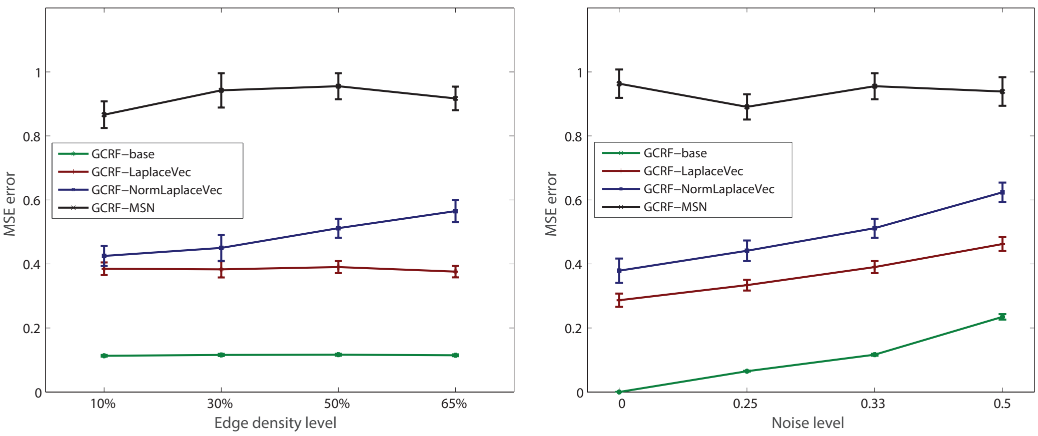
5.1 Средње-квадратна грешка модела у случају Кронекерског производа Ердош-Рени графова и Барабаши-Алберт графова



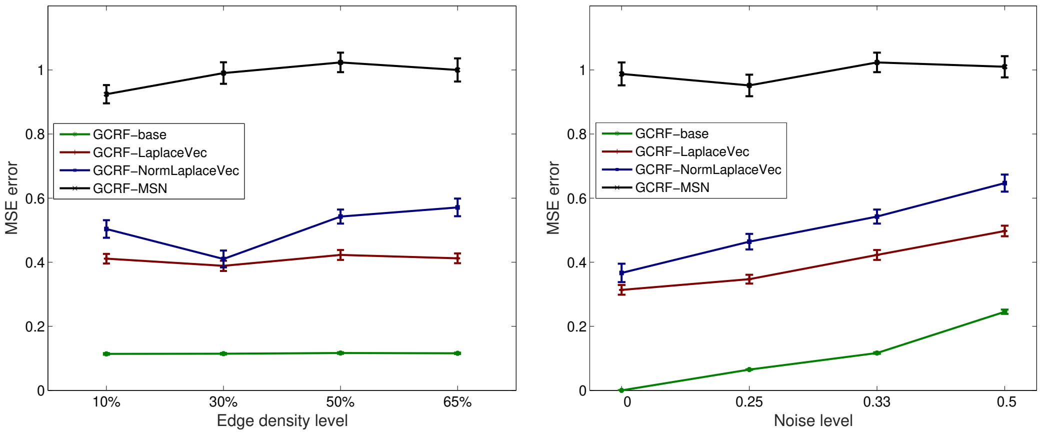
Слика 16: Тачност (средње-квадратна грешка) модела као функција гранске густине (лево) и ниво шума (десно), где је S_1 Ердош-Рени граф са 30 чворова и S_2 је Ердош-Рени граф са 50 чворова. *Лево:* одговарајући број грана графова су {43, 130, 217, 282, 348} и {122, 367, 612, 796, 980}. *Десно:* тачност модела (средње-квадратна грешка) у односу на различите шумове, за фиксирани ниво гранске густине од 50%.



Слика 17: Тачност (средње-квадратна грешка) модела као функција гранске густине (лево) и ниво шума (десно), где је S_1 Ердош-Рени граф са 50 чворова и S_2 је Ердош-Рени граф са 100 чворова. *Лево:* одговарајући број грана графова су {122, 367, 612, 796, 980} анд {495, 1485, 2475, 3217, 3980}. *Десно:* тачност модела (средње-квадратна грешка) у односу на различите шумове, за фиксирани ниво гранске густине од 50%.



Слика 18: Тачност (средње-квадратна грешка) модела као функција гранске густине (лево) и ниво шума (десно), где је S_1 Барабáси-Алберт граф са 30 чворова и S_2 је Барабáси-Алберт граф са 50 чворова. *Лево:* одговарајући број грана графова су {56, 125, 216, 225} и {141, 369, 616, 625}. *Десно:* тачност модела (средње-квадратна грешка) у односу на различите шумове, за фиксирани ниво гранске густине од 50%.



Слика 19: Тачност (средње-квадратна грешка) модела као функција гранске густине (лево) и ниво шума (десно), где је S_1 Барабáси-Алберт граф са 50 чворова и S_2 је Барабáси-Алберт граф са 100 чворова. *Лево:* одговарајући број грана графова су $\{141,\ 369,\ 616,\ 625\}$ и$\{475,\ 1476,\ 2475,\ 2500\}$. *Десно:* тачност модела (средње-квадратна грешка) у односу на различите шумове, за фиксирани ниво гранске густине од 50%.

6 Прилог Б

У дисертацији су коришћени разни програми за верификацију хипотеза и проверавање резултата. Помоћни програми су развијани у програмским пакетима MATHEMATICA и MATLAB, као и у програмском језику Java (налажење јако регуларних циркулантних графова, циркуларних графова са четири различите сопствене вредности, дијаметра, решавање оптимизационог проблема у графовском моделу, итд.).

6.1 MATHEMATICA код за генерисање циркулантних графова са малим бројем различитих сопствених вредности

```
Eigens[n_, DDivisors_] := Module[{L, i, l, ev, t, cc, num_divisors, c},
      num_divisors = Length[DDivisors];
      For[i = 1, i <= num_divisors, i++, c[i] = 1];
      L = Table[0, {n}];
      For[l = 1, l <= n, l++,
        ev = 0;
        For[i = 1, i <= num_divisors, i++,
          t = n/(DDivisors[[i]]*GCD[n/DDivisors[[i]], l - 1]);
          cc = MoebiusMu[t]*EulerPhi[n/DDivisors[[i]]]/EulerPhi[t];
          (*If[l == 3, Print[cc]];*)
          ev = ev + c[i]*cc;
          ];
        L[[l]] = ev;
        ];
      Return[L];
      ];


Ch[n_, DDivisors_] := Module[{L, L1, ptr1, ptr2, ptr3},
    L = Eigens[n, DDivisors];
    (*Print[L]*);
    ptr1 = L[[2]];
    (*Print[ptr1;*)
    For[i = 3, i <= Length[L] && L[[i]] == ptr1, i++];
```

```
    (*Print[i];*)
    If[i == Length[L] + 1, ptr2 = L[[1]] + 1, ptr2 = L[[i]]];
    (*Print[ptr2];*)
    For[i = 3, (i <= Length[L]) && (L[[i]] == ptr1  L[[i]] == ptr2), i++];
    If[i == Length[L] + 1, ptr3 = L[[1]] + 1, ptr3 = L[[i]]];
    (*Print[ptr3];*)

    If[ptr2 == L[[1]] + 1  ptr3 == L[[1]] + 1, Return[False],
      Return[Count[L, ptr1] + Count[L, ptr2] + Count[L, ptr3] == n - 1]];
    ]

Module[{DDivisors, SS, n, i, count},
  count = Table[{i, 0, 0}, {i, 1, 100}];
  For [n = 1, n <= 200, n++,
    DDivisors = Divisors[n] // Drop[#, -1] &;
    If [Length[DDivisors] > 18, Print["Skipping ", n],
      SS = Subsets[DDivisors] // Drop[#, -1] &;
      For [i = 2, i <= Length[SS], i++,
        If [GCD @@ (SS[[i]]~Join~{n}) == 1,
            If [Ch[n, SS[[i]]],
                count[[n, 2]]++;
                count[[n, 3]] = DivisorSigma[0, n] - 2;
                Print[n, " ", SS[[i]], " ", Eigens[n, SS[[i]]]];
                ];
            ];
        ];
      ];
    ];
  count // TableForm
  ]
```

6.2 Java код за налажење дијаметра циркунатног графа

```
// calculating the diameter of a graph

import java.util.Vector;
```

```java
public class Diameter {
    private int n;
    private int [][] adj;
    private int diameter;

    public Diameter(int n, int [][] adj)
    {
        this.n = n;
        this.adj = adj;
    }

    public void run ()
    {
        diameter = 0;
        int [] p = new int [n];
        Vector<Integer> queue = new Vector<Integer>();
        for (int inital = 0; inital < n; inital++)
        {
            queue.clear();
            for (int i = 0; i < n; i++)
                p [i] = 0;
            queue.add(inital);
            p [inital] = 1;
            while (queue.size() > 0)
            {
                int i = queue.get(0);
                queue.remove(0);
                for (int j = 1; j <= adj [i][0]; j++)
                {
                    if (p [adj [i][j]] == 0)
                    {
                        queue.add(adj [i][j]);
                        p [adj [i][j]] = p [i] + 1;
                    }
                }
            }
            for (int i = 0; i < n; i++)
                if (p [i] > diameter)
                    diameter = p [i];
```

```
        }
    }

    public int diameter()
    {
        return diameter - 1;
    }

}


}
```

6.3 MATLAB код за решење оптимизационог проблема у графовском моделу

```
function [e, mu, Theta] = uni_train(Ylist,Slist,Rlist)
%
tic [n,a,t] = size(Rlist); tn = t * n; Vlist = zeros(tn, n);
 ↪  Dlist =
zeros(tn, 1); Clist = zeros(tn, a); Plist = zeros(tn, 1); YLY
 ↪  = 0;
YM = 0; RY = zeros(a,1); YPCVY = 0; PCVlist = zeros(tn,1);
%Loop Through Blocks in order to Independent Processes
 ↪  Separately
for i = 1:t
    S = Slist;
    S = (S/sum(sum(S))) * n;
    R = Rlist(:,:,i); Y = Ylist(:,i);
    %Process L
    L = diag(sum(S)) - S;
    %Eigen(L)
    [V,D] = eig(L); D = diag(D);
    %Special
    t0 = (i-1)*n + 1; tf = i*n;
    Vlist(t0:tf,:) = V; Dlist(t0:tf) = D;
    Clist(t0:tf,:) = V'*R;
    Plist(t0:tf,:) = -0.5 * (V' * Y) .* (V' * Y);
    YLY = YLY + Y'*L*Y; YM = YM + Y'*Y; RY = RY + R' * Y;

```

```
    %Rank 1 Special
    %[0,1s] diagonal for each block
    pcv0 = 1; PCV = ones(n,1); PCV(1) = PCV(1) - pcv0;
    PCVlist(t0:tf) = PCV;
    YPCVY = YPCVY + PCV' * ((V' * Y).^2);
end

tic
%initialize
alpha = ones(1,a); beta = 0; cedilla = 0; Theta =
[alpha,beta,cedilla];
%Boundaries
%dn = max(D); d0 = min(D);
dn = D(end); d0 = D(1); d1 = D(2); A = [ones(1,a) , dn , 1;
↪  ...
     ones(1,a) , d1 , 1; ...
     ones(1,a) , d0 , (1-pcv0)]; %...
     %zeros(1,a), 1, 0 ]; %this is a hard restriction
A = -A; b = [0; 0; 0];
%
%Aeq = [ones(1,a) , 1, 0];
%beq = 1;
toc


tic
%Run Gradient
options =
optimset('Algorithm','interior-
↪  point','MaxIter',200,'GradObj','on','TolX',1e-
↪  200,'TolCon',1e-500);
Theta,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
Theta = fmincon(@(Theta)uni_objective(Theta,Dlist,Clist,
                tn,a,YLY,Plist,YM,RY,PCVlist,YPCVY),
                Theta,A,b,[],[],[],[],[],options);
alpha = Theta(1:a); beta = Theta(a+1); cedilla = Theta(a+2);
toc



tic
```

```
%Infer Prediction and Calculate Error
gamma = sum(alpha);
M_inv = ones(tn,1) ./ (gamma + cedilla*PCVlist +
beta*Dlist);
mu = zeros(n,1,t);
for i = 1:t
    t0 = (i-1)*n + 1; tf = i*n;
    mu(:,1,i) = Vlist(t0:tf,:) * (M_inv(t0:tf).*(Clist(t0:tf,:) * alpha'));
end

mu = reshape(mu,[n,t]);
%disp(size(Ylist))
%disp(size(mu))

e = Ylist - mu;
```

7 Биографија аутора

Milan Bašić je rođen 19. 07. 1979. u Nišu. Završio je OŠ Ćele-kula i Gimnaziju Svetozar Marković u Nišu sa odličnim uspehom (nosilac diplome Vuk Karadžić). Tokom osnovnog i srednjoškolskog obrazovanja osvojio je na desetine priznanja, pohvala i nagrada (prvih, drugih i trećih) na takmičenjima iz matematike, programiranja, fizike i naučno-tehničkog stvaralaštva od najnižeg do najvišeg nivoa. Osim toga, učestvovao je na letnjim školama i drugim programima namenjenim mladim talentovanim matematičarima i informatičarima, poput istraživačkih stanica i seminara u Petnici, Karatašu, Avali, Beloj Crkvi, itd. Za izuzetan uspeh postignut tokom osnovnog i srednjoškolskog obrazovanja dobitnik je nagrade Skupštine grada Niša i stipendije Vlade Kraljevine Norveške.

Diplomske studije na smeru za Informatiku i računarstvo na Odseku za Matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu završio je 2004. godine sa prosečnom ocenom 10 (deset) kao student generacije. Diplomski rad pod nazivom "Konstrukcija prevodioca za podskup programskog jezika Pascal" odbranio je sa ocenom 10. U toku studija uključen je u rad Seminara za algebru, kombinatoriku i informatiku, u okviru Matematičkog instituta SANU i Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, i rad projekta „Center of Excellence for Applications of Mathematics“, nemačke agencije za akademsku saradnju DAAD i Pakta za stabilnost Jugoistočne Evrope. Po završetku diplomskih studija, školske 2004/2005, upisao je magistarske studije na smeru za Računarstvo i informatiku na Odseku za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu i položio sve ispite sa prosečnom ocenom 10, a školske 2006/2007 godine upisao je doktorske akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, na studijskom programu za Informatiku (Računarske nauke). Takođe je položio sve programom predviđene ispite sa prosečnom ocenom 10 i stekao 120 ESPB potrebnih za prijavu doktorske disertacije. Doktorsku disertaciju pod nazivom "Neki problemi teorije grafova na kvantnim mrežama i nedeterminističkim automatima" uspešno je odbranio 2011. godine. Doktorske akademske studije je upisao na studijskom programu Matematika, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Kragujevcu školske 2012/2013. godine, gde je položio sve ispite predviđene planom i programom sa prosečnom ocenom 10.

Trenutno je zaposljen na Departamnu za računarske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu u zvanju redovnog profesora Računarskih nauka od 2018. godine. Takođe je radio specijalizovanom odeljenju za matemtaku i informatiku gimnazije Svetozar Marković u Nišu i senior predavač je na seminaru za matematiku Istraživačke stanice Petnica.

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Примена матричних операција и декомпозиција у оптимизацији предиктивних графовских модела

представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,

У Крагујевцу, 14.06.2022. године,

Милан Башић

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да су штампана и електронска верзија докторске дисертације под насловом:

Примена матричних операција и декомпозиција у оптимизацији предиктивних графовских модела

истоветне.

У Крагујевцу, 14.06.2022. године,

Милан Башић

потпис аутора

Образац 3

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Милан Башић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Примена матричних операција и декомпозиција у оптимизацији предиктивних графовских модела

и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 14.06.2022. године,

Милош Бакић

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/