УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милица Миливојевић Данас

МЕШОВИТА МЕТРИЧКА ДИМЕНЗИЈА ГРАФОВА

Докторска дисертација

Крагујевац, 2022.

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF SCIENCE

Milica Milivojević Danas

MIXED METRIC DIMENSION OF GRAPHS

Doctoral dissertation

Kragujevac, 2022.

Идентификациона страница докторске дисертације
I. Аутор
Име и презиме: Милица Миливојевић Данас
Датум и место рођења: 30.05.1988., Крагујевац
Садашње запослење: асистент на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу
II. Докторска дисертација
Наслов: Мешовита метричка димензија графова
Број страница: 93
Број слика: 13
Број библиографских података: 68
Установа и место где је рад израђен: Природно-математички факултет, Крагујевац
Научна област (УДК): Дискретна математика (51)
Ментор: проф. др Јозеф Кратица, научни саветник Математичког института САНУ
III. Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 08.07.2020.
Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: IV-01-715/4 од дана 14.10.2020.
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата: 1. др Јозеф Кратица, научни саветник Математичког института САНУ 2. др Бојана Боровићанин, ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу (председник комисије) 3. др Александар Савић, ванредни професор Математичког факултета у Београду
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: 1. др Бојана Боровићанин, ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу 2. др Владимир Филиповић, редовни професор Математичког факултета у Београду 3. др Тања Стојадиновић, доцент Математичког факултета у Београду
Датум одбране дисертације:

Садржај

Овај рад посвећујем свом оцу
Милети Миливојевић
који на жалост више није са нама.

Резиме

У овој тези је разматрана недавно уведена графовска инваријанта, мешовита метричка димензија графова. Посебно интересантан проблем овог истраживања јесте добијање нових општих доњих граница које важе за све повезане графове одређеног реда. У раду су дати и илустративни примери нових и старих доњих граница, за 12 познатих графова из литературе, као и за све повезане графове са 5 чворова. Показано је да су дате доње границе добре, односно да се за неке класе графова поклапају са егзактним вредностима. Такође, приказано је и поређење нових доњих граница са границама познатим из литературе.

Даље, разматрани су екстремални проблеми графова који укључују мешовиту метричку димензију. Разматра се разлика између мешовите и метричке димензије грана, као и разлика између јаке и мешовите метричке димензије. За прву разлику дата је и класа графова на којима се достиже максимум дате разлике. Затим су добијене $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ доње и горње границе за збир и производ мешовите метричке димензије графа G и његовог комплементарног графа $\overline{G}$, како за произвољне тако и за обострано повезане графове. Пронађена је класа графова на којима су достигнуте ове $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ горње границе. Такође је побољшана, позната из литературе, $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ доња граница обострано повезаних графова, за збир и производ метричке димензије.

На крају су одређене егзактне вредности мешовите метричке димензије за графове облика точка, торус графове, комплетно раздвојене и графове цветних латица. Добијено је да је мешовита метричка димензија, за торус графове, константа, за графове цветних латица да не зависи од реда графа, док за графове облика точка и за комплетно раздвојене графове да неограничено расте са порастом реда графа.

Списак научних радова који садрже све претходно споменуте резултате, а који су настали у току рада на овој дисертацији, приказан је на крају литературе.

Кључне речи

Мешовита метричка димензија, метричка димензија грана, Nordhaus-Gaddum границе, екстремална теорија графова, торус графови, графови облика точка, графови цветних латица, комплетно раздвојени графови

Abstract

In this thesis, a recently introduced graph invariant, the mixed metric dimension of graphs, is considered. A particularly interesting advancement of this research is to obtain new general lower bounds that apply to all connected graphs of a certain order. Illustrative examples of new and old lower bounds are also given for 12 graphs known from the literature as well as for all connected graphs with 5 vertices. It is shown that the given lower bounds are quite good, i.e. that for some classes of graphs, in many cases, they coincide with the exact values. The comparison of the new lower bounds with the bounds known from the literature is also presented.

Further, the extremal graph problems involving a mixed metric dimension are studied. The difference between the mixed and edge metric dimension is considered, as well as the difference between the strong and mixed metric dimension. Also are identified individual classes of graphs, on which the maximum of given difference is reached. Then, Nordhaus-Gaddum lower and upper bounds are obtained for the sum and product of the mixed metric dimension of the graph G and its complementary graph $\overline{G}$, both for arbitrary and for doubly-connected graphs. Again, classes of graphs on which these Nordhaus-Gaddum upper bounds are reached, are described. Also, the Nordhaus-Gaddum lower bound of doubly-connected graphs for sum and product of the metric dimension, known from the literature, is improved.

Finally, the exact values of the mixed metric dimension for wheels, torus, complete split graphs and flower snarks are found. The following results are obtained: the mixed metric dimension, for torus graphs, is constant, for flower snarks it does not depend on the order of graphs and for wheels graphs and complete split graphs, the mixed metric dimension increases indefinitely with increasing order of the graph.

A list of papers containing the previously mentioned results, which were created during the work on this dissertation, is presented at the end of the literature.

Key words

Mixed metric dimension, edge metric dimension, Nordhaus-Gaddum bounds, extremal graph theory, torus graphs, wheel graphs, flower snark graphs, complete split graphs

Предговор

Мешовита метричка димензија графова је нова графовска инваријанта и област истраживања овог рада обухвата како проналажење њених општих својстава и особина, тако и егзактних вредности за неке специјалне класе графова. Ова графовска инваријанта има у неким случајевима значајно другачије теоријске карактеристике у поређењу са осталим проблемима метричке димензије, тако да због тога није увек могуће, директно, а понекад ни индиректно, користити постојеће теоријске резултате за основну графовску инваријанту. Због тога је потребно уводити нова својства која карактеришу само мешовиту метричку димензију.

Ова дисертација обједињује два правца истраживања. Први је одређивање доњих граница за мешовиту метричку димензију, користећи области комбинаторике, оптимизације и екстремалне теорије графова. Други правац садржи одређивање егзактних вредности мешовите метричке димензије за неке специјалне класе графова уз помоћ резултата добијених у првом правцу истраживања.

Дисертација се састоји од резимеа на српском и енглеском језику, предговора, уводног поглавља, четири поглавља у којима су изложени оригинални резултати докторске дисертације, закључка и литературе. Сви изложени резултати у поменута четири поглавља су оригинални, осим делимично секције 3.1 у којој су приказана природна проширења неких постојећих резултата из литературе.

Прво поглавље је уводног карактера. Конципирано је тако да обухвата основне појмове који се суштински надаље користе у овом раду, који су представљени кроз секције. У првој секцији дате су дефиниције основних појмова из теорије графова, док је у другој секцији уведена дефиниција проблема мешовите метричке димензије графова, као и дефиниције још три графовске инваријанте на које ће се реферисати у овом раду. У трећој и четвртој секцији наведене су особине скупа мешовитог разрешења, као и особине неких других графовских инваријанти које се користе као мотивација за увођење, али и за доказивање оригиналних резултата ове дисертације. Везу између метричке димензије графа и његовог комплементарног графа је дата у секцији 1.5. Последња секција из овог поглавља посвећена је метричким димензијама неких веома интересантних фамилија графова.

Друго поглавље садржи резултате који се односе на израчунавање неких нових, општих доњих граница за мешовиту метричку димензију графова. Пре свега у првој секцији одређене су нове опште доње границе, док су у другој дати илустративни примери нових и старих доњих граница и тачне вредности мешовите метричке димензије за два скупа графова.

Треће поглавље садржи резултате који се односе на екстремалне проблеме графова који укључују мешовиту метричку димензију. У првој секцији наводимо неке примере екстремалних проблема, као и нека природна уопштења тврђења из литературе, док су у другој и трећој секцији приказани резултати који обухватају решавање разлика између мешовите и метричке димензије грана, односно јаке и мешовите метричке димензије, редом.

У првој секцији четвртог поглавља представљене су $\mathrm{Nordhaus}-\mathrm{Gaddum}$ границе мешовите метричке димензије, где су разматране све варијанте ових граница, $\min/\max$, збир или производ, како за произвољне графове, тако и за обострано повезане. У секцији 4.2 побољшана је доња граница за метричку димензију обострано повезаних графова, док су у последњој секцији 4.3 дати резултати $\mathrm{Nordhaus}-\mathrm{Gaddum}$ граница за метричку димензију грана графа.

Претпоследње поглавље, у којем су приказани оригинални резултати докторске дисертације, је пето поглавље и оно садржи специјалне класе графова за које је добијена егзактна вредност мешовите метричке димензије. Као и претходна поглавља и ово је подељено на секције. У секцијама 5.1, 5.2, 5.3 и 5.4 приказане су егзактне вредности за графове облика точка, торус, комплетно раздвојене графове и графове цветних латица, редом.

У последњем, шестом поглављу приказан је преглед свих нових добијених резултата. Затим су дати правци даљих научиних истраживања као и научни допринос ове дисертације.

Желела бих да се захвалим:

- Ментору проф. др Јозефу Кратици, који је руководио израдом ове докторске дисертације, на веома корисним сугестијама и стручним саветима;

- Члановима комисије: проф. др Бојани Боровићанин, проф. др Владимиру Филиповићу и доц. др Тањи Стојадиновић чији предлози, конструктивне примедбе и сугестије су побољшале квалитет овог рада;

- Својој породици, супругу Милошу, деци Марти и Илиасу и мајци Славици на пруженој подршци;

- Такође, дугујем захвалност колегама и професорима са ПМФ-а у Крагујевцу на разумевању, помоћи и стрпљењу током рада на овој дисертацији. Посебно се захваљујем проф. др Љиљани Павловић која ме је увела у области математичког програмирања, оптимизације, као и екстремалне теорије графова и помогла у лакшем разумевању и схватању истог;

- Својим наставницима и професорима: Снежани Раичевић, Дејану Кнежевићу и Снежани Маринковић;
- Осталим коауторима: др Томици Дивнићу, доц. др Зорану Максимовићу и проф. др Александру Савићу.

Крагујевац, јануар 2022. Милица Миливојевић Данас

1 Увод

1.1 Општи појмови и дефиниције

У овој секцији наведени су општи појмови и дефиниције који се користе у овој дисертацији. Граф G се дефинише као уређени пар $(V(G), E(G))$, при чему је $V(G) \neq \emptyset$. Елементе скупа $V(G)$ називамо чворовима, док елементе скупа $E(G)$ називамо гранама графа G. Формално, $vw \in E(G)$ означава да постоји грана која спаја чворове $v, w \in V(G)$. Даље, ред графа једнак је броју елемената који припадају скупу $V(G)$ и означава се са $|V(G)|$, док број елемената који припадају скупу $E(G)$ представља број грана графа и означава се са $|E(G)|$. Напоменимо да у даљем раду, тамо где је потпуно јасно о ком графу G се ради, за скуп чворова и скуп грана користићемо ознаке V и E, редом.

У графу G, $v-w$ пут дефинише се као низ чворова $v, v_1, v_2, \ldots, v_k, w$ који су међусобно различити и такви да је $vv_1, v_kw \in E(G)$, као и $v_iv_{i+1} \in E(G)$ при чему је $i = 1, 2, \ldots, k-1$. За пар чворова v и w кажемо да су повезани, ако у графу G постоји пут чији су крајњи чворови баш v и w. Растојање између два чвора v и w дефинише се као дужина најкраћег $v-w$ пута у графу G и означава се са $d_G(v, w)$. У даљем тексту, уколико је потпуно јасно о ком се графу ради, уместо ознаке $d_G(v, w)$, користићемо ознаку $d(v, w)$.

У дисертацији ће бити разматрани прости, повезани и неоријентисани графови. Неоријентисани графови су графови код којих су све гране двострано оријентисане, то јест грана vw је исто што и грана wv. Из тога следи да за било који пар чворова v и w, у неоријентисаном графу G, важи да растојање $d(v, w)$ је исто што и растојање $d(w, v)$.

Гране које су инцидентне са истим паром чворова називају се паралелне гране, док се грана код које се почетни и крајњи чвор поклапа назива петља.

Дефиниција 1.1. Граф G је прост уколико у његовом скупу грана $E(G)$ нема ни петљи ни паралелних грана.

Дефиниција 1.2. Граф G је повезан ако су свака два његова чвора повезана.

Два чвора графа v и w су суседна ако су спојена граном $e = vw$, док се гране графа које су инцидентне истом чвору називају суседне гране. Такође, грана $e \in E(G)$ се назива мост, уколико уклањањем те гране граф $G - e$ има више компоненти повезаности од графа G.

Под отвореном околином произвољног чвора v графа G подразумева се скуп $N(v) = \{w \in V(G) | vw \in E(G)\}$ суседа чвора v, док се затворена околина чвора v дефинише као $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

За чвор $v \in N(w)$ кажемо да је максималан сусед чвора w, ако су сви суседи од w, укључујући и w, такође у затвореној околини од v. Затим, за произвољна два чвора v и w у графу G кажемо да су "лажни" близанци, ако имају исте отворене околине, тј. $N(v) = N(w)$. Са друге стране, чворови v и w су "прави" близанци ако је $N[v] = N[w]$.

Дефиниција 1.3. Степен чвора v је број суседа тог чвора у графу G, $deg_v = |N(v)|$.

Ако је у графу G чвор v степена 1, онда се тај чвор назива лист или висећи чвор.

Како је са deg_v означен степен чвора $v \in V$, са $\delta(G)$ и $\triangle(G)$ означавамо минималан и максималан степен чвора графа G. Формално, $\delta(G) = \min\{deg_v | v \in V\}$ и $\triangle(G) = \max\{deg_v | v \in V\}$.

Максимално растојање два чвора у графу назива се дијаметар графа, то јест $D(G) = \max\{d(v, w) | v, w \in V(G)\}$. Напоменимо да се за означавање дијаметра графа користи и ознака $diam(G)$.

Дефиниција 1.4. Комплемент графа G је граф $\overline{G}$ чији је скуп чворова $V(\overline{G}) = V(G)$ и чији је скуп грана $E(\overline{G}) = \{vw | v, w \in V(G), vw \notin E(G), v \neq w\}$.

Тврђење 1.1. *За произвољан граф G важи $\triangle(\overline{G}) = |V(G)| - 1 - \delta(G)$.*

Напоменимо, за неки граф кажемо да је обострано (комплементарно) повезан (енг. $\mathrm{doubly-connected\,graph}$), ако су повезани и граф G и његов комплементаран граф $\overline{G}$. За два графа, са истим бројем чворова, кажемо да су изоморфна ако важи следећа дефиниција.

Дефиниција 1.5. Два графа $G = (V_1, E_1)$ и $H = (V_2, E_2)$ су изоморфна уколико постоји бијекција $f : V_1 \to V_2$ која одржава особину суседности чворова, тј.

$$(\forall v, w \in V_1)(vw \in E_1 \Leftrightarrow f(v)f(w) \in E_2).$$

Тада пишемо $G \cong H$ и функција f је изоморфизам.

Дефиниција 1.6. Пут P_n је граф са скупом чворова $V(P_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ и низом грана $v_k v_{k+1} \in E(P_n)$ за $k = 1, \dots, n-1$.

Дефиниција 1.7. Контура (циклус) C_n је граф са скупом чворова $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ и са скупом грана $E(C_n) = \{v_k v_{k+1} | k = 1, \dots, n-1\} \cup \{v_n v_1\}$.

Дефиниција 1.8. Повезан граф без контура назива се стабло.

Дефиниција 1.9. Комплетан граф (клика) је граф где су свака два различита чвора суседна.

Комплетан граф означава се са K_n, где је n ред графа и при чему је степен сваког чвора комплетног графа $n-1$. Укупан број грана, код комплетног графа, је $E(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Чвор v се назива симплицијални (екстремални) чвор ако његова отворена околина индукује комплетан граф.

Нека су $deg_{v_1}, \dots, deg_{v_n}$ степени чворова $v_1, \dots, v_n$ у графу G. Тада, граф G називамо регуларним графом ($r-$регуларним) ако је $deg_{v_1} = deg_{v_2} = \dots = deg_{v_n} = r$. Лако је видети да је број грана регуларног графа $|E(G)| = \frac{1}{2}nr$.

Дефиниција 1.10. Граф G је бипартитан ако постоји партиција скупа чворова $V(G) = V_1(G) \cup V_2(G)$ и $V_1(G) \cap V_2(G) = \emptyset$, тако да за сваку грану $e \in E(G)$ важи да она спаја чвор из $V_1(G)$ са чвором из $V_2(G)$. Формално, скуп грана је $E(G) = \{vw | v \in V_1(G), w \in V_2(G)\}$.

Граф називамо комплетан бипартитан граф уколико постоји грана између сваког чвора првог скупа и сваког чвора другог скупа. Означава се са $K_{r,s}$, где је r број чворова првог скупа, а s број чворова другог скупа.

Декартов производ два графа G и H је граф $G \Box H$, где је скуп чворова $V(G \Box H) = \{(a, b) | a \in V(G), b \in V(H)\}$. Два чвора (a, b) и (c, d) су суседна у графу $G \Box H$ ако и само ако важи ($a = c$ и $bd \in E(H)$) или ($b = d$ и $ac \in E(G)$). Формално,

$$E(G \Box H) = \{(a, b)(a, d) | a \in V(G); bd \in E(H)\} \cup$$

$$\{(a, b)(c, b) | b \in V(H); ac \in E(G)\}.$$

Граф $G = P_r \Box P_t$ зове се правоугаони граф.

Даље, дефинисаћемо појам репрезентативног скупа (енг. $\mathrm{hitting\,set}$). За дати скуп U и колекцију $\mathcal{T}$ подскупова $S_1, \dots, S_m$ од U, таквих да је њихова унија једнака U, репрезентативни скуп H је скуп који има непразан пресек са сваким скупом из ове колекције, тј. за свако $i \in \{1, \dots, m\}, H \cap S_i \neq \emptyset$.

Дефиниција 1.11. За произвољну грану $vw \in E(G)$ уводимо следећа два скупа:

$$W_{vw} = \{u \in V | d(v,u) < d(w,u)\}, W_{wv} = \{u \in V | d(v,u) > d(w,u)\}. \tag{1.1}$$

Касније ћемо у секцији 2.1 дефинисати везу између ова два скупа и скупа мешовитог разрешења.

Затим, наводимо дефиницију међусобно максимално удаљених чворова.

Дефиниција 1.12. [41] Пар чворова $v, w \in V$, $v \neq w$, је међусобно максимално удаљен ако и само ако

- $d(u,w) \leq d(v,w)$ за свако $u \in N(v)$ и
- $d(v,u) \leq d(v,w)$ за свако $u \in N(w)$.

Како је тема ове дисертације мешовита метричка димензија графова, у овом одељку наводимо дефиниције графова за које ћемо дати егзактне вредности мешовите метричке димензије.

Прво, дефинишемо графове облика точка и то су графови који се састоје од контуре дужине најмање 3 и једног чвора у центру који је повезан са свим чворовима контуре. Ови графови се означавају са W_n и имају $n+1$ чворова и $2n$ грана. Формално, скуп чворова је $V(W_n) = \{v_0, \ldots, v_n\}$ и скуп грана $E(W_n) = \{v_k v_{k+1} | 1 \leq k \leq n-1\} \cup \{v_0 v_k | 1 \leq k \leq n\} \cup \{v_n v_1\}$. Чвор v_0 назива се унутрашњи чвор, док се сви остали називају спољним чворовима.

На слици 1 приказан је граф облика точка W_8. Његова мешовита метричка димензија је 8 и добијена је помоћу методе тоталне енумерације. Једна његова мешовита метричка база је $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.

Даље, дефинишемо торус графове $T_{m,n}$ који имају $m \cdot n$ чворова и $2 \cdot m \cdot n$ грана. Скуп чворова је

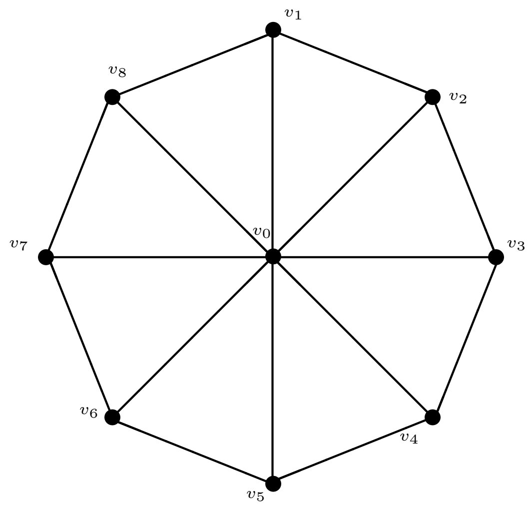
$$V(T_{m,n}) = \{(i,j) \,|\, 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1\}$$

и скуп грана

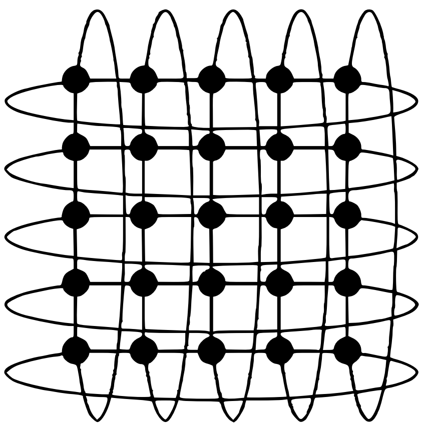
$$E(T_{m,n}) = \{(i,j)(i+1,j) \,|\, 0 \leq i \leq m-2, 0 \leq j \leq n-1\} \cup$$
$$\{(i,j)(i,j+1) \,|\, 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-2\} \cup$$
$$\{(m-1,j)(0,j) \,|\, 0 \leq j \leq n-1\} \cup \{(i,n-1)(i,0) \,|\, 0 \leq i \leq m-1\}.$$

Торус графови могу се такође приказати као Декартов производ две контуре, тј. $T_{m,n} = C_m \square C_n$.

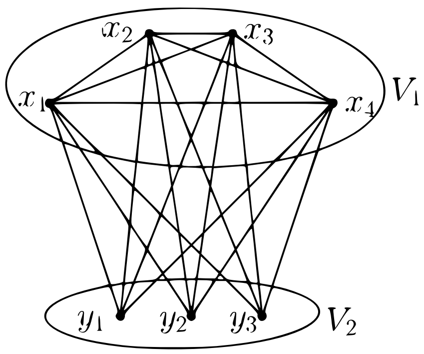
На слици 2 приказан је торус граф $T_{5,5}$. Његова мешовита метричка димензија је 4 и добијена је помоћу методе тоталне енумерације. Једна његова мешовита метричка база је $\{(0,0), (0,2), (1,3), (3,3)\}$.



Слика 1: Граф W_8



Слика 2: Граф $T_{5,5}$



Слика 3: Комплетно раздвојен граф $K^*_{4,3}$

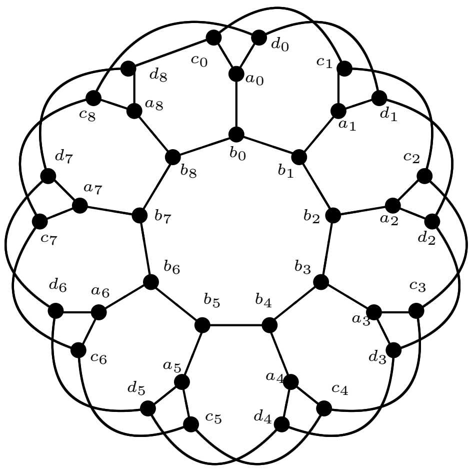
Следећи графови које дефинишемо јесу комплетно раздвојени графови $K^*_{k,n-k}$. Они имају n чворова и $\binom{n}{2}$ - $\binom{n-k}{2}$ грана, при чему је скуп чворова $V(K^*_{k,n-k}) = \{x_i|1 \leq i \leq k\} \cup \{y_i|1 \leq i \leq n-k\}$, док је скуп грана $E(K^*_{k,n-k}) = \{x_ix_j|1 \leq i < j \leq k\} \cup \{x_iy_j|1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n-k\}$. Напоменимо да се комплетно раздвојен граф $K^*_{k,n-k}$ може добити повезивањем сваког чвора комплетног графа K_k са сваким чвором графа без грана $\overline{K}_{n-k}$. У даљем раду претпоставићемо да је $V_1 = \{x_i|1 \leq i \leq k\}$ и $V_2 = \{y_i|1 \leq i \leq n-k\}$. На слици 3 приказан је комплетно раздвојен граф $K^*_{4,3}$.

Даље уводимо графове цветних латица и они су први пут уведени 1975. године у раду [34]. Граф цветних латица је повезан, $3-$регуларан граф, без мостова. Ови графови се означавају са J_n и имају $4n$ чворова и $6n$ грана. Формално, скуп чворова је $V(J_n) = \{b_k, a_k, c_k, d_k|k = \overline{0, n-1}\}$. Чворови $\{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$ су унутрашњи и они образују унутрашњи циклус, $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ се зову централни, док су $\{c_0, \ldots, c_{n-1}\}$ и $\{d_0, \ldots, d_{n-1}\}$ спољни и они образују спољни циклус. Формално, скуп грана је $E(J_n) = \{c_kc_{k+1}, d_kd_{k+1}|0 \leq k \leq n-2\} \cup \{a_kb_k, a_kc_k, a_kd_k, b_kb_{k+1}|0 \leq k \leq n-1\} \cup \{d_{n-1}c_0, c_{n-1}d_0\}$. Напоменимо да су индекси чворова узети по модулу n.

На слици 4 приказан је граф цветних латица J_9. Његова мешовита метричка димензија је 4 и добијена је помоћу методе тоталне енумерације. Једна мешовита метричка база графа J_n је $\{b_0, c_1, c_6, d_3\}$.

Следеће тврђење дефинише један изоморфизам графа J_n.

Тврђење 1.2. [*43*] *Нека је J_n граф цветних латица и $l \in \{0, 1, ..., n-1\}$ произвољан број. Тада је функција $h_l : V(J_n) \to V(J_n)$ дефинисана са*



Слика 4: Граф J_9

$$
\begin{aligned}
h_l(a_k) &= \begin{cases} a_{l-k}, & k \leq l \leq n-1, \\ a_{n-k+l}, & 0 \leq l < k, \end{cases} \\
h_l(b_k) &= \begin{cases} b_{l-k}, & k \leq l \leq n-1, \\ b_{n-k+l}, & 0 \leq l < k, \end{cases} \\
h_l(c_k) &= \begin{cases} c_{l-k}, & k \leq l \leq n-1, \\ d_{n-k+l}, & 0 \leq l < k, \end{cases} \\
h_l(d_k) &= \begin{cases} d_{l-k}, & k \leq l \leq n-1, \\ c_{n-k+l}, & 0 \leq l < k, \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

изоморфизам.

Преглед свих дефиниција и резултата из теорије графова далеко превазилази обим ове дисертације. У овом одељку биле су наведене дефиниције и основне особине појмова из теорије графова, које су неопходне касније за добијање и доказивање оригиналних резултата ове дисертације. Како се количина знања и примена истог, непрестано увећава, веома је тешко дати преглед свих релевантних књига и то из ужих области унутар теорије графова. Заинтересовани читалац може наћи изузетно квалитетне додатне материјале из теорије графова чак и на нашем језику: Р. Тадић 1969. године у књизи [63], Д. Цветковић 1981. године у књизи [9], Д. Цветковић 1983. године у књизи [11], Д. Цветковић и остали 1996. године у књизи [14], Д. Стевановић и остали 2007. године у књизи [59], Д. Цветковић и С. Симић 2012. године у књизи [21] и Ђ. Дугошија и А. Савић 2018. године у књизи [25]. Такође бих желела да истакнем и неколико изузетно квалитетних књига написаних на енглеском језику: F. Harary 1969. године у књизи [31], M. Behzad 1979. године у књизи [5], J. A. Bondy и U. S. R. Murty 2008. године у књизи [7], R. J. Wilson 2010. године у књизи [65] и G. Chartrand и P. Zhang 2013. године у књизи [22].

1.2 Дефиниција проблема

Проблем метричке димензије графа уведен је седамдесетих година, тачније 1975. године Slater, а затим и 1976. године Harrary и Malter, су независно једни од других, у радовима [57] и [32] дефинисали појам метричке димензије. У повезаном, простом графу $G = (V, E)$ реда n, за произвољан чвор u кажемо да разрешава (енг. resolves) чворове v и w, ако важи $d(u, v) \neq d(u, w)$. Тада, за скуп чворова $S \subseteq V$ кажемо да је скуп разрешења (енг. resolving set), ако за свака два чвора из V постоји чвор из S који их разрешава. Ако је $S = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$, тада за сваки чвор $u \in V$ можемо одредити вектор његових координата дат са $r_S(u) = (d(u, w_1), d(u, w_2), ..., d(u, w_k))$. Дакле, може се рећи да је S скуп разрешења, ако сваки чвор графа G има јединствен вектор координата, тј. разликује се од свих осталих вектора бар у једној координати. Скуп разрешења минималне кардиналности назива се метричка база. Кардиналност метричке базе је метричка димензија графа G. Метричка димензија графа G, у даљем раду, биће означавана са $\beta(G)$. Појам скупа разрешења увели су Harrary и Malter, док је Slater користио термин лоцирање скупа (енг. locating sets). У литератури синоним за скуп разрешења и лоцирање скупа јесте метрички генератор (енг. metric generators) и до сада је познато неколико примена метричке димензије. Првобитно је Slater открио да се може користити за препознавање уљеза у мрежама, док су други открили да ова димензија може да се користи за проблем навигације робота у мрежама [45], у хемији [15, 36], као и у препознавању образаца и обради слика [48].

Даље ћемо представити неколико новијих $NP-$тешких графовских инваријанти, које су природна проширења основног проблема метричке димензије графа.

Како метричка димензија и скуп разрешења дају неку информацију о чворовима графа, природно се постављало питање да ли постоји неки параметар или графовска инваријанта, која се на исти начин бави гранама графа. Одговор на ово питање дају Kelenc и остали (2018) у раду [38], где су аутори увели метричку димензију грана графа. Удаљеност између чвора и гране дефинише се као краће растојање између датог чвора и крајњих чворова гране коју посматрамо. Формално, ако је $u \in V$ и $e = vw$ онда је

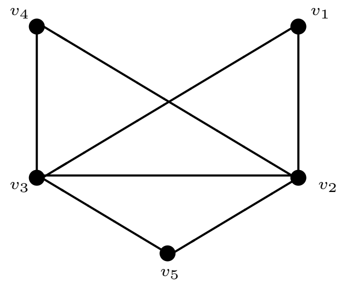
$$d(u, e) = \min\{d(u, v), d(u, w)\}. \tag{1.3}$$

Напоменимо пошто разматрамо само неоријентисане графове, растојање између чвора и гране је исто што и растојање између гране и чвора. За произвољан чвор u кажемо да разрешава гране e_1 и e_2 графа G, ако важи $d(u, e_1) \neq d(u, e_2)$. Слично као код метричке димензије уводимо скуп разрешења грана и кажемо да је $S \subseteq V$ скуп разрешења грана, ако за било који пар грана из E постоји бар један чвор $s \in S$ који их разрешава. Дакле, скуп разрешења грана минималне кардиналности је гранска метричка база и њена кардиналност назива се метричка димензија грана графа и означава се са $\beta_E(G)$.

Пошто су уведене метричка димензија и метричка димензија грана графа, недавно Kelenc и остали (2017) у раду [39] уводе појам мешовите метричке димензије и тада су први пут проучавана нека њена својства. Чвор u разрешава произвољан пар елемената $a, b \in V \cup E$ графа G, ако важи $d(u, a) \neq d(u, b)$. Скуп мешовитог разрешења (енг. mixed resolving set) $S \subseteq V$ је скуп такав да за било који пар елемената из $V \cup E$, постоји бар један чвор $s \in S$ који их разрешава. Скуп мешовитог разрешења минималне кардиналности назива се мешовита метричка база. Кардиналност мешовите метричке базе је мешовита метричка димензија графа G и означава се са $\beta_M(G)$. Напоменимо да како сваком чвору и свакој грани графа G можемо доделити њихов одговарајући вектор координата у односу на скуп мешовитог разрешења S, координате свих чворова и свих грана називаћемо мешовитим метричким координатама.

Пример 1.1. *На слици 5 приказан је мали граф G_1 са 5 чворова и 7 грана. Његова мешовита метричка димензија је једнака 5 и добијена је помоћу тоталне енумерације. Метричка димензија и метричка димензија грана су једнаке 3 и 4, редом. Мешовита метричка база је $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, то јест сви чворови су елементи базе и брисањем било ког од њих, увек ће постојати два елемента графа са истим метричким координатама.*

Представићемо још једну графовску инваријанту, јаку метричку димензију, која ће се појављивати касније у циљу одређивања максималне разлике између ње и мешовите метричке димензије графова. Јака метричка димензија уведена је први пут у раду [58]. Кажемо да чвор w јако разрешава произвољна два чвора u и v ако чвор u припада најкраћем $v - w$ путу или v припада најкраћем $u - w$ путу. Скуп јаког разрешења $S \subseteq V$ је такав скуп да за било која два различита чвора из $V(G) \backslash S$ постоји бар један чвор из S који их јако разрешава. Аналогно претходним, јака метричка база и јака



Слика 5: Мали граф G_1 са 5 чворова

метричка димензија дефинишу се као минималан скуп јаког разрешења и кардиналност јаке метричке базе, редом. Јака метричка димензија означава се са $\beta_S(G)$.

1.3 Неке особине скупа мешовитог разрешења

У овој секцији приказан је кратак преглед резултата у вези мешовите метричке димензије графова, а који се користе у даљем раду. Напоменимо да је проблем који разматрамо нов и да до сада не постоји много резултата у литератури који се тичу ове графовске инваријанте.

Пошто је сваки скуп мешовитог разрешења такође и скуп разрешења и скуп разрешења грана графа, онда за сваки граф важи следећа неједнакост

$$\beta_M(G) \geq \max\{\beta(G), \beta_E(G)\}. \tag{1.4}$$

Како цео скуп чворова јесте скуп мешовитог разрешења, а са друге стране само један чвор не може формирати скуп мешовитог разрешења, закључујемо да важи следећа напомена.

Напомена 1.1. [*39*] *За сваки граф G реда n важи* $2 \leq \beta_M(G) \leq n$.

У раду [39] добијено је неколико њених битних својстава, али и скупа мешовитог разрешења. Како су у напомени 1.1 доња и горња граница мешовите метричке димензије редом 2 и n, у поменутом раду аутори су представили карактеризацију графова чија мешовита метричка димензија достиже ове вредности. Показали су да се доња граница достиже за путеве P_n, то јест $\beta_M(P_n) = 2$, док се горња граница достиже код комплетних графова K_n, то јест $\beta_M(K_n) = n$. Напоменимо да комплетни графови нису једини чија је мешовита метричка димензија једнака реду графа.

Такође су дате и тачне вредности за још неке класе графова као што су контуре C_n, стабла T, комплетни бипартитни графови $K_{r,s}$ и правоугаони графови $G = P_r \Box P_t$. Штавише, представљено је неколико општих доњих и горњих граница, као и доказ да проблем одређивања мешовите метричке димензије, у општем случају, припада класи $NP-$тешких проблема.

Како се ова графовска инваријанта појавила релативно скоро, 2017. године, још увек није написан велики број радова који је посвећен решавању овог проблема. До сада, поред поменутог рада, проблем мешовите метричке димензије разматран је такође и у радовима [60] и [61]. У раду [60] могу се пронаћи егзактне вредности мешовите метричке димензије уницикличних графова, као и добре доње границе за графове који имају уницикличан подграф. Екстремална разлика мешовите метричке димензије и цикломатичног броја графа дата је у раду [61].

Сада наводимо тврђења, теореме и њихове последице које ће бити коришћене у следећим поглављима.

Тврђење 1.3. [39] *Ако су u и v "прави" близанци у графу G, онда u и v припадају сваком скупу мешовитог разрешења графа G.*

Тврђење 1.4. [39] *Ако су u и v "лажни" близанци у графу G и ако је S скуп мешовитог разрешења графа G, тада је $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$.*

Тврђење 1.5. [39] *Ако је u симплицијални чвор у графу G, онда u припада сваком скупу мешовитог разрешења графа G.*

Из тврђења 1.5 лако се закључује да важи следећа последица.

Последица 1.1. [39] *Ако је u чвор степена 1 у графу G, онда u припада сваком скупу мешовитог разрешења графа G.*

У следећим теоремама навешћемо две класе графова за које мешовита метричка димензија узима вредности 2 и n, а које су нам од значаја за даље истраживање.

Теорема 1.1. [39] *Нека је G било који граф реда n. Тада је $\beta_M(G) = 2$ ако и само ако је граф G пут.*

Лема 1.1. [39] *Нека је u произвољан чвор графа G и нека је $S = V(G) \setminus \{u\}$. Ако за сваки чвор $w \in N(u)$ постоји $x \in S$ тако да је $d(uw, x) \neq d(w, x)$, онда је S скуп мешовитог разрешења за граф G.*

Теорема 1.2. [39] *Нека је G граф реда n. Тада је $\beta_M(G) = n$ ако и само ако сваки чвор графа G има максималног суседа.*

1.4 Кратак преглед екстремалне теорије графова

Пре него што прикажемо тврђења, теореме и особине које ће се користити као мотивација за добијање оригиналних резултата ове дисертације, као и за њихово доказивање, најпре ћемо нешто рећи о екстремалној теорији графова. За њен почетак узима се 1941. година, када је доказана Turán–ова теорема у раду [62] и она је постала основа екстремалне теорије графова. Имајући у виду да се екстремална теорија графова бави проучавањем различитих проблема, и како је у питању област која се и даље брзо развија, у наставку наводимо само онај садржај који има директне везе са овом докторском дисератацијом. Превасходни циљ је да се дају математичке основе екстремалне теорије графова и да се прикажу идеје за решавање неких важнијих проблема. Како граф можемо замислити као модел одређеног скупа објеката и веза које постоје између њих, лако је приметити свеукупну примену и важност екстремалне теорије графова у скоро свим областима истраживања.

На графовима се уводе функције које зависе од разних елемената графа, као што су степен чвора, број грана и слично, и те функције називамо тополошким индексима. Уколико је реч о примени теорије графова у хемији, након увођења тополошког индекса уочава се корелација између добијених вредности тог индекса и разних физичко-хемијских особина једињења за које су израчунати тополошки индекси. У наставку ћемо споменути један од индекса који је међу првима уведен. У питању је Рандићев индекс, уведен је 1975. године у раду [56] од стране Милана Рандића који је проучавајући молекуле алкана уочио везу између структуре молекула алкана и њихових физичко-хемијских особина. Он мери степен гранања молекулског графа придруженог молекулу засићеног угљоводоника, при чему под молекулским графом подразумевамо граф који одговара његовој структурној формули. Рандић је показао добру корелацију овог индекса са неким физичко-хемијским особинама алкана. Врло брзо овај индекс постао је један од највише истраживаних тополошких индекса, како од стране хемичара, тако и од стране математичара. Такође, поменућемо академика Ивана Гутмана, који је објавио значајне радове из различитих подобласти теорије графова, од којих смо издвојили неке о Рандићевом индексу [16], [17], [29] и [55], као и монографије [30] и [46].

Оно што је занимљиво проверавати јесте да ли је та успостављена корелација значајно изражена када су у питању екстремални графови.

Овој проблематици је посвећен велики број радова и развијене су разне методе за проналажење екстремалних графова. Значајна околност која је допринела томе, јесу и системи који се користе за постављање хипотеза у теорији графова, као и за проверавање добијених резултата. Пре него што нешто кажемо о методама за проналажење екстремалних графова, рећи ћемо нешто о поменутим системима. Како они нису суштина ове дисертације, издвојићемо само неке од најпознатијих: GRAPH, AutoGraphiX (AGX) и newGRAPH.

Најстарији је програмски пакет GRAPH. Развијен је од стране Драгоша Цветковића и Слободана Симића на Електротехничком факултету Универзитета у Београду у периоду између 1980–1984. године, а његов опис се може видети у референцама [10], [12] и [20]. GRAPH је дизајниран тако да подржава истраживања у теорији графова и он пре свега служи као подршка кориснику да постави и потврди или оповргне хипотезу.

AGX је још један од система из теорије графова, који је направљен за лакше проналажење хипотеза, као и за претрагу екстремалних графова. G.Caporossi и P.Hansen 2000. године у раду [18] развили су овај систем у оквиру GERAD групе из Монтреала. Опис AGX система је детаљно дат у референцама [1], [2] и [3]. Сви екстремални проблеми које AGX решава могу се изразити као оптимизација на коначним фамилијама графова и за њено решавање AGX користи методу промењљивих околина (енг. Variable Neighborhood Search – VNS). Након ове почетне верзије AGX система у наредне две деценије су развијена нека побољшања основног AGX система. Најновија унапређења су описана у раду [13] и главна разлика ове верзије, у односу на претходне, је та што има за циљ проучавање екстремалних графова у односу на чворове графа уместо у односу на једну или више инваријанти. Такође, алгоритам оптимизације је и даље заснован на VNS, али је значајно промењен и унапређен.

Даље, описаћемо још један систем newGRAPH. Он је новија верзија система GRAPH и његова сврха је такође подршка кориснику у истраживању у теорији графова. Овај систем је дело Владимира Бранкова, Драгана Стевановића и Марка Милошевића и његову главну карактеристику чини прилагођеност сваком истраживачу. Тачније, корисник може писати нове графовске инваријанте, генерисати графове, али и увести постојеће датотеке. Детаљније о овом систему се може видети у [8].

Сада ћемо рећи нешто и о егзактним методама за проналажење екстремалних графова. Оне методе које су за нас интересантне, а које су примењиване у радовима из шире области дисертације, јесу методе математичког програмирања.

Од разних примена методе линеарног програмирања, за решавање неких специфичних екстремалних проблема графова, навешћемо: Павловић и Гутман (2001) у раду [55], Fischermann и остали (2003) у раду [26], Павловић (2007) у раду [52], Гутман и остали (2008) у раду [29] и Дивнић, Миливојевић и Павловић (2014) у раду [23].

Од разних примена методе квадратног програмирања навешћемо: Павловић и Дивнић (2007) у раду [54] и Миливојевић и Павловић (2017) у раду [49].

Развој ових метода и задавање математичког модела графа, из неке класе графова, је од великог значаја за развој математичких модела, али и алата у оптимизацији. Доста значајан корак у решавању ових проблема јесте постављање модела или релаксација датих проблема. Пошто сваки граф можемо приказати помоћу одређеног броја једнакости и/или неједнакости, то јест помоћу линеарних и нелинеарних ограничења, која морају бити задовољена, долазимо до модела или релаксације које потом решавамо одабраном методом. Напоменимо да модел постаје тежи за решавање у случају нелинеарних ограничења, па понекад користимо и његову линеарну релаксацију при решавању.

Разматрање свих облика екстремалних проблема графова је далеко изван оквира овог рада. Због тога ћемо бити фокусирани на само две врсте проблема:

- екстремалне разлике две графовске инваријанте (од којих је једна мешовита метричка димензија);
- $\mathrm{Nordhaus}-\mathrm{Gaddum}$ доње и горње границе за збир и производ произвољног графа G и његовог комплементарног графа $\overline{G}$.

Оригинални резултати за први облик проблема биће приказани у поглављу 3, а за други у поглављу 4. У наставку ћемо дати основне дефиниције и особине из литературе које ћемо касније примењивати и користити у доказу главних резултата.

Нека су $\xi_1(G)$ и $\xi_2(G)$ две графовске инваријанте. Тада уводимо функцију $(\xi_1-\xi_2)(n)$.

Дефиниција 1.13. $(\xi_1-\xi_2)(n)$ је максимална вредност разлике $\xi_1(G)-\xi_2(G)$, за све графове G реда n.

Теорема 1.3. [*15*] *Повезан граф* G *реда* n *има метричку димензију 1 ако и само ако је* $G=P_n$.

Теорема 1.4. [*15*] *Повезан граф* G *реда* $n\geq 2$ *има метричку димензију* $n-1$ *ако и само ако је* $G=K_n$.

Лема 1.2. [*15*] *За граф* $G(V,E)$ *са дијаметром* D *и* $\beta(G)=k$ *важи да је* $|V|\leq k+D^k$.

Теорема 1.5. [*28*] *Максималан могући степен сваког графа, метричке димензије највише k, је* 3^k-1.

Даље, како је јасно да за произвољан чвор v у графу G, скуп $V(G)\backslash\{v\}$ је скуп разрешења грана и како је неопходно да је најмање један чвор у било ком скупу разрешења, добијају се природне границе за метричку димензију грана графа, то јест

$$1 \le \beta_E(G) \le n-1. \tag{1.5}$$

Тврђење 1.6. [38] *За свако* $n \ge 2$ *важи* $\beta_E(P_n) = \beta(P_n) = 1$, $\beta_E(C_n) = \beta(C_n) = 2$ *и* $\beta_E(K_n) = \beta(K_n) = n-1$. *Штавише,* $\beta_E(G) = 1$ *ако и само ако је* G *пут* P_n.

Тврђење 1.7. [38] *Нека је* G *повезан граф и* $\triangle(G)$ *максималан степен графа* G, *тада је*

$$\beta_E(G) \ge \lceil \log_2 \triangle(G) \rceil. \tag{1.6}$$

Теорема 1.6. [27] *Нека је* G *повезан граф и нека је* $\delta(G)$ *минималан степен графа* G, *тада је*

$$\beta_E(G) \ge 1 + \lceil \log_2 \delta(G) \rceil. \tag{1.7}$$

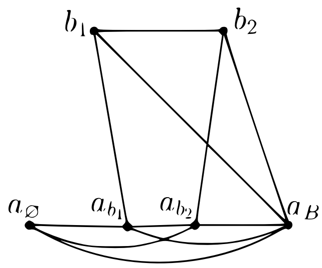
Даље, напоменимо да су у основном раду [38], где је први пут уведена метричка димензија грана, дати примери графова за које је метричка димензија грана мања, једнака и већа од метричке димензије графа G. Штавише, показано је да постоје графови који задовољавају све тројке (x, y, n) такве да важи

$$1 < x \le y \le 2x \le n-2,$$

при чему је $x = \beta(G)$ и $y = \beta_E(G)$. Показано је да за графове облика точка, разлика између метричке димензије грана и метричке димензије расте са порастом реда графа. Затим, у раду [66], поред тога што је дата карактеризација графова са n чворова код којих је $\beta_E(G) = n-1$, доказано је и да је $\frac{\beta_E(G)}{\beta(G)}$ неограничено одозго. У том раду, појављују се графови F_r, који ће бити уведени у следећој дефиницији, као и неке особине тих графова.

Дефиниција 1.14. [66] За позитиван цео број r, нека је F_r граф са скупом чворова $A \cup B$, где је $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ и $A = \{a_S | S \subseteq B\}$. У њему су b_i и b_j суседни за све $b_i, b_j \in B$, где је $b_i \neq b_j$, и a_S и a_T суседни за све $a_S, a_T \in A$, где је $a_S \neq a_T$. Такође, за било које $b_i \in B$ и $a_S \in A$ чворови b_i и a_S су суседни ако и само ако $b_i \in S$.

На слици 6 приказан је граф F_2. Интересантно је питање колика је вредност метричке димензије ових графова, затим одговарајуће димензије грана, као и мешовите метричке димензије. Одговор на прва два питања дат је у следећој теореми из рада [66], а на последње питање је коначан одговор дат у поглављу 3.1.



Слика 6: Граф F_2

Теорема 1.7. [*66*] *За било који позитиван цео број r важи*

$$\beta(F_r) = r \quad и \quad \beta_E(F_r) = r + 2^r - 2.$$

Последица 1.2. [*66*] $\frac{\beta_E(G)}{\beta(G)}$ *није ограничен одозго.*

Из неједнакости (1.4) следи још једна последица теореме 1.7.

Последица 1.3. *За свако $r \geq 1$ важи $\beta_M(F_r) \geq r + 2^r - 2$.*

Такође, лако је приметити да важе још две последице претходне теореме.

Последица 1.4. $(\beta_E - \beta)(r + 2^r) \geq 2^r - 2$.

Последица 1.5. $(\beta_M - \beta)(r + 2^r) \geq 2^r - 2$.

Следеће тврђење описује везу између скупа јаког разрешења и скупа разрешења.

Тврђење 1.8. [*58*] *Сваки скуп јаког разрешења је такође и скуп разрешења, односно $\beta_S(G) \geq \beta(G)$.*

Тврђење 1.9. [*41*] *Ако је $S \subset V$ скуп јаког разрешења графа G, онда за свака два максимално удаљена чвора $v, w \in V$, мора да је $v \in S$ или $w \in S$.*

Додатне особине и тврђења о јакој метричкој димензији могу се наћи у прегледном раду [42].

1.5 Веза између метричке димензије графа и његовог комплементарног графа

Настављајући се на претходну секцију, у овој секцији описујемо другу, посебну врсту екстремалних проблема графова, где учествује граф и његов комплементаран граф, који су названи $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$, по ауторима рада [51] из 1956. године. Они су дали опште границе за збир и производ хроматског броја графа G и његовог комплементарног графа $\overline{G}$. Напоменимо да је горњу границу за збир прво предложио Zykov 1949. године у раду [67] на руском језику, односно 1952. године у раду [68] на енглеском језику. Од тада се појавио велики број резултата у вези $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ граница за многе друге графовске инваријанте који су изложени у неколико стотина радова. Пошто опис свих тих резултата излази изван оквира ове дисертације, заинтересовани читалац може наћи велики број информација о томе у прегледном раду [4].

У областима проблема метричке димензије Хернандо и остали (2014) у раду [33] дали су $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ границе за неколико добро познатих графовских инваријанти, од којих ће овде бити изложени резултати за метричку димензију.

Теорема 1.8. [*33*] *За сваки нетривијалан граф* G *важи* $2 \le \beta(G) + \beta(\overline{G}) \le 2n-1$. *Штавише,*

- $\beta(G) + \beta(\overline{G}) = 2$ *ако и само ако* $G = P_4$*;*
- $\beta(G) + \beta(\overline{G}) = 2n-1$ *ако и само ако* $\{G, \overline{G}\} = \{K_n, \overline{K}_n\}$.

Нека је даље дат граф G реда n и претпоставимо да је $V(G) = \{1, \ldots, n\}$. Нека $G[H^{(i)}]$ означава граф који се добија када се у графу G чвор i замени датим графом H и сваки чвор графа H се повеже са сваким суседом чвора i у G. Слично, $G[H_1^{(i)}, H_2^{(j)}]$ означава граф који се добија из G заменом чвора i графом H_1 и чвора j графом H_2 и повезивањем свих чворова из H_1 (свих чворова из H_2) са сваким суседом чвора i (чвора j) у G и још ако је $ij \in E(G)$, онда је и сваки чвор графа H_1 повезан са сваким чвором графа H_2.

Теорема 1.9. [*33*] *За сваки обострано повезан граф* G *реда* $n \ge 4$ *важи* $2 \le \beta(G) + \beta(\overline{G}) \le 2n-6$. *Штавише,*

- $\beta(G) + \beta(\overline{G}) = 2$ *ако и само ако* $G = P_4$*;*
- $\beta(G) + \beta(\overline{G}) = 2n-6$ *ако и само ако* $G \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$*, где*
  - $\Omega_1 = \{P_4, P_5, B\}$
  - $\Omega_2 = \{P_4[K_{n-3}^{(1)}], P_4[\overline{K}_{n-3}^{(1)}], P_4[K_{n-3}^{(2)}], P_4[\overline{K}_{n-3}^{(2)}]\}$
  - $\Omega_3 = \{P_4[K_r^{(1)}, K_{n-r-2}^{(2)}] : 1 \le r \le n-3\} \cup \{P_4[\overline{K}_r^{(1)}, \overline{K}_{n-r-2}^{(3)}] : 1 \le r \le n-3\}$.

Граф B се назива bull граф и то је планаран, неоријентисан граф са 5 чворова и 5 грана, у облику троугла са две одвојене висеће гране.

1.6 Метричке димензије за неке фамилије графова

У овом одељку најпре наводимо вредности мешовите метричке димензије за контуре, комплетне бипартитне графове, стабла и правоугаоне графове које се могу наћи у референци [39].

Тврђење 1.10. [*39*] *За било који позитиван цео број* $n \geq 4$ *важи* $\beta_M(C_n) = 3$.

Тврђење 1.11. [*39*] *За све позитивне целе бројеве* $r, t \geq 2$ *важи*

$$\beta_M(K_{r,t}) = \begin{cases} r+t-1, & r = 2 \vee t = 2; \\ r+t-2, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 1.10. [*39*] *За било које стабло* T *са* $l(T)$ *листова важи да је* $\beta_M(T) = l(T)$.

Тврђење 1.12. [*39*] *Нека је* G *правоугаони граф* $G = P_r \square P_t$ *за* $r \geq t \geq 2$. *Тада је* $\beta_M(G) = 3$.

Такође, у раду [39] изложена је горња граница за мешовиту метричку димензију графова. Обим $g(G)$ графа G је ред најмање контуре у G. За мешовиту метричку димензију дата је горња граница која зависи од обима графа.

Теорема 1.11. [*39*] *Нека је* G *граф реда* n. *Ако* G *садржи контуру, тада је* $\beta_M(G) \leq n - g(G) + 3$.

На крају ове секције, наводимо егзактне вредности метричке димензије и/или метричке димензије грана за графове облика точка, торус графове и графове цветних латица. За ове графове, у поглављу 5, су први пут добијене егзактне вредности мешовите метричке димензије. Такође, у овом поглављу добијена је први пут и мешовита метричка димензија за комплетно раздвојене графове, при чему за ове графове метричка димензија и метричка димензија грана нису још увек познате у литератури.

Наводимо метричку димензију и метричку димензију грана за графове облика точка, добијену у раду [6]

$$\beta(W_n) = \begin{cases} 3, & n = 3, 6; \\ 2, & n = 4, 5; \\ \lfloor \frac{2n+2}{5} \rfloor, & n \geq 7, \end{cases} \tag{1.8}$$

односно, у раду [38]

$$\beta_E(W_n) = \begin{cases} n, & n = 3, 4\,; \\ n-1, & n \geq 5. \end{cases} \tag{1.9}$$

Даље, у раду [19] добијена је метричка димензија за торус графове, која важи за све $m, n \geq 3$

$$\beta(T_{m,n}) = \begin{cases} 3, & m \text{ или } n \text{ непарно;} \\ 4, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.10}$$

У раду [38] добијена је вредност метричке димензије грана за специјалан случај торус графова, која важи за све целобројне s и t

$$\beta_E(C_{4s} \square C_{4t}) = 3. \tag{1.11}$$

Теорема 1.12. [35] *Нека је J_n граф цветних латица. Тада, за сваки непаран, позитиван цео број $n \geq 5$ важи да је $\beta(J_n) = 3$.*

2 Опште доње границе мешовите метричке димензије

2.1 Нове опште доње границе

Најпре ћемо увести доњу границу за мешовиту метричку димензију произвољног повезаног графа G, која незнатно побољшава доњу границу за метричку димензију грана из теореме 1.6.

Теорема 2.1. *Нека је G повезан граф и u произвољан чвор из скупа мешовитог разрешења S графа G. Тада је*

$$|S| \geq 1 + \lceil \log_2(1 + deg_u) \rceil. \tag{2.1}$$

Доказ. Претпоставимо да је $S = \{u, v_2, \ldots, v_p\}$. Тада, вектор метричких координата чвора u, у односу на скуп S, је $r(u, S) = (0, d_2, \ldots, d_p)$, при чему је $d_k = d(v_k, u)$ за свако $k \in [2, p]$. Затим, чвор u је инцидентан са deg_u грана и означимо те гране са $e_1, \ldots, e_{deg_u}$. За сваку позицију $k = 2, \ldots, p$ у скупу S и сваки индекс $l = 1, \ldots deg_u$, грана e_l је инцидентна са u, тако да на основу дефиниције $d(e_l, v_k)$ директно следи да $d(e_l, v_k) \in \{d_k - 1, d_k\}$. Дакле, чвор u и гране $e_1, \ldots, e_{deg_u}$ имају највише 2^{p-1} различитих мешовитих метричких репрезентација у односу на S, што повлачи да је $1 + deg_u \leq 2^{p-1}$, односно $p \geq 1 + \log_2(1 + deg_u)$. Како је $p = |S|$ цео број, онда следи тражена неједнакост, тј. $|S| \geq 1 + \lceil \log_2(1 + deg_u) \rceil$.

□

На основу теореме 2.1 закључујемо да важи следећа последица која описује чворове који не могу да буду елементи скупа мешовитог разрешења.

Последица 2.1. *Нека је G повезан граф и нека је v произвољан чвор $v \in V$. Ако је $deg_v > 2^{\beta_M(G)-1} - 1$, тада v није члан ниједног скупа мешовитог разрешења S, кардиналности $\beta_M(G)$, графа G.*

Имајући у виду да је $\delta(G)$ минималан степен чвора графа G, имамо још једну последицу теореме 2.1.

Последица 2.2. *Нека је G повезан граф, тада је*

$$\beta_M(G) \geq 1 + \lceil \log_2(\delta(G) + 1) \rceil. \tag{2.2}$$

Пример 2.1. *За мали граф G_1 дат у примеру 1.1 ова доња граница израчунава се на следећи начин: Пошто је минималан степен чворова $\delta(G) = 2$, из неједнакости (2.2) добија се да је доња граница једнака 3.*

За регуларне графове, важи следећа последица.

Последица 2.3. *Нека је G $r-$регуларан граф, тада је*

$$\beta_M(G) \geq 1 + \lceil \log_2(r + 1) \rceil. \tag{2.3}$$

У наставку, ћемо представити везу између мешовите метричке димензије и проблема минималног репрезентативног скупа. Напоменимо да се проналажење репрезентативног скупа минималне кардиналности назива проблем минималног репрезентативног скупа (енг. Minimum Hitting Set Problem – MHSP), као и да је проблем минималног репрезентативног скупа еквивалентан познатом проблему покривања скупа (енг. Set Covering Problem). Напоменимо да оба ова проблема припадају класи $NP-$тешких проблема.

Пошто смо раније увели скупове W_{vw} и W_{wv}, везу између ова два скупа и скупа мешовитог разрешења дајемо у следећој леми.

Лема 2.1. *Нека је G повезан граф, $vw \in E$ произвољна грана и S скуп мешовитог разрешења, тада важи:*

а) $W_{wv} \cap S \neq \emptyset$;

б) $W_{vw} \cap S \neq \emptyset$.

Доказ. *а)* Претпоставимо супротно, тј. да постоји грана $vw \in E$ таква да је $W_{wv} \cap S = \emptyset$. Одатле закључујемо да је $d(v, u) \leq d(w, u)$ за сваки чвор $u \in S$. Тада се, на основу неједнакости (1.3), лако може закључити да су мешовите метричке координате од v исте као и мешовите метричке координате од vw, тј. $r(v, S) = r(vw, S)$. Дакле, закључујемо да S није скуп мешовитог разрешења, што је у контрадикцији са почетном претпоставком. Дакле, важи да је $W_{wv} \cap S \neq \emptyset$.

б) Аналогним поступком, приказаним у делу под *а)*, доказујемо и овај део леме, тако да ће доказ бити изостављен.

□

Даље, како смо свакој грани $vw \in E$ доделили скупове W_{vw} и W_{wv}, а у графу имамо m грана, лако је закључити да има укупно $2m$ таквих скупова. Наша идеја је да пронађемо минималан репрезентативни скуп H^* за фамилију скупова $\{W_{wv}, W_{vw} | vw \in E\}$. Кардиналност минималног репрезентативног скупа, ове фамилије скупова, означимо са $MHSP(\{W_{wv}, W_{vw} | vw \in E\})$.

Следећа теорема даје нову доњу границу за мешовиту метричку димензију засновану на кардиналности изнад уведеног минималног репрезентативног скупа.

Теорема 2.2. *За сваки повезан граф G важи*

$$\beta_M(G) \geq MHSP(\{W_{vw}, W_{wv} | vw \in E\}). \tag{2.4}$$

Доказ. Нека је $\beta_M(G)$ мешовита метричка димензија повезаног граф G. Тада постоји скуп мешовитог разрешења S, такав да је $|S| = \beta_M(G)$. На основу леме 2.1, за произвољну грану vw, следи да важи

$$W_{vw} \cap S \neq \emptyset \text{ и } W_{wv} \cap S \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

Ако имамо у виду услове (2.5), закључујемо да у сваком од ових скупова W_{vw} и W_{wv} постоји најмање један елемент из S, за сваку грану vw. Размотрићемо сада проблем минималног репрезентативног скупа над фамилијом скупова W_{vw} и W_{wv}, при чему је $vw \in E$. Како скуп мешовитог разрешења S задовољава (2.5), лако се види да је S репрезентативни скуп над фамилијом $\{W_{wv}, W_{vw} | vw \in E\}$ и како је јасно да је кардиналност сваког репрезентативног скупа већа или једнака од кардиналности минималног репрезентативног скупа, закључујемо да следи неједнакост (2.4).

□

Пример 2.2. *Доња граница из теореме 2.2, за мали граф G_1 дат у примеру 1.1, добијена помоћу методе тоталне енумерације за решавање проблема минималног репрезентативног скупа износи 5.*

Представићемо још једну доњу границу за мешовиту метричку димензију базирану на дијаметру графа.

Теорема 2.3. *Нека је $G = (V, E)$ повезан граф са мешовитом метричком димензијом $\beta_M(G)$ и нека је $D(G)$ дијаметар графа G, тада је*

$$|V| + |E| \leq D(G)^{\beta_M(G)} + \beta_M(G)(\triangle(G) + 1). \tag{2.6}$$

Доказ. Размотрићемо све могуће репрезентације метричких координата свих грана и свих чворова графа G. Пошто је дијаметар графа $D(G)$, лако се може закључити да сваки елемент графа може имати целобројне координате између 0 и $D(G)$. Даље, скуп свих елемената графа раздвојићемо на две дисјунктне класе:

$I)$ елементи графа чије метричке координате не садрже ниједну вредност 0;

$II)$ елементи графа чија је бар једна метричка координата једнака 0.

Лако се види да сваки елемент из $I)$ класе, који нема ниједну координату једнаку 0, мора имати координате из једне од $D(G)^{\beta_M(G)}$ различитих могућности, пошто је укупан број могућности једнак броју варијација са понављањем од $D(G)$ елемената класе $\beta_M(G)$. Затим, лако се може закључити да елементи $II)$ класе, који међу координатама садрже 0, могу бити само чворови из базе или гране које садрже неки чвор из базе. Дакле, за сваки елемент базе, постоји највише $\triangle(G)+1$ могућности, то јест он мора имати јединствене координате из једне од $\beta_M(G)(\triangle(G) + 1)$ могућности. Из претходног је лако закључити да важи неједнакост (2.6), чиме је комплетиран доказ теореме.

□

Пример 2.3. *Доња граница из теореме 2.3, за мали граф G_1 дат у примеру 1.1, добијена применом неједнакости (2.6) износи 2.*

2.2 Илустративни пример нових и старих доњих граница

У овој секцији дати су илустративни примери нових и старих доњих граница, као и тачне вредности мешовите метричке димензије, посматраних на две класе графова. Посматрани су сви повезани графови са 5 чворова, чије су карактеристике дате у Табели 1, као и 12 добро познатих графова, чије су карактеристике приказане у раду [MDKSM21]. За ове графове израчунате су доње границе добијене у радовима [27] и [39], као и нове доње границе приказане у секцији 2.1. Напоменимо да добијени резултати нових и старих доњих граница за све повезане графове са 5 чворова нису потпуно репрезентативни јер су у питању графови са малим бројем чворова. Због тога се ове границе израчунавају и за испред поменутих 12 графова. Лако је приметити да су узети у разматрање графови који имају од 5 до 36 чворова. Један од главних разлога за њихово разматрање јесте и то што се за њих могла одредити тачна вредност мешовите метричке димензије, будући да је проблем њеног израчунавања $NP-$тежак.

Повезаних графова са 5 чворова има укупно 21 и они су приказани на слици 7.

Као што смо и рекли, у наредној Табели 1 приказане су карактеристике свих повезаних графова са 5 чворова, док су за сваки од њих, старе и нове доње границе, као и мешовита метричка димензија, приказане у Табели 3.

Описаћемо најпре значење колона у Табели 1.

У првој колони, обележеној са *Р. бр.*, дати су називи повезаних графова са пет чворова у облику n, где је n број графа са слике 7.

У другој колони, обележеној са $|E|$, дат је број грана графа.

У трећој колони, обележеној са $\beta(G)$, дата је метричка димензија графа.

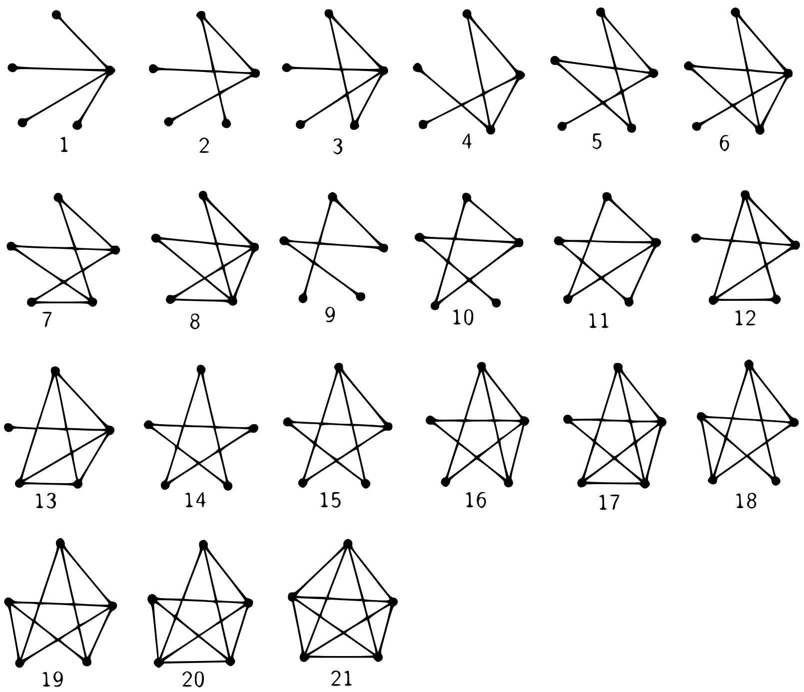
У четвртој колони, обележеној са $\beta_E(G)$, дата је метричка димензија грана графа.

Сада у две табеле можемо приказати резултате проучавања, односно дајемо поређење доњих граница, као и мешовиту метричку димензију за поменуте графове. У Табели 2 дајемо поређење доњих граница за 12 добро познатих графова, док у Табели 3 дајемо поређење за све повезане графове са 5 чворова.

Даље, описујемо значење колона у Табели 3. Значење прве колоне, означене са *Р. бр.*, је исто као и код Табеле 1. У другој колони, обележеној са $\beta_M(G)$, дата је мешовита метричка димензија. Затим, наредне четири колоне садрже доње границе из литературе: $L1$ и $L2$ означавају доње границе из тврђења 1.7 и теореме 1.6. Тврђење 1.3, тврђење 1.4, тврђење 1.5 и последица 1.1 одређују по једну доњу границу, али у сврху транспарентности Табеле 3 одлучили смо да дамо обједињену доњу границу која обухвата све њих и означили смо је са $L3$. Ова доња граница се не може добити у општем случају, већ за сваки одређени граф, доње границе из сва три тврђења и последице 1.1 рачунају се одвојено и онда се обједињују у

Табела 1: Карактеристике свих повезаних графова са 5 чворова

Р. бр.	$\|E\|$	$\beta(G)$	$\beta_E(G)$
1.	4	3	3
2.	4	2	2
3.	5	2	3
4.	5	2	2
5.	5	2	2
6.	6	2	3
7.	6	3	3
8.	7	3	4
9.	4	1	1
10.	5	2	2
11.	6	2	3
12.	6	2	3
13.	7	3	3
14.	5	2	2
15.	6	2	2
16.	7	2	3
17.	8	3	4
18.	7	2	3
19.	8	2	4
20.	9	3	4
21.	10	4	4



Слика 7: Сви повезани графови са 5 чворова.

границу $L3$. Доња граница $L4$ заснива се на ЛП релаксацији проблема мешовите метричке димензије. Последње три колоне садрже нове границе $N1$, $N2$ и $N3$ које произилазе из последице 2.2, теореме 2.2 и теореме 2.3, редом.

Напоменимо, да се вредности за метричку димензију, метричку димензију грана и мешовиту метричку димензију за графове до 36 чворова, добијају у реалном времену помоћу методе тоталне енумерације. Дакле, ова метода је коришћена за добијање података за $\beta(G)$, $\beta_E(G)$ и $\beta_M(G)$ за све разматране графове. Затим подаци приказани у колони означеној са $L4$, која представља ЛП релаксацију проблема мешовите метричке димензије, могу се у реалном времену добити било којим софтвером за линеарно програмирање: CPLEX, Gurobi, GLPK, LP_solve и други. Подаци приказани у колони означеној са $N2$ такође се добијају коришћењем методе тоталне енумерације.

Као што се може видети из Табеле 3, нове доње границе дају врло добре резултате као и границе познате из литературе $L1$, $L2$, $L3$ и $L4$, при чему је број чворова релативно мали ($|V| = 5$). Због тога су извршени и прорачуни свих граница за 12 добро познатих графова.

У Табели 2 прва колона садржи редне бројеве графова означене на исти начин као у испред споменутом раду у коме су дате њихове карактеристике.

Табела 2: Директно поређење доњих граница за 12 познатих графова

		Доње границе из лит*.				Нове доње границе		
Р. бр.	$\beta_M(G)$	$L1$	$L2$	$L3$	$L4$	$N1$	$N2$	$N3$
1.	9	β_M-5	β_M-4	0	β_M-3	β_M-4	β_M-3	β_M-1
2.	32	β_M-28	β_M-27	0	β_M-14	β_M-27	β_M-23	β_M-24
3.	9	β_M-6	β_M-5	0	β_M-5	β_M-5	β_M-4	β_M-4
4.	18	β_M-14	β_M-13	0	β_M-14	β_M-13	β_M-12	β_M-10
5.	4	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	0	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M- 2	β_M-1
6.	12	β_M-8	β_M-7	0	β_M-8	β_M-7	β_M-6	β_M-6
7.	4	β_M-2	β_M-1	0	β_M-2	β_M-1	β_M-1	β_M-1
8.	6	β_M-3	β_M-2	0	β_M-2	β_M-2	β_M-1	β_M-1
9.	6	β_M-4	β_M-3	0	β_M-2	β_M-3	β_M-2	β_M-2
10.	5	β_M-3	β_M-3	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-2	β_M-1	β_M-2
11.	9	β_M-5	β_M-4	0	β_M-3	β_M-4	β_M-3	β_M-1
12.	6	β_M-3	β_M-2	0	β_M-3	β_M-2	β_M-3	β_M-2

*Доње границе из литературе

Значење свих осталих колона, означених са $\beta_M(G), L1, L2, L3, L4, N1, N2$ и $N3$, је исто као код Табеле 3.

Из Табеле 2 се види да су нове доње границе боље од оних из литературе, зато што су у 10 случајева нове доње границе боље или једнаке већ познатим, док су у 6 случајева добијене најбоље доње границе до сада. Свих 7 доњих граница треба користити у унији, пошто су различите доње границе примењиве за различите графове и ниједна од њих није доминантна над осталима. Важна карактеристика представљених доњих граница јесте да је њихова сложеност прорачуна обично много мања у поређењу са сложеношћу проблема обичне, гранске и мешовите метричке димензије.

Напоменимо да заправо најбоља доња граница у односу на експерименталне резултате јесте метричка димензији грана. Међутим, ова чињеница има врло ограничен практични утицај, пошто обе, мешовита и метричка димензија грана, припадају класи $NP-$тешких проблема. Заправо ова граница има смисла само у случајевима када знамо тачну вредност метричке димензије грана (из литературе), а да притом не знамо тачну вредност мешовите метричке димензије. Такође, у ту сврху могу послужити и познате доње границе метричке димензије грана из литературе.

Табела 3: Директно поређење доњих граница за повезане графове са 5 чворова

		Доње границе из лит*.				Нове доње границе		
Р. бр.	$\beta_M(G)$	$L1$	$L2$	$L3$	$L4$	$N1$	$N2$	$N3$
1.	4	β_M-2	β_M-3	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M-2
2.	3	β_M-1	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	β_M-1
3.	4	β_M-2	β_M-3	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M-2
4.	3	β_M-1	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	β_M-1
5.	3	β_M-1	β_M-2	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	β_M-1	β_M-1	β_M-1
6.	4	β_M-2	β_M-3	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M-2
7.	4	β_M-2	β_M-2	β_M-2	β_M-1	β_M-1	β_M-2	β_M-2
8.	5	β_M-3	β_M-3	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M-3
9.	2	β_M-1	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$
10.	3	β_M-1	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	β_M-1
11.	4	β_M-2	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	β_M-2
12.	4	β_M-2	β_M-3	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M-2
13.	4	β_M-2	β_M-3	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M-2
14.	3	β_M-2	β_M-1	0	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-1
15.	3	β_M-1	β_M-1	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-1
16.	4	β_M-2	β_M-2	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	β_M-2
17.	5	β_M-3	β_M-3	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M-3
18.	4	β_M-2	β_M-2	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	β_M-1	β_M-1	β_M-2
19.	4	β_M-2	β_M-1	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	β_M-2
20.	5	β_M-3	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	β_M-3
21.	5	β_M-3	β_M-2	$\underline{\beta_M}$	$\underline{\beta_M}$	β_M-1	$\underline{\beta_M}$	β_M-2

*Доње границе из литературе

3 Екстремални проблеми графова који укључују мешовиту метричку димензију

Мотивација за изучавање екстремалних проблема описаних у овом поглављу, а који укључују мешовиту метричку димензију, потиче из једноставног питања: Колико највише може да буде разлика мешовите метричке димензије графа датог реда у односу на неку другу метричку димензију? У овом поглављу дајемо оригиналне резултате докторске дисертације који се тичу екстремалних разлика између неколико графовских инваријанти: мешовите метричке димензије, метричке димензије грана и јаке метричке димензије.

Најпре ће бити доказани резултати који су директна уопштења тврђења из литературе, која су била наведена у уводном поглављу.

3.1 Нека уопштења познатих тврђења

Последица 1.3 дата у секцији 1.4 се може побољшати за 1 тако да најпре уводимо дефиницију и лему, које ће нам бити потребне за добијање њене боље доње границе.

Дефиниција 3.1. За чвор $v \in V(F_r)$ уводимо $S'_v = V(F_r) \setminus \{v\}$.

Лема 3.1.

а) S'_{a_B} јесте скуп мешовитог разрешења графа F_r.

б) За сваки чвор $v \in V(F_r) \backslash \{a_B\}$, скуп S'_v није скуп мешовитог разрешења графа F_r.

Доказ. а) Доказаћемо да су метричке координате свих елемената (чворова и грана) графа F_r, међусобно различите у односу на скуп S'_{a_B}. Најпре ћемо приказати особине метричких координата свих елемената графа и у зависности од елемената чије метричке координате посматрамо, разликујемо следећа четири случаја.

Случај 1. *Чвор* a_B. Пошто је подграф генерисан чворовима из скупа A, комплетан граф, онда за сваки чвор $w \in A$ важи $d(a_B, w) = 1$. Такође, пошто је за сваки чвор $u \in B$, $ua_B \in E(F_r)$, онда је $d(a_B, u) = 1$. Због тога су метричке координате чвора a_B у односу на скуп S'_{a_B} све јединице, односно $r(a_B, S'_{a_B}) = (1, \dots, 1)$.

Случај 2. *Чворови* $V(F_r) \backslash \{a_B\}$. Сваки од ових чворова имаће координату 0 на својој позицији и имаће неке координате једнаке 1 и бар једну координату једнаку 2. Прецизније, пошто празан скуп не садржи ниједан елемент, онда $b_1 a_\emptyset \notin E(F_r)$ и како је $D(F_r) = 2$, онда следи да је $d(b_1, a_\emptyset) = 2$.

Случај 3. *Гране које повезују чвор* a_B *са преосталим чворовима.* Метричке координате свих грана које полазе из чвора a_B ка преосталим чворовима $v \in V(F_r) \backslash \{a_B\}$ имаће тачно једну 0 на позицији чвора v. Све преостале координате су једнаке 1, зато што је чвор a_B суседан са свим осталим чворовима, односно $d(a_B, v) = 1$, за све $v \in V(F_r) \backslash \{a_B\}$.

Случај 4. *Гране које не садрже чвор* a_B. Све гране $uv \in E(F_r)$ такве да је $u \neq a_B$ и $v \neq a_B$ имаће по две координате 0 на позицијама чворова u и v, а преостале координате су 1 или 2.

Очигледно, из претходна четири случаја лако закључујемо да су метричке координате свих елемената графа F_r међусобно различите, одакле следи да скуп S'_{a_B} јесте скуп мешовитог разрешења.

б) Претпоставимо супротно, то јест да скуп S'_v јесте скуп мешовитог разрешења графа F_r, при чему је $v \in V(F_r) \backslash \{a_B\}$. Тада је $d(a_B, a_B) = d(va_B, a_B) = 0$. Затим, пошто је чвор a_B суседан са свим осталим чворовима $w \in V(F_r) \backslash \{a_B, v\}$, онда важи $d(a_B, w) = d(va_B, w) = 1$. Дакле, због тога је

$$r(a_B, S'_v) = r(va_B, S'_v) = (1, \dots, 1, 0),$$

што је контрадикција са почетном претпоставком, односно закључујемо да скуп S'_v није скуп мешовитог разрешења.

□

Тврђење 3.1. $\beta_M(F_r) = r + 2^r - 1$.

Доказ. Доказаћемо два корака.

Корак 1: $\beta_M(F_r) \leq r + 2^r - 1$.

Из леме 3.1 под *а)* имамо да је S'_{a_B} скуп мешовитог разрешења, одакле следи да је $\beta_M(F_r) \leq r + 2^r - 1$.

Корак 2: $\beta_M(F_r) \geq r + 2^r - 1$.

Претпоставимо супротно, то јест да је $\beta_M(F_r) \leq r + 2^r - 2$. Нека је S скуп мешовитог разрешења и тада је $|S| \leq r + 2^r - 2$. Из кардиналности скупа S закључујемо да постоје бар два чвора која му не припадају и један од њих сигурно није последњи чвор a_B, то јест постоји $v \notin S$ такво да је $v \neq a_B$. Тада из леме 3.1 под *б)* скуп S'_v није скуп мешовитог разрешења графа F_r, одакле следи да онда ни $S \subseteq S'_v$ није скуп мешовитог разрешења, а то је контрадикција са почетном претпоставком. Дакле, $\beta_M(F_r) \geq r + 2^r - 1$.

На основу претходно доказана два корака, доказ тврђења је комплетиран.

□

Следећа последица произилази на основу тврђења 3.1.

Последица 3.1. $(\beta_M - \beta)(r + 2^r) \geq 2^r - 1$.

У следећој теореми решавамо случај налажења разлике $(\beta_M - \beta_S)(r+2^r)$, а који се заснива на графовима F_r.

Теорема 3.1. *За свако* $r \geq 2$ *важи да је* $(\beta_M - \beta_S)(r + 2^r) \geq 2^r - 1$.

Доказ. Из тврђења 1.8 и теореме 1.7 директно важи $\beta_S(F_r) \geq \beta(F_r) = r$. Потребно је да докажемо да је скуп B скуп јаког разрешења графа F_r. Претпоставимо да су $u, v \in V(F_r) \backslash B = A$ и да је притом $u \neq v$. Дакле, пошто су оба u и v из A онда је $d(u, v) = 1$, $u = a_S$ и $v = a_T$, за неко $S, T \subseteq B$. Пошто је $S \neq T$ онда је (најмање) један скуп S или T непразан. Без умањења општости претпоставимо да је $S \neq \emptyset$. Тада постоји $b_j \in S$ $(1 \leq j \leq r)$, такво да је $b_j a_S \in E(F_r)$. Онда, сваки пар чворова $u = a_S$ и $v = a_T$ из $V(F_r) \backslash B$ је јако разрешен у односу на чвор $b_j \in B$, то јест $u = a_S$ припада најкраћем путу дужине 2: $b_j - a_S - a_T$. Дакле, скуп B је скуп јаког разрешења скупа F_r, што повлачи да је $\beta_S(F_r) = r$. Пошто из тврђења 3.1 важи $\beta_M(F_r) = r + 2^r - 1$, онда је $(\beta_M - \beta_S)(r + 2^r) \geq \beta_M(F_r) - \beta_S(F_r) = 2^r - 1$, чиме је доказ комплетиран.

□

Напоменимо да се резултат из теореме 3.1 може асимптотски побољшати коришћењем резултата добијених у раду [28]. Графови у раду [28] у општем случају нису конструктибилни, то јест није лако видети да ли постоји фамилија графова, за коју важи да је јака метричка димензија r, као код метричке димензије, па због тога смо примењивали резултате из Зубрилиног рада [66].

Одговор на питање, да ли постоје графови за које је $\beta_E(G) \gg 2^{\beta(G)}$ дат је у радовима [28] и [44], независно један од другог, али коришћењем различитог приступа.

3.2 Разлика између мешовите и метричке димензије грана

Тврђење 3.2. $(\beta_M - \beta_E)(3) = 1$.

Доказ. Постоје само два повезана графа реда 3: пут P_3 и контура C_3. Из чињенице да важи да је $\beta_M(P_3) = 2$, $\beta_E(P_3) = 1$, $\beta_M(C_3) = 3$ и $\beta_E(C_3) = 2$, очигледно следи тврђење, односно имамо да важи $\beta_M(P_3) - \beta_E(P_3) = \beta_M(C_3) - \beta_E(C_3) = 1$. Дакле, $(\beta_M - \beta_E)(3) = 1$.

□

Даље је решена разлика између мешовите и метричке димензије грана у општем случају за $n \geq 4$, односно, показано је да важи следећа теорема.

Теорема 3.2. *За свако* $n \geq 4$ *важи* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \leq (\beta_M - \beta_E)(n) \leq n - 2$.

Доказ. Прво ћемо доказати доњу границу. Нека је $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и T'_n стабло чији је скуп чворова $V(T'_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, а скуп грана дефинисан са $E(T'_n) = \{v_k v_{k+1} | 1 \leq k \leq n - m\} \cup \{v_k v_{n-m+k} | 2 \leq k \leq m\}$. У циљу бољег разумевања, на слици 8 приказана су стабла T'_8 и T'_9. Лако се може закључити да стабло T'_n има $m+1$ листова, тако да из теореме 1.10 директно следи да је $\beta_M(T'_n) = l(T'_n) = m + 1$.

Слика 8: Стабла T'_8 и T'_9

Даље ћемо показати, проверавањем метричких координата за сваку грану, да је скуп $S'_E = \{v_1, v_{n-m+1}\}$ гранска метричка база. Заиста важи да је $r(v_k v_{k+1}, S'_E) = (k - 1, n - k - m)$ за све $1 \leq k \leq n - m$, као и $r(v_k v_{n+k-m}, S'_E) = (k - 1, n + 1 - m - k)$ за $2 \leq k \leq m$. Пошто су метричке координате свих грана међусобно различите, следи да је скуп S'_E скуп разрешења грана. Пошто је максималан степен чворова у графу T'_n једнак 3 (на пример $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_{n-m+2}\}$), тада из тврђења 1.7 следи да је $\beta_E(T'_n) \geq \lceil \log_2 \triangle(T'_n) \rceil = \lceil \log_2 3 \rceil = 2$. Из чињенице да скуп S'_E кардиналности 2 је скуп разрешења грана графа T'_n и из $\beta_E(T'_n) \geq 2$, следи да је $\beta_E(T'_n) = 2$ и скуп S'_E је гранска метричка база графа T'_n.

Дакле, $\beta_M(T'_n) = l(T'_n) = m + 1$ и $\beta_E(T'_n) = 2$ што повлачи да је $(\beta_M - \beta_E)(n) \geq \beta_M(T'_n) - \beta_E(T'_n) = m - 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, пошто је $(\beta_M - \beta_E)(n)$ максимална вредност разлике $\beta_M(G) - \beta_E(G)$ за све повезане графове G реда n.

Сада доказујемо горњу границу. Оно што је очигледно јесте да повезани графови реда најмање 3, имају $\triangle(G) \geq 2$. Према томе, за доказивање горње границе, имамо два случаја за произвољан граф G:

Случај 1. $\triangle(G) \geq 3$.
Из напомене 1.1 за сваки граф G реда n важи да је мешовита метричка димензија највише n. Такође, из тврђења 1.7 важи $\beta_E(G) \geq \lceil \log_2 \triangle(G) \rceil \geq \lceil \log_2 3 \rceil = 2$. Дакле, $\beta_M(G) - \beta_E(G) \leq n - 2$.

Случај 2. $\triangle(G) = 2$.
Једини повезани графови реда $n \geq 4$, са $\triangle(G) = 2$, то јест где су степени свих чворова мањи или једнаки од 2, су: пут P_n и контура C_n. Имајући на уму да је $\beta_E(P_n) = 1$, $\beta_M(P_n) = 2$, $\beta_E(C_n) = 2$ и $\beta_M(C_n) = 3$, у овом случају је $\beta_M(G) - \beta_E(G) = 1 \leq n - 2$. Дакле, пошто у оба случаја имамо да важи $\beta_M(G) - \beta_E(G) \leq n - 2$, онда је $(\beta_M - \beta_E)(n) \leq n - 2$.

□

3.3 Разлика између јаке и мешовите метричке димензије

Тврђење 3.3. *Тачне вредности, добијене помоћу тоталне енумерације, за* $(\beta_S - \beta_M)(n)$ *за* $3 \leq n \leq 6$, *су дате у Табели 4, заједно са вредностима за* $\beta_S(H'_n)$ *и* $\beta_M(H'_n)$. *Екстремални графови* H'_n *за* $3 \leq n \leq 6$, *приказани су на слици 9.*

Разлика између јаке и мешовите метричке димензије у општем случају за $n \geq 7$ је (парцијално, пошто се доња и горња граница разликују) одређена помоћу следеће теореме.

Теорема 3.3. *За свако* $n \geq 7$ *важи* $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 2 \leq (\beta_S - \beta_M)(n) \leq n - 4$.

Доказ. **Корак 1:** $(\beta_S - \beta_M)(n) \leq n - 4$.
Нека је G повезан граф реда n који није пут. Тада из теореме 1.1 закључујемо да је $\beta_M(G) \geq 3$ и како је, за сваки повезан граф G, $\beta_S(G) \leq n-1$, онда следи $\beta_S(G) - \beta_M(G) \leq n-4$. Нека је сада граф G пут, то јест $G = P_n$, тада пошто је $\beta_S(P_n) = 1$ и $\beta_M(P_n) = 2$, важи да је $\beta_S(P_n) - \beta_M(P_n) = -1 \leq n-4$. Пошто је у оба случаја $\beta_S(G) - \beta_M(G) \leq n - 4$, тада следи $(\beta_S - \beta_M)(n) \leq n - 4$.

Даље, доказујемо доњу границу. Нека је $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и H'_n је граф дат скупом чворова $V(H'_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и скупом грана $E(H'_n) = \{v_k v_{k+1} \mid 1 \leq k \leq n-2\} \cup \{v_1 v_n, v_3 v_n, v_{n-1} v_1\}$. На слици 10 је приказан граф H'_n за $n \geq 7$.

Корак 2: $\beta_M(H'_n) = 3$.
Нека је $S''_M = \{v_2, v_m, v_{m+3}\}$. За $n = 2m$ метричке координате чворова су дате у (3.1), док су метричке координате грана дате у (3.2).

(3.1)
$$r(v_k, S''_M) = \begin{cases} (1, m-1, m-3), & k = 1 \\ (k-2, m-k, m-4+k), & 2 \leq k \leq 3 \\ (k-2, m-k, m+3-k), & 4 \leq k \leq m \\ (m-1, k-m, m+3-k), & m+1 \leq k \leq m+2 \\ (2m+1-k, k-m, k-m-3), & m+3 \leq k \leq 2m-1 \\ (2, m-2, m-2), & k = 2m \end{cases}$$

(3.2)
$$r(e, S''_M) = \begin{cases} (0, m-k-1, k+m-4), & e = v_k v_{k+1}, 1 \leq k \leq 2 \\ (k-2, m-1-k, m+2-k), & e = v_k v_{k+1}, 3 \leq k \leq m-1 \\ (m-2, 0, 2), & e = v_m v_{m+1} \\ (2m-k, k-m, m-k+2), & e = v_k v_{k+1}, \\ & m+1 \leq k \leq m+2 \\ (2m-k, k-m, k-3-m), & e = v_k v_{k+1}, \\ & m+3 \leq k \leq 2m-2 \\ (1, m-1, m-4), & e = v_{2m-1} v_1 \\ (1, m-2, m-3), & e = v_{2m} v_1 \\ (1, m-3, m-2), & e = v_{2m} v_3 \end{cases}.$$

За $n = 2m+1$ метричке координате чворова су дате у (3.3), док су метричке координате грана дате у (3.4).

$$r(v_k, S''_M) = \begin{cases} (2-k, m-1, m+k-3), & 1 \leq k \leq 2 \\ (k-2, m-k, m-k+3), & 3 \leq k \leq m \\ (k-2, k-m, m-k+3), & m+1 \leq k \leq m+2 \\ (2m-k+2, k-m, k-3-m), & m+3 \leq k \leq 2m \\ (2, m-2, m-1). & k = 2m+1 \end{cases} \tag{3.3}$$

(3.4)

$$r(e,S''_M)=\begin{cases}(0,m-2,m-2), & e=v_1v_2\\ (0,m-3,m-1), & e=v_2v_3\\ (k-2,m-k-1,m-k+2) & e=v_kv_{k+1}, 3\le k\le m-1\\ (m-2,0,2), & e=v_mv_{m+1}\\ (m-1,k-m,m+2-k), & e=v_kv_{k+1},\\ & m+1\le k\le m+2\\ (2m+1-k,k-m,k-m-3), & e=v_kv_{k+1},\\ & m+3\le k\le 2m-1\\ (1,m-1,m-3), & e=v_{2m}v_1\\ (1,m-2,m-2), & e=v_{2m+1}v_1\\ (1,m-3,m-1), & e=v_{2m+1}v_3\end{cases}.$$

Из свега наведеног, пошто су све метричке координате чворова и грана међусобно различите, следи да је S''_M скуп мешовитог разрешења графа H'_n, што значи да је $\beta_M(H'_n)\le 3$. Пошто је H'_n повезан граф, који није пут, онда из Теореме 1.1 следи $\beta_M(H'_n)>2$. Имајући на уму да је $\beta_M(H'_n)$ цео број, следи да је $\beta_M(H'_n)=3$.

Корак 3: $\beta_S(H'_n)\ge\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1$.

Случај 1. $n=2m+1$.
Пар чворова v_1, v_{m+1} је међусобно максимално удаљен као у дефиницији 1.12, тако да из тврђења 1.9 следи да мора бар један чвор из тог пара бити у било којем скупу јаког разрешења графа H'_n. Иста чињеница важи и за парове v_k, v_{m+k} за $3\le k\le m$. Према томе, постоји $m-1$ дисјунктних парова чворова, где бар по један чвор из сваког од парова, мора бити у било којем скупу јаког разрешења графа H'_n.

За преостала 3 чвора v_2, v_{m+2} и v_{2m+1}, следи да сва 3 пара чворова: v_2, v_{m+2}; v_2, v_{2m+1} и v_{m+2}, v_{2m+1} су максимално удаљена као у дефиницији 1.12. Дакле, најмање два од њих три морају бити у било ком скупу јаког разрешења графа H'_n. Из претходног, сваки скуп јаког разрешења графа H'_n мора имати најмање $m+1$ чворова, тако да је лако закључити да важи $\beta_S(H'_{2m+1})\ge m+1=\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1$.

Случај 2. $n=2m$.
Слично као и код доказа претходног случаја, и овде закључујемо да имамо да постоји $m-2$ дисјунктних, међусобно максимално удаљених парова чворова као у дефиницији 1.12: v_k, v_{m+k} за $k=1$ и $3\le k\le m-1$. Опет, за 3 чвора v_2, v_{m+2} и v_{2m}, следи да сва 3 пара чворова: v_2, v_{m+2}; v_2, v_{2m} и v_{m+2}, v_{2m} су максимално удаљена као у дефиницији 1.12. Дакле, сваки скуп

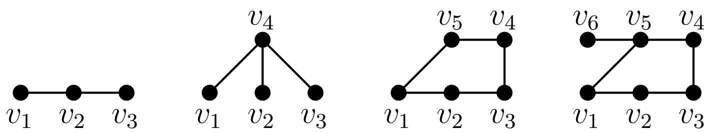
Табела 4: $(\beta_S - \beta_M)(n)$ за $3 \leq n \leq 6$

n	$(\beta_S - \beta_M)(n)$	$\beta_S(H'_n)$	$\beta_M(H'_n)$
3	-1	1	2
4	-1	2	3
5	0	3	3
6	0	3	3

јаког разрешења графа H'_n мора имати најмање m чворова, тако да је лако закључити да важи $\beta_S(H'_{2m}) \geq m = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$.

Дакле, пошто за $n \geq 7$ важи $\beta_S(H'_n) \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ и $\beta_M(H'_n) = 3$, онда $(\beta_S - \beta_M)(n) \geq \beta_S(H'_n) - \beta_M(H'_n) \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 2$. Овим је доказ, за доњу границу, комплетиран.

□



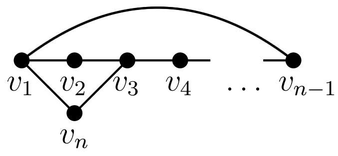
H'_3 H'_4 H'_5 H'_6

Слика 9: Екстремални графови H'_n за $3 \leq n \leq 6$

3.4 Анализа резултата

Као што се може видети из секције 3.2, максимална разлика између мешовите и метричке димензије грана, за свако $n \geq 4$, је између $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ и $n - 2$. Дата максимална разлика се са доње стране достиже за стабла T'_n, где је $\beta_M(T'_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ и $\beta_E(T'_n) = 2$. Са горње стране је дата теоријска оцена $n - 2$, пошто је јасно да не може бити више од тога. У специјалном случају за $n = 3$, ситуација је јасна као што је наведено у тврђењу 3.2.

Што се тиче разлике јаке и мешовите метричке димензије, у општем случају за $n \geq 7$, из теореме 3.3 се види да је максимална разлика са доње



H'_n

Слика 10: Екстремални графови H'_n за $n \geq 7$

стране ограничена са $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 2$. Она се доказује коришћењем графова H'_n, за које је $\beta_S(H'_n) \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ и $\beta_M(H'_n) = 3$. Са горње стране граница је такође теоријска, јер се јасно види да дата разлика не прелази $n-4$. Анализа специјалних случајева за $3 \leq n \leq 6$ лепо се види из Табеле 4.

Интересантно је напоменути, иако то делује прилично логично, да се мешовита метричка димензија, у овим разликама, налази на супротним странама:

- У теореми 3.2 она је умањеник и неограничено расте са порастом реда графа n ($\beta_M(T'_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$);

- У теореми 3.3 она је умањилац, који је константан ($\beta_M(H'_n) = 3$).

4 Везе између неких метричких димензија графа и његовог комплементарног графа

4.1 Мешовита метричка димензија

Пре него што пређемо на доказивање главних резултата, показаћемо да важи следећа особина.

Лема 4.1. *Нека је G повезан граф и нека је $\Delta(G)$ максималан степен чвора. Тада је*

$$\beta_M(G) \geq \lceil \log_2(\Delta(G)+1) \rceil. \tag{4.1}$$

Доказ. Нека је v произвољан чвор графа G и претпоставимо да је $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ скуп мешовитог разрешења, при чему је $p = |S| = \beta_M(G)$. Лако је приметити да постоје само две различите удаљености произвољног чвора $v \in V(G)$ до неког скупа грана које су инцидентне истом чвору. Тада за метричку репрезентацију свих грана у односу на S, као и чвора који је заједнички за све те гране, а чији је степен максималан, важи $2^{\beta_M(G)} \geq \Delta(G)+1$, односно $\beta_M(G) \geq \log_2(\Delta(G)+1)$. Како је $\beta_M(G)$ цео број, тврђење теореме следи.

□

Теорема 4.1. *Нека је дат нетривијалан граф G реда $n \geq 4$, тада важи $4 \leq \beta_M(G) + \beta_M(\overline{G}) \leq 2n$. Штавише,*

- $\beta_M(P_4) + \beta_M(\overline{P_4}) = 4$*;*
- $\beta_M(K_n) + \beta_M(\overline{K_n}) = 2n$*.*

Доказ. Било који граф G реда n задовољава $\beta_M(G) \geq 2$, зато што сваки чвор и грана која га садржи, имају исто растојање у односу на чвор који посматрамо. Из претходног следи да је $\beta_M(G) + \beta_M(\overline{G}) \geq 4$. Штавише, на основу теореме 1.1 важи да је $\beta_M(G) = 2$ ако и само ако је граф G пут, и како је једино за P_4 комплемент такође пут, онда то повлачи да је $\beta_M(P_4) + \beta_M(\overline{P_4}) = 4$. Горња граница следи из теореме 1.2, то јест лако закључујемо да је за граф G мешовита метричка димензија n ако и само ако је граф G комплетан граф K_n и пошто је његов комплемент граф чија је мешовита метричка димензија такође n, онда следи $\beta_M(K_n)+\beta_M(\overline{K_n}) = 2n$. Иначе је $\beta_M(G) + \beta_M(\overline{G}) \le 2n$.

$\square$

Последица 4.1. *За сваки нетривијалан граф G реда $n \ge 4$ важи $4 \le \beta_M(G) \cdot \beta_M(\overline{G}) \le n^2$. Штавише,*

- $\beta_M(P_4) \cdot \beta_M(\overline{P_4}) = 4$*;*
- $\beta_M(K_n) \cdot \beta_M(\overline{K_n}) = n^2$*.*

Дефиниција 4.1. Нека су $n_1, n_2, n_3, n_4 \in N$, $n_1, n_2, n_3, n_4 \ge 2$ и $n_1+n_2+n_3+n_4 = n$. Затим, нека је $V_1 = \{v_i|1 \le i \le n_1\}$, $V_2 = \{v_i|n_1 + 1 \le i \le n_1 + n_2\}$, $V_3 = \{v_i|n_1+n_2+1 \le i \le n-n_4\}$ и $V_4 = \{v_i|n-n_4+1 \le i \le n\}$. Тада можемо дефинисати граф $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$ на следећи начин: $V(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ и $E(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, где $E_1 = \{uw|u \in V_1, w \in V_3\}$, $E_2 = \{uw|u \in V_2, w \in V_4\}$ и $E_3 = \{uw|u, w \in V_3 \cup V_4, u \ne w\}$.

Заправо, скуп грана E_1 образује комплетан бипартитан подграф над скуповима V_1 и V_3, E_2 образује комплетан бипартитан подграф над скуповима V_2 и V_4, док E_3 образује комплетан подграф (клику) над $V_3 \cup V_4$.

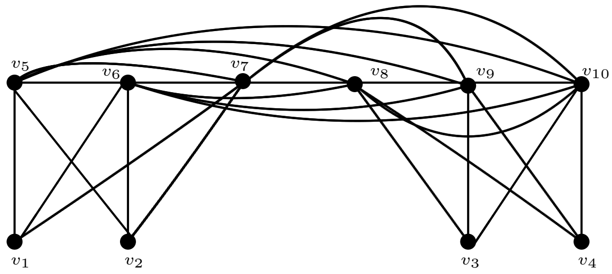
На слици 11 је приказан граф $G(2, 2, 3, 3)$. За дати граф, скуп чворова је $V = \{v_1, v_2, ..., v_{10}\}$ и овај скуп је унија следећих скупова $V_1 = \{v_1, v_2\}$, $V_2 = \{v_3, v_4\}$, $V_3 = \{v_5, v_6, v_7\}$ и $V_4 = \{v_8, v_9, v_{10}\}$. Скуп грана је унија следећих скупова $E_1 = \{v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7, v_2v_5, v_2v_6, v_2v_7\}$, $E_2 = \{v_3v_8, v_3v_9, v_3v_{10}, v_4v_8, v_4v_9, v_4v_{10}\}$ и $E_3 = \{v_5v_6, v_5v_7, v_5v_8, v_5v_9, v_5v_{10}, v_6v_7, v_6v_8, v_6v_9, v_6v_{10}, v_7v_8, v_7v_9, v_7v_{10}, v_8v_9, v_8v_{10}, v_9v_{10}\}$. Са слике се види да скуп грана E_3 одговара комплетном подграфу над $V_3 \cup V_4 = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$.

Тврђење 4.1. $\overline{G(n_1, n_2, n_3, n_4)} \cong G(n_4, n_3, n_1, n_2)$.

Доказ. Нека је $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$ граф уведен у дефиницији 4.1 и нека је $h : V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \to V_1' \cup V_2' \cup V_3' \cup V_4'$ функција дефинисана са

$$h(v_i) = \begin{cases} w_{n_4+n_3+i}, & 1 \le i \le n_1; \\ w_{n_4+n_3+i}, & n_1 + 1 \le i \le n_1 + n_2; \\ w_{n_4+i-n_1-n_2}, & n_1 + n_2 + 1 \le i \le n - n_4; \\ w_{n_4-n+i}, & n - n_4 + 1 \le i \le n. \end{cases}$$

Доказаћемо да је h изоморфизам. За граф $G(n_4, n_3, n_1, n_2)$, скуп чворова је $V(G(n_4, n_3, n_1, n_2)) = V_1' \cup V_2' \cup V_3' \cup V_4'$, где је $V_1' = \{w_i|1 \le i \le n_4\}$,



Слика 11: Граф $G(2,2,3,3)$

$V_2' = \{w_i | n_4 + 1 \le i \le n_4 + n_3\}$, $V_3' = \{w_i | n_4 + n_3 + 1 \le i \le n_4 + n_3 + n_1\}$ и $V_4' = \{w_i | n_4 + n_3 + n_1 + 1 \le i \le n_1 + n_2 + n_3 + n_4\}$, а скуп грана је $E'(G(n_4, n_3, n_1, n_2)) = E_1' \cup E_2' \cup E_3'$, где је $E_1' = \{uw | u \in V_1', w \in V_3'\}$, $E_2' = \{uw | u \in V_2', w \in V_4'\}$ и $E_3' = \{uw | u, w \in V_3' \cup V_4', u \neq w\}$. Даље, лако се може видети да је скуп грана комплементарног графа, графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$, је $E(\overline{G(n_1, n_2, n_3, n_4)}) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, где $E_1 = \{uw | u \in V_4, w \in V_1\}$, $E_2 = \{uw | u \in V_3, w \in V_2\}$ и $E_3 = \{uw | u, w \in V_1 \cup V_2, u \neq w\}$. Показаћемо да се свака грана графа $\overline{G(n_1, n_2, n_3, n_4)}$ слика у грану графа $G(n_4, n_3, n_1, n_2)$.

Разматраћемо 3 случаја.

Случај 1. $v_i v_j \in E_1$.
Нека чвор $v_i \in V_4$ и $v_j \in V_1$, онда следи да је $h(v_i)h(v_j) = w_{n_4 - n + i} w_{n_4 + n_3 + j}$, где је $w_{n_4 - n + i} \in V_1'$ и $w_{n_4 + n_3 + j} \in V_3'$, одакле закључујемо да се грана $v_i v_j \in E_1$ слика у грану $w_{n_4 - n + i} w_{n_4 + n_3 + j} \in E_1'$.

Случај 2. $v_i v_j \in E_2$.
Нека чвор $v_i \in V_3$ и $v_j \in V_2$, онда следи да је
$h(v_i)h(v_j) = w_{n_4 + i - n_1 - n_2} w_{n_4 + n_3 + j}$, где је $w_{n_4 + i - n_1 - n_2} \in V_2'$ и $w_{n_4 + n_3 + j} \in V_4'$, одакле закључујемо да се грана $v_i v_j \in E_2$ слика у грану
$w_{n_4 + i - n_1 - n_2} w_{n_4 + n_3 + j} \in E_2'$.

Случај 3. $v_i v_j \in E_3$.
Даље разликујемо следећа четири подслучаја.

Подслучај 1. $v_i, v_j \in V_1$.
Тада је $h(v_i)h(v_j) = w_{n_4 + n_3 + i} w_{n_4 + n_3 + j}$, при чему су чворови
$w_{n_4 + n_3 + i}, w_{n_4 + n_3 + j} \in V_3'$, одакле закључујемо да је $w_{n_4 + n_3 + i} w_{n_4 + n_3 + j} \in E_3'$.

Подслучај 2. $v_i, v_j \in V_2$.
Тада је $h(v_i)h(v_j) = w_{n_4 + n_3 + i} w_{n_4 + n_3 + j}$, при чему су чворови
$w_{n_4 + n_3 + i}, w_{n_4 + n_3 + j} \in V_4'$, одакле закључујемо да је $w_{n_4 + n_3 + i} w_{n_4 + n_3 + j} \in E_3'$.

Подслучај 3. $v_i \in V_1, v_j \in V_2$.
Тада је $h(v_i)h(v_j) = w_{n_4 + n_3 + i} w_{n_4 + n_3 + j}$, где је чвор $w_{n_4 + n_3 + i} \in V_3'$ и чвор

$w_{n_4+n_3+j} \in V_4'$, одакле закључујемо да је $w_{n_4+n_3+i}w_{n_4+n_3+j} \in E_3'$.

Подслучај 4. $v_i \in V_2, v_j \in V_1$.
Овај подслучај се доказује на исти начин као и подслучај 3.

Пошто смо изнад доказали да се све гране графа $\overline{G(n_1, n_2, n_3, n_4)}$ пресликавају у гране графа $G(n_4, n_3, n_1, n_2)$ и пошто је очигледно да је функција h бијекција, онда следи да је h изоморфизам графова, то јест $\overline{G(n_1, n_2, n_3, n_4)} \cong G(n_4, n_3, n_1, n_2)$.

□

Дефиниција 4.2. За произвољна два чвора $v_i, v_j \in V(G(n_1, n_2, n_3, n_4))$, уводимо скуп $S'_{v_i,v_j} = V(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) \backslash \{v_i, v_j\}$.

Лема 4.2.

а) За свака два чвора $v_i, v_j \in V_k$ при чему $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, скуп S'_{v_i,v_j} није скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

б) За сваки чвор $v_i \in V_1$ и сваки чвор $v_j \in V_3$, скуп S'_{v_i,v_j} није скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

в) За сваки чвор $v_i \in V_2$ и сваки чвор $v_j \in V_4$, скуп S'_{v_i,v_j} није скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

Доказ. *а)* Имајући у виду да $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, закључујемо да треба посебно разматрати четири случаја.

Случај 1. $v_i, v_j \in V_1$.
Нека је $e_1 = v_iv_k$ и $e_2 = v_jv_k$, где је $v_k \in V_3$ и нека је $v_m \in S'_{v_i,v_j}$. Упоредићемо растојања грана e_1 и e_2 у односу на чворове скупа S'_{v_i,v_j}.
Ако је $0 < m \leq n_1$, $m \neq i$ и $m \neq j$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 < m \leq n_1 + n_2$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_i, v_m) - 1 = d(v_j, v_m) - 1 = d(v_k, v_m) = 2 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 + n_2 < m \leq n - n_4$ и $m \neq k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_i, v_m) = d(v_j, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 + n_2 < m \leq n - n_4$ и $m = k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 0 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n - n_4 < m \leq n$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Пошто су сва одговарајућа растојања једнака, тада је

$$(4.2) \quad r(e_1, S'_{v_i,v_j}) = r(e_2, S'_{v_i,v_j}) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1-2} \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, 1, \ldots, 1, \overbrace{\ 0\ }^{k-2}, 1, \ldots, 1),$$

што значи да S'_{v_i,v_j} није скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.
Овај начин приказивања метричких координата, дат у (4.2), користићемо надаље у тексту. Напоменимо да у овом случају грана e_1, у односу на скуп $S'_{v_iv_j}$, има метричке координате једнаке 1, на првих $n_1 - 2$ места, затим једнаке 2 на следећих n_2 места и на крају $n_3 + n_4 - 1$ јединица између којих се налази 0 на $k - 2$. месту. Формално,

$$r(e_1, S'_{v_i,v_j}) = (\mathbf{1}_{n_1-2}, \mathbf{2}_{n_2}, \mathbf{1}_{k-n_1-n_2-1}, 0, \mathbf{1}_{n-k}).$$

Случај 2. $v_i, v_j \in V_2$.
Нека је $e_1 = v_iv_k$ и $e_2 = v_jv_k$, где је $v_k \in V_4$ и нека је $v_m \in S'_{v_i,v_j}$. Као и у претходном случају упоредићемо растојања грана e_1 и e_2 у односу на чворове скупа S'_{v_i,v_j}.
Ако је $0 < m \leq n_1$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 2 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 < m \leq n_1 + n_2, m \neq i$ и $m \neq j$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 + n_2 < m \leq n - n_4$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_i, v_m) - 1 = d(v_k, v_m) = d(v_j, v_m) - 1 = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n - n_4 < m \leq n$ и $m \neq k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n - n_4 < m \leq n$ и $m = k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 0 = d(e_2, v_m).$$

Пошто су сва одговарајућа растојања једнака, тада је

$$r(e_1, S'_{v_i,v_j}) = r(e_2, S'_{v_i,v_j}) = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n_1}, 1, \ldots, 1, \overbrace{\ 0\ }^{k-2}, 1, \ldots, 1),$$

што значи да S'_{v_i,v_j} није скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

Случај 3. $v_i, v_j \in V_3$.
Нека је $e_1 = v_i v_k$ и $e_2 = v_j v_k$, где је $v_k \in V_1$ и нека је $v_m \in S'_{v_i,v_j}$. Као и у претходним случајевима упоредићемо растојања грана e_1 и e_2 у односу на чворове скупа S'_{v_i,v_j}.
Ако је $0 < m \leq n_1$ и $m \neq k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) - 1 = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $0 < m \leq n_1$ и $m = k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 0 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 < m \leq n_1 + n_2$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_i, v_m) = d(v_j, v_m) = d(v_k, v_m) - 1 = 2 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 + n_2 < m \leq n - n_4, m \neq i$ и $m \neq j$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n - n_4 < m \leq n$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) - 1 = 1 = d(e_2, v_m).$$

Пошто су сва одговарајућа растојања једнака, тада је

$$r(e_1, S'_{v_i,v_j}) = r(e_2, S'_{v_i,v_j}) = (\underbrace{1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{k}, 1, \ldots, 1}_{n_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, 1, \ldots, 1),$$

што значи да S'_{v_i,v_j} није скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

Случај 4. $v_i, v_j \in V_4$.
Нека је $e_1 = v_i v_k$ и $e_2 = v_j v_k$, где је $v_k \in V_2$ и нека је $v_m \in S'_{v_i,v_j}$. Као и у претходним случајевима упоредићемо растојања грана e_1 и e_2 у односу на чворове скупа S'_{v_i,v_j}.
Ако је $0 < m \leq n_1$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) - 1 = 2 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 < m \leq n_1 + n_2$ и $m = k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 0 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 < m \leq n_1 + n_2$ и $m \neq k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) - 1 = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 + n_2 < m \leq n - n_4$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) - 1 = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n - n_4 < m \leq n, m \neq i$ и $m \neq j$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Пошто су сва одговарајућа растојања једнака, тада је

$$r(e_1, S'_{v_i,v_j}) = r(e_2, S'_{v_i,v_j}) = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n_1}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{k}, 1, \ldots, 1),$$

што значи да S'_{v_i,v_j} није скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

На основу претходна четири случаја закључујемо да за свака два чвора $v_i, v_j \in V_k$, где је $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, скуп S'_{v_i,v_j} није скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

б) $v_i \in V_1$ и $v_j \in V_3$.
Лако је приметити да су, за сваки чвор $v_k \in V_3 \backslash \{v_j\}$, метричке координате грана $e_1 = v_i v_k$ и $e_2 = v_j v_k$ у односу на S'_{v_i,v_j} исте, то јест за $v_m \in S'_{v_i,v_j}$ важи следеће.
Ако је $0 < m \leq n_1$ и $m \neq i$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 < m \leq n_1 + n_2$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 2 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 + n_2 < m \leq n - n_4$ и $m \neq k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 + n_2 < m \leq n - n_4$ и $m = k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 0 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n - n_4 < m \leq n$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Пошто су сва одговарајућа растојања једнака, тада за $k < j$ важи

$$r(e_1, S'_{v_i,v_j}) = r(e_2, S'_{v_i,v_j}) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1-1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{k-1}, 1, \ldots, 1),$$

односно, за $k > j$ важи

$$r(e_1, S'_{v_i,v_j}) = r(e_2, S'_{v_i,v_j}) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1-1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{k-2}, 1, \ldots, 1),$$

што значи да S'_{v_i,v_j} није скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

в) $v_i \in V_2$ и $v_j \in V_4$.
Лако је приметити да су, за сваки чвор $v_k \in V_4 \backslash \{v_j\}$, метричке координате грана $e_1 = v_i v_k$ и $e_2 = v_j v_k$ у односу на S'_{v_i,v_j} исте, то јест за $v_m \in S'_{v_i,v_j}$ важи следеће.
Ако је $0 < m \leq n_1$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 2 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 < m \leq n_1 + n_2$ и $m \neq i$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n_1 + n_2 < m \leq n - n_4$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n - n_4 < m \leq n$ и $m = k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 0 = d(e_2, v_m).$$

Ако је $n - n_4 < m \leq n$ и $m \neq k$, тада је

$$d(e_1, v_m) = d(v_k, v_m) = 1 = d(e_2, v_m).$$

Пошто су сва одговарајућа растојања једнака, тада за $k < j$ важи

$$r(e_1, S'_{v_i,v_j}) = r(e_2, S'_{v_i,v_j}) = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n_1}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{k-1}, 1, \ldots, 1),$$

односно, за $k > j$ важи

$$r(e_1, S'_{v_i,v_j}) = r(e_2, S'_{v_i,v_j}) = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n_1}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{k-2}, 1, \ldots, 1),$$

што значи да S'_{v_i,v_j} није скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

□

Последица 4.2. *Уколико је $v_i \in V_{l_1}$ и $v_j \in V_{l_2}$, при чему су $l_1, l_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ и ако је $S'_{v_iv_j}$ скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$, тада је $l_1 + l_2$ непаран број.*

Теорема 4.2. *За $n \geq 8$ важи да је $\beta_E(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) = n - 2$.*

Доказ. **Корак 1:** *Горња граница.*
Нека је $S = \{v_1, ..., v_{n_1}, v_{n_1+1}, ..., v_{n_1+n_2}, v_{n_1+n_2+2}, ..., v_{n-n_4}, v_{n-n_4+2}, ..., n\} = V \setminus \{v_{n_1+n_2+1}, v_{n-n_4+1}\}$. Доказаћемо да је скуп S скуп разрешења грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$. У Табели 5 приказане су метричке координате грана у односу на S. На основу претходне Табеле 5, следи да су метричке координате свих грана међусобно различите, тако да је S скуп разрешења грана и одатле закључујемо да је $\beta_E(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) \leq n - 2$.

Корак 2: *Доња граница.*
Претпоставићемо супротно, то јест нека је $\beta_E(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) \leq n - 3$. Тада је S скуп разрешења грана кардиналности мање или једнаке од $n - 3$, одакле следи да постоје $v_i, v_j, v_l \in V \setminus S$. Даље, лако је приметити да пошто је $S'_{v_iv_j} \supset S$, $S'_{v_iv_l} \supset S$ и $S'_{v_jv_l} \supset S$, онда су и $S'_{v_iv_j}$, $S'_{v_iv_l}$ и $S'_{v_jv_l}$ скупови разрешења грана. Нека је затим $v_i \in V_{l_1}$, $v_j \in V_{l_2}$ и $v_l \in V_{l_3}$, при чему су $l_1, l_2, l_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тада из последице 4.2 следи да су $l_1 + l_2$, $l_1 + l_3$ и $l_2 + l_3$ непарни бројеви. Приметимо даље да како су $l_1 + l_2$ и $l_1 + l_3$ непарни бројеви, то даље повлачи да су l_2 и l_3 исте парности (оба парна или оба непарна), а то онда значи да је збир $l_2 + l_3$ паран број. То је у контрадикцији са чињеницом да је $l_2 + l_3$ непаран број. Дакле, важи да је $\beta_E(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) \geq n - 2$. Из претходна 2 корака, доказ теореме је комплетиран, то јест $\beta_E(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) = n - 2$.

□

Лема 4.3. *За граф $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$, мешовита метричка димензија једнака је његовом реду.*

Табела 5: Метричке координате грана графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$

грана	услов	$r(e, S)$
$v_i v_{n_1+n_2+1}$	$1 \leq i \leq n_1$	$(1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{i}, 1, \ldots, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, 1, \ldots, 1)$
$v_i v_j$	$1 \leq i \leq n_1$ $n_1 + n_2 + 1 < j \leq n - n_4$	$(1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{i}, 1, \ldots, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{j-1}, 1, \ldots, 1)$
$v_i v_{n-n_4+1}$	$n_1 < i \leq n_1 + n_2$	$(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n_1}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{i}, 1, \ldots, 1)$
$v_i v_j$	$n_1 < i \leq n_1 + n_2$ $n - n_4 + 1 < j \leq n$	$(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n_1}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{i}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{j-2}, 1, \ldots, 1)$
$v_{n_1+n_2+1} v_{n-n_4+1}$		$(1, 1, \ldots, 1)$
$v_{n_1+n_2+1} v_i$	$n_1 + n_2 + 1 < i \leq n - n_4$	$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{i-1}, 1, \ldots, 1)$
$v_{n_1+n_2+1} v_i$	$n - n_4 + 1 < i \leq n$	$(1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{i-2}, 1, \ldots, 1)$
$v_i v_j$	$n_1 + n_2 + 1 < i < j \leq n - n_4$	$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, 1, \ldots .1, \overbrace{0}^{i-1}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{j-1}, 1, \ldots, 1)$
$v_i v_j$	$n_1 + n_2 + 1 < i \leq n - n_4$ $n - n_4 + 1 < j \leq n$	$(1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{i-1}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{j-2}, 1, \ldots, 1)$
$v_i v_{n+1-n_4}$	$n_1 + 1 + n_2 < i \leq n - n_4$	$(1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{i-1}, 1, \ldots, 1)$
$v_{n-n_4+1} v_i$	$n - n_4 + 1 < i \leq n$	$(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n_1}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{i-2}, 1, \ldots, 1)$
$v_i v_j$	$n - n_4 + 1 < i < j \leq n$	$(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n_1}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{i-2}, 1, \ldots, 1, \overbrace{0}^{j-2}, 1, \ldots, 1)$

Доказ. Нека је S скуп мешовитог разрешења графа $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$. Нека су v_1 и w_1 два различита произвољна чвора ($v_1 \neq w_1$) из V_1, и слично $v_2, w_2 \in V_2$, $v_3, w_3 \in V_3$ и $v_4, w_4 \in V_4$ произвољни чворови. Тада су одговарајућа растојања између њих: $d(v_1, w_1) = 2$; $d(v_1, v_2) = 3$; $d(v_1, v_3) = 1$; $d(v_1, v_4) = 2$; $d(v_2, w_2) = 2$; $d(v_2, v_3) = 2$; $d(v_2, v_4) = 1$; $d(v_3, w_3) = 1$; $d(v_3, v_4) = 1$ и $d(v_4, w_4) = 1$.

Одредићемо скуп $W_{v_1v_3}$ дефинисан са (1.1). Пошто је $d(v_1, w_1) = 2 > d(v_3, w_1) = 1$; $d(v_1, v_2) = 3 > d(v_3, v_2) = 2$; $d(v_1, v_3) = 1 > d(v_3, v_3) = 0$; $d(v_1, w_3) = 1 > d(v_3, w_3) = 0$ и $d(v_1, v_4) = 2 > d(v_3, v_4) = 1$ тада, осим себе, сви остали чворови из $V(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ имају веће или једнако растојање од чвора v_1 у односу на растојање од чвора v_3, тако да из (1.1) следи да је $W_{v_1v_3} = \{w \in V | d(v_1, w) < d(v_3, w)\} = \{v_1\}$. Онда из леме 2.1 закључујемо да је $W_{v_1v_3} \cap S \neq \emptyset$, односно $\{v_1\} \cap S \neq \emptyset$, одакле следи да $v_1 \in S$. Пошто је v_1 произвољан чвор из V_1, онда следи да је $V_1 \subseteq S$.

Слично скуп $W_{v_2v_4} = \{v_2\}$, пошто осим себе, сви остали чворови из $V(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ имају веће или једнако растојање од чвора v_2 у односу на растојање од чвора v_4. Заиста, $d(v_2, w_2) = 2 > d(v_4, w_2) = 1$; $d(v_2, v_1) = 3 > d(v_4, v_1) = 2$; $d(v_2, v_3) = 2 > d(v_4, v_3) = 1$; $d(v_2, w_4) = 1 = d(v_4, w_4) = 1$ и $d(v_2, v_4) = 1 > d(v_4, v_4) = 0$. Поново, из леме 2.1 закључујемо да је $W_{v_2v_4} \cap S \neq \emptyset$, односно $\{v_2\} \cap S \neq \emptyset$, одакле следи да $v_2 \in S$. Пошто је v_2 произвољан чвор из V_2 и $V_1 \subseteq S$, онда следи да је $V_1 \cup V_2 \subseteq S$.

На исти начин као и код претходна два скупа добијамо да је $W_{v_3w_3} = \{v_3\}$ и $W_{w_3v_3} = \{w_3\}$. Поново, из леме 2.1 закључујемо да је $W_{v_3w_3} \cap S \neq \emptyset$, односно $\{v_3\} \cap S \neq \emptyset$, одакле следи да $v_3 \in S$. Пошто је v_3 произвољан чвор из V_3 и $V_1 \cup V_2 \subseteq S$, онда следи да је $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \subseteq S$.

На крају, аналогно добијамо да је $W_{v_4w_4} = \{v_4\}$ и $W_{w_4v_4} = \{w_4\}$. Поново као последица леме 2.1 закључујемо да је $W_{v_4w_4} \cap S \neq \emptyset$, односно $\{v_4\} \cap S \neq \emptyset$, одакле следи да $v_4 \in S$. Пошто је v_4 произвољан чвор из V_4 и $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \subseteq S$, онда следи да је $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \subseteq S$. Пошто је S скуп мешовитог разрешења од $V(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ тада је $S = V(G(n_1, n_2, n_3, n_4))$. Пошто сваки скуп мешовитог разрешења S од $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$ садржи све његове чворове, онда је $\beta_M(G(n_1, n_2, n_3, n_4)) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = |V(G(n_1, n_2, n_3, n_4))| = n$.

□

Теорема 4.3. *За сваки обострано повезан граф G реда $n \geq 8$ важи $\lceil 2 + \log_2(n-1) \rceil \leq \beta_M(G) + \beta_M(\overline{G}) \leq 2 \cdot n$.*

Доказ. **Корак 1:** *Доња граница једнака је $\lceil 2 + \log_2(n-1) \rceil$ за $n \geq 8$.*
Из последице 2.2 важи да је $\beta_M(G) \geq 1 + \lceil \log_2(1 + \delta(G)) \rceil \geq 1 + \log_2(1 + \delta(G))$.

Слично, из леме 4.1 важи да је $\beta_M(\overline{G}) \geq \lceil \log_2(1+\Delta(\overline{G}))\rceil = \lceil \log_2(n-\delta(G))\rceil \geq \log_2(n-\delta(G))$. Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$(4.3) \qquad \beta_M(G) + \beta_M(\overline{G}) \geq 1 + \log_2(1+\delta(G)) + \log_2(n-\delta(G)).$$

Десној страни неједнакости (4.3) додељујемо функцију $f_M(x) = 1+\log_2(1+x) + \log_2(n-x)$ за $x \in [1, n-2]$. Даље, испитујемо глобални минимум функције $f_M(x)$. Лако се проверава да је $f_M(x)$ конкавна функција, то јест $f''_M(x) < 0$ на сегменту $[1, n-2]$. Имајући на уму да је $f_M(1) = 2+\log_2(n-1) = f_M(n-2)$, онда закључујемо да је глобални минимум функције $f_M(x)$, на интервалу $[1, n-2]$, једнак $2+\log_2(n-1)$. Дакле, за $x \in [1, n-2]$ важи да је $f_M(x) \geq 2+\log_2(n-1)$, што повлачи да је $\beta_M(G)+\beta_M(\overline{G}) \geq 2+\log_2(n-1)$. Пошто су $\beta(G)$ и $\beta(\overline{G})$ цели бројеви, одатле следи

$$\beta_M(G) + \beta_M(\overline{G}) \geq \lceil 2 + \log_2(n-1)\rceil.$$

Корак 2: *Горња граница једнака је* $2 \cdot n$ *за* $n \geq 8$.
Из напомене 1.1, за сваки повезан граф G, максимална вредност мешовите метричке димензије једнака је реду графа, одакле следи да је $\beta_M(G) + \beta_M(\overline{G}) \leq 2 \cdot n$. За $n \geq 8$, број n се може лако разложити у облику $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, где су $n_1, n_2, n_3, n_4 \geq 2$, тако да постоји граф $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$ реда n. Према леми 4.3, граф $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$ достиже ову горњу границу, а из тврђења 4.1 следи да је његов комплемент изоморфан са $G(n_3, n_4, n_1, n_2)$, тако да и његов комплемент достиже ову горњу границу. Дакле, граф $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$ достиже $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ горњу границу за збир и једнака је $2 \cdot n$.

□

Теорема 4.4. *За сваки обострано повезан граф* G *реда* $n \geq 8$ *важи* $\lceil 1 + \log_2(n-1)\rceil \leq \beta_M(G) \cdot \beta_M(\overline{G}) \leq n^2$.

Доказ. **Корак 1:** *Доња граница једнака је* $\lceil 1 + \log_2(n-1)\rceil$ *за* $n \geq 8$.
Аналогно доказу претходне теореме 4.3, имамо да важи $\beta_M(G) \geq 1 + \log_2(1+\delta(G))$ и $\beta_M(\overline{G}) \geq \log_2(n-\delta(G))$. Множењем ових неједнакости, добијамо

$$(4.4) \qquad \beta_M(G) \cdot \beta_M(\overline{G}) \geq (1 + \log_2(1+\delta(G))) \cdot \log_2(n-\delta(G)).$$

Сада, десној страни неједнакости (4.4) додељујемо функцију $g_M(x) = (1 + \log_2(1+x)) \cdot \log_2(n-x)$ за $x \in [1, n-2]$. Лако се проверава да је и ова функција такође конкавна на датом интервалу, тако да је глобални минимум у једној од крајњих тачака посматраног интервала. Пошто је $g_M(1) = (1+\log_2(2))\log_2(n-1) = 2\log_2(n-1) > g_M(n-2) = (1+\log_2(n-1))\log_2 2 = 1+\log_2(n-1)$ за свако $n \geq 8$, онда је глобални минимум функције $g_M(x)$, на интервалу $[1, n-2]$, једнак $1+\log_2(n-1)$. Дакле, за $x \in [1, n-2]$ следи да је $g_M(x) \geq 1+\log_2(n-1)$, тако да је $\beta_M(G) \cdot \beta_M(\overline{G}) \geq 1+\log_2(n-1)$. Пошто су $\beta_M(G)$ и $\beta_M(\overline{G})$ цели бројеви, важи

$$\beta_M(G) \cdot \beta_M(\overline{G}) \geq \lceil 1+\log_2(n-1) \rceil.$$

Корак 2: *Горња граница једнака је n^2 за $n \geq 8$.*
Пошто је максимална вредност мешовите метричке димензије једнака реду графа, онда је $\beta_M(G) \cdot \beta_M(\overline{G}) \leq n^2$. Исто као у доказу теореме 4.3, граф $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$ је граф на којем се достиже $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ горња граница за производ и једнака је n^2.

□

Како се теорема 4.3 и теорема 4.4 односе на обострано повезане графове реда $n \geq 8$, у Табели 6 су приказани резултати за $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ границе добијене помоћу тоталне енумерације, за збир и производ мешовите метричке димензије када је ред графа $n \in \{4, 5, 6, 7\}$. Такође, у овој табели су приказани и резултати везани за метричку димензију грана, за графове истог реда. Као што смо већ и рекли, на графовима $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$ се достиже $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ горња граница из теореме 4.3 и теореме 4.4, док су екстремални (минимални) графови реда $n \in \{4, 5, 6, 7\}$ приказани на слици 12 и слици 13.

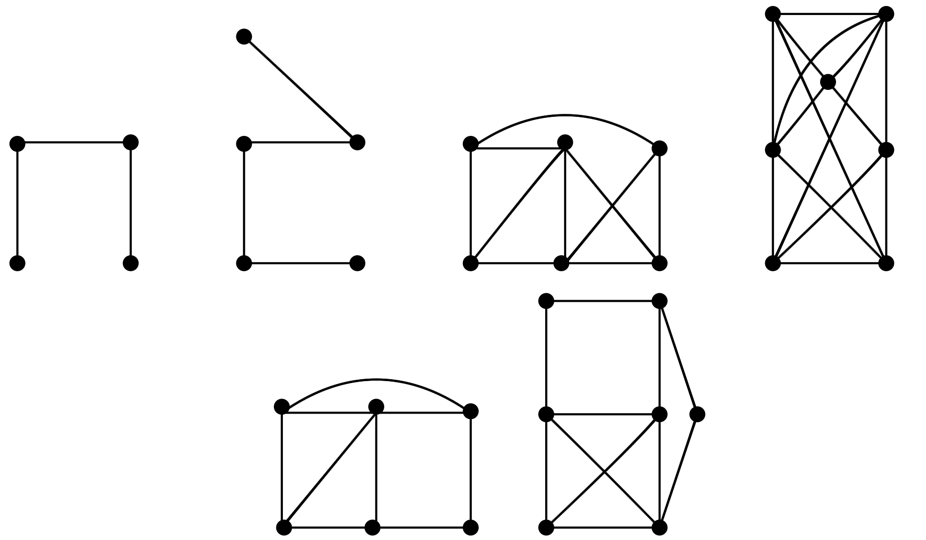
4.2 Метричка димензија графа

У овом одељку побољшаћемо $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ доњу границу из теореме 1.9 из рада [33].

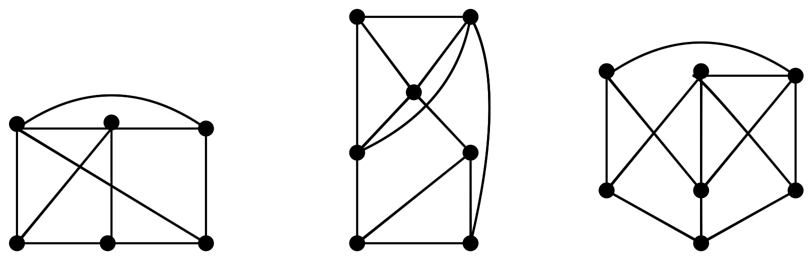
Пре тога доказаћемо да, за чворове који припадају некој метричкој бази, важи следећа лема.

Лема 4.4. *Нека је G повезан граф и нека је u произвољан чвор из неког скупа разрешења S, кардиналности $\beta(G)$, графа G. Тада је $|S| = \beta(G) \geq 1 + \lceil \log_3(deg_u) \rceil$.*

Доказ. Претпоставимо да је $S = \{u, v_2, ..., v_p\}$. Вектор метричких координата чвора u у односу на S је $r(u, S) = (0, d_2, ..., d_p)$, где је $d_k = d(v_k, u)$ за свако $k \in [2, p]$. Степен чвора u једнак је deg_u, тако да је $|N(u)| = deg_u$. Нека су чворови из $N(u)$ означени са u_1, ..., u_{deg_u}. За сваку позицију $k = 2, ..., p$ редом у S и за сваки индекс $l = 1, \ldots, deg_u$, сваки



Слика 12: Графови G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 и G_6



Слика 13: Графови G_7, G_8 и G_9

чвор u_l је у $N(u)$, тако да је $d(u_l, v_k) \in \{d_k - 1, d_k, d_k + 1\}$, то јест могу бити максимално три различите могуће удаљености. Дакле, чвор u и чворови u_1, ..., u_{deg_u} могу имати највише 3^{p-1} различитих метричких репрезентација у односу на S, одакле је $deg_u \leq 3^{p-1}$, односно $p \geq 1 + \log_3(deg_u)$. Имајући на уму да је $p = |S| = \beta(G)$ цео број, важи да је $\beta(G) \geq 1 + \lceil \log_3(deg_u) \rceil$.

□

Како је $\delta(G)$ минималан степен чворова у графу G, важи следећа последица.

Последица 4.3. *Нека је G повезан граф, тада је*

$$\beta(G) \geq 1 + \lceil \log_3(\delta(G)) \rceil. \tag{4.5}$$

Теорема 4.5. *За сваки обострано повезан граф G реда $n \geq 4$ важи*

$$\beta(G) + \beta(\overline{G}) \geq \lceil 1 + \log_3(n-1) \rceil. \tag{4.6}$$

Доказ. Из последице 4.3 важи да је $\beta(G) \geq 1 + \lceil \log_3(\delta(G)) \rceil \geq 1 + \log_3(\delta(G))$, док се из теореме 1.5 лако закључује да је $\beta(\overline{G}) \geq \lceil \log_3(1 + \Delta(\overline{G})) \rceil = \lceil \log_3(n - \delta(G)) \rceil \geq \log_3(n - \delta(G))$. Аналогно доказу теореме 4.3, сабирамо ове неједнакости, тако да следи

$$\beta(G) + \beta(\overline{G}) \geq 1 + \log_3(\delta(G)) + \log_3(n - \delta(G)). \tag{4.7}$$

Затим, десној страни неједнакости (4.7) придружујемо функцију $f(x) = \log_3(3x) + \log_3(n - x)$ за вредности $x \in [1, n-2]$. Лако се проверава да је $f(x)$ конкавна функција, то јест $f''(x) < 0$ на сегменту $[1, n-2]$ и имајући на уму да је $f(1) = 1 + \log_3(n-1) < f(n-2) = 1 + \log_3(2n-4)$, закључујемо да је глобални минимум функције $f(x)$, на интервалу $[1, n-2]$, једнак $f(1) = 1 + \log_3(n-1)$. Дакле, за $x \in [1, n-2]$ следи да је функција $f(x) \geq 1 + \log_3(n-1)$, што повлачи да важи да је $\beta(G) + \beta(\overline{G}) \geq 1 + \log_3(n-1)$. И опет како су $\beta(G)$ и $\beta(\overline{G})$ цели бројеви, следи да је

$$\beta(G) + \beta(\overline{G}) \geq \lceil 1 + \log_3(n-1) \rceil.$$

□

Теорема 4.6. *За сваки обострано повезан граф G реда $n \geq 5$ важи*

$$\beta(G) \cdot \beta(\overline{G}) \geq \lceil (1 + \log_3(n-2)) \log_3 2 \rceil. \tag{4.8}$$

Доказ. Слично доказу претходне теореме, и овде имамо из последице 4.3 и теореме 1.5 да редом важи да је $\beta(G) \geq 1 + \log_3(\delta(G))$ и $\beta(\overline{G}) \geq \log_3(n - \delta(G))$. Множењем ових неједнакости добија се

$$\beta(G) \cdot \beta(\overline{G}) \geq (1 + \log_3(\delta(G))) \log_3(n - \delta(G)). \tag{4.9}$$

Сада, десној страни неједнакости (4.9) додељујемо функцију $g(x) = \log_3(n - x)(1 + \log_3(x))$ за вредности $x \in [1, n-2]$. Лако се проверава да је дата функција конкавна на посматраном интервалу, то јест $g''(x) < 0$ на интервалу $[0, n-2]$. Имајући на уму да је $g(1) = \log_3(n-1) \geq g(n-2) = (1 + \log_3(n-2)) \log_3 2$, закључујемо да је глобални минимум ове функције једнак $g(n-2) = (1 + \log_3(n-2)) \log_3 2$. Дакле, за $x \in [1, n-2]$ следи да је $g(x) \geq (1 + \log_3(n-2)) \log_3 2$, што повлачи да је $\beta(G) \cdot \beta(\overline{G}) \geq (1 + \log_3(n-2)) \log_3 2$. И поново како су $\beta(G)$ и $\beta(\overline{G})$ цели бројеви, следи тврђење теореме то јест важи

$$\beta(G) \cdot \beta(\overline{G}) \geq \lceil (1 + \log_3(n-2)) \log_3 2 \rceil.$$

□

Пошто се теорема 4.6 односи на обострано повезане графове реда $n \geq 5$, напоменућемо да је једини обострано повезани граф реда $n = 4$ пут P_4, јер је и његов комплемент исто пут P_4 и тада на основу теореме 1.3 важи да је $\beta(P_4) \cdot \beta(\overline{P_4}) = 1$.

4.3 Метричка димензија грана графа

Методологија примењена код доказивања $\mathrm{Nordhaus} - \mathrm{Gaddum}$ граница из секције 4.2, уз одређене измене, може се применити и за проблем метричке димензије грана графа. У овој секцији ћемо приказати одговарајуће теоријске резултате и како су измене значајне, представићемо комплетне доказе.

Теорема 4.7. *За сваки нетривијални граф G реда $n \geq 4$, важи $2 \leq \beta_E(G) + \beta_E(\overline{G}) \leq 2n - 1$. Штавише,*

- $\beta_E(P_4) + \beta_E(\overline{P_4}) = 2$;
- $\beta_E(K_n) + \beta_E(\overline{K_n}) = 2n - 1$

Доказ. За сваки граф G реда n из (1.5) видимо да је потребно да постоји најмање један чвор у скупу разрешења грана, тако да је $\beta_E(G) \geq 1$, што повлачи да је $\beta_E(G) + \beta_E(\overline{G}) \geq 2$. Штавише, из тврђења 1.6 имамо да је

$\beta_E(G) = 1$ ако и само ако је G пут P_n и пошто је за пут P_4 комплемент такође пут, онда следи да је $\beta_E(P_4) + \beta_E(\overline{P_4}) = 2$. Што се тиче горње границе, пошто је $\beta_E(K_n) = n - 1$ и пошто је његов комплемент једини граф чија је метричка димензија грана n, то јест $\beta_E(\overline{K_n}) = n$, онда следи да је $\beta_E(K_n) + \beta_E(\overline{K_n}) = 2n - 1$, иначе је $\beta_E(G) + \beta_E(\overline{G}) < 2n - 1$.

□

Теорема 4.8. *За сваки обострано повезан граф G реда $n \geq 8$ важи*

$$\lceil 1 + \log_2(n - 2)\rceil \leq \beta_E(G) + \beta_E(\overline{G}) \leq 2 \cdot n - 2. \tag{4.10}$$

Доказ. **Корак 1:** *Доња граница једнака је* $\lceil 1 + \log_2(n - 2)\rceil$.
Из теореме 1.6 важи да је $\beta_E(G) \geq 1 + \lceil \log_2(\delta(G))\rceil \geq 1 + \log_2(\delta(G))$, док из тврђења 1.7 важи да је $\beta_E(\overline{G}) \geq \lceil \log_2(\Delta(\overline{G}))\rceil = \lceil \log_2(n - 1 - \delta(G))\rceil \geq \log_2(n - 1 - \delta(G))$. Поново, слично доказу теореме 4.5, сабирамо ове неједнакости, тако да следи

$$\beta_E(G) + \beta_E(\overline{G}) \geq 1 + \log_2(\delta(G)) + \log_2(n - 1 - \delta(G)). \tag{4.11}$$

Десној страни неједнакости (4.11) можемо придружити функцију $f_E(x) = 1 + \log_2(x) + \log_2(n - 1 - x)$ за $x \in [1, n - 2]$. За ову функцију се такође лако проверава да је $f''_E(x) < 0$, то јест да је $f_E(x)$ конкавна на сегменту $[1, n - 2]$. Поново, имајући на уму да је $f_E(1) = 1 + \log_2(n-2) = f_E(n-2)$, закључујемо да је њен глобални минимум $1 + \log_2(n - 2)$. Дакле, за $x \in [1, n - 2]$ следи да је $f_E(x) \geq 1 + \log_2(n-2)$, што повлачи да је $\beta_E(G) + \beta_E(\overline{G}) \geq 1 + \log_2(n-2)$. И опет, како су $\beta_E(G)$ и $\beta_E(\overline{G})$ цели бројеви, следи да је

$$\beta_E(G) + \beta_E(\overline{G}) \geq \lceil 1 + \log_2(n - 2)\rceil.$$

Корак 2: *Горња граница је* $2 \cdot n - 2$.
Како из неједнакости (1.5), за сваки повезан граф G реда n, важи $1 \leq \beta_E(G) \leq n - 1$, онда је $\beta_E(G) + \beta_E(\overline{G}) \leq 2 \cdot n - 2$.

□

Теорема 4.9. *За сваки обострано повезан граф G реда $n \geq 8$ важи*

$$1 \leq \beta_E(G) \cdot \beta_E(\overline{G}) \leq (n - 1)^2. \tag{4.12}$$

Доказ. **Корак 1:** *Доња граница једнака је* 1.
Доказ доње границе сличан је доказу претходне теореме, то јест имамо да

Табела 6: Nordhaus – Gaddum границе за гранску и мешовиту метричку димензију

	Метричка димензија грана				Мешовита метричка димензија			
	ЗБИР		ПРОИЗВОД		ЗБИР		ПРОИЗВОД	
Бр. чво.	МИН/(G)	МАКС.	МИН/(G)	МАКС.	МИН	МАКС.	МИН	МАКС.
4	2 (G_1)	2	1 (G_1)	1	4 (G_1)	4	4 (G_1)	4
5	3 (G_2)	5	2 (G_2)	6	5 (G_2)	7	6 (G_2)	12
6	5 (G_5)	7	4 (G_3)	12	6 (G_7)	10	8 (G_7)	25
7	6 (G_6)	9	5 (G_4)	20	7 (G_9)	13	12 (G_8)	42

важи $\beta_E(G) \geq 1 + \log_2(\delta(G))$ и $\beta_E(\overline{G}) \geq \log_2(n-1-\delta(G))$ и множењем ових неједнакости, добија се

$$\beta_E(G) \cdot \beta_E(\overline{G}) \geq (1 + \log_2(\delta(G))) \cdot \log_2(n-1-\delta(G)). \tag{4.13}$$

Слично претходним доказима, десној страни неједнакости (4.13) можемо придружити функцију $g_E(x) = (1+\log_2(x)) \cdot \log_2(n-1-x)$ за $x \in [1, n-2]$. За ову функцију се такође лако проверава да је $g_E''(x) < 0$, то јест $g_E(x)$ је конкавна на сегменту $[1, n-2]$ и имајући на уму да је $g_E(1) = \log_2(n-2)$ и $g_E(n-2) = 0$ закључујемо да је њен глобални минимум 0. Дакле, за $x \in [1, n-2]$ следи да је $g_E(x) \geq 0$, што повлачи да је $\beta_E(G) \cdot \beta_E(\overline{G}) \geq 0$. Међутим, како знамо да, за сваки повезан граф G реда n, важи да је $\beta_E(G) \geq 1$, одатле закључујемо да је доња граница $\beta_E(G) \cdot \beta_E(\overline{G}) \geq 1$.

Корак 2: *Горња граница једнака је* $(n-1)^2$.
Пошто, за сваки повезан граф G, важи да је $1 \leq \beta_E(G) \leq n-1$, онда следи да је $\beta_E(G) \cdot \beta_E(\overline{G}) \leq (n-1)^2$.

□

Пошто теорема 4.8 и теорема 4.9 укључују обострано повезане графове за $n \geq 8$, у Табели 6 такође су приказани разултати за Nordhaus – Gaddum доњу и горњу границу, за збир и производ метричке димензије грана, добијени помоћу тоталне енумерације када је ред графа $n \in \{4, 5, 6, 7\}$. Екстремални (минимални) графови реда $n \in \{4, 5, 6, 7\}$, на којима се достиже Nordhaus – Gaddum доња граница за збир и производ метричке димензије грана, приказани су на слици 12.

4.4 Анализа резултата

На почетку правимо поређење $\mathrm{Nordhaus - Gaddum}$ доњих и горњих граница, за збир, све три метричке димензије општег графа G и његовог комплементарног графа $\overline{G}$. За $n \geq 4$ добијено је да су доње границе код метричке димензије и метричке димензије грана графа 2, док је код мешовите метричке димензије 4. Доње границе, за све три метричке димензије, се достижу за пут P_4 и примећујемо да се ове две метричке димензије, у односу на мешовиту метричку димензију, разликују за два. Затим, горња граница за метричку димензију и метричку димензију грана је $2n - 1$, док је за мешовиту метричку димензију $2n$. Горње границе, за све три метричке димензије, достижу се за комплетне графове K_n и из претходног се лако види да је мешовита метричка димензија за ове графове већа за један од њихове метричке димензије и метричке димензије грана.

Даље, правимо поређење $\mathrm{Nordhaus - Gaddum}$ доњих и горњих граница, за збир, све три метричке димензије графа G и његовог комплементарног графа $\overline{G}$, за обострано повезане графове. Побољшана је $\mathrm{Nordhaus - Gaddum}$ доња граница код метричке димензије и сада за метричку димензију, метричку димензију грана и мешовиту метричку димензију она редом износи $\lceil 1 + \log_3(n-1) \rceil$, $\lceil 1 + \log_2(n-2) \rceil$ и $\lceil 2 + \log_2(n-1) \rceil$. Затим, за овај случај, горња граница за метричку димензију је $2n - 6$ за $n \geq 4$, за метричку димензију грана је $2n - 2$ за $n \geq 8$, док за мешовиту метричку димензију је $2n$ за $n \geq 8$. Анализа специјалних случајева за $4 \leq n \leq 7$ се лепо види из Табеле 6. Напоменимо да су са доње стране границе теоријске, док се са горње стране $\mathrm{Nordhaus - Gaddum}$ горња граница, за збир мешовите метричке димензије, достиже за графове $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

На крају, правимо поређење $\mathrm{Nordhaus - Gaddum}$ доњих и горњих граница, за производ, све три метричке димензије графа G и његовог комплементарног графа $\overline{G}$, за обострано повезане графове. Добијено је да је доња граница, код метричке димензије, метричке димензије грана и мешовите метричке димензије једнака $\lceil (1 + \log_3(n-2)) \log_3 2 \rceil$, 1 и $\lceil 1 + \log_2(n-1) \rceil$, редом. Затим, за овај случај, горња граница за метричку димензију грана је $(n-1)^2$ за $n \geq 8$, док за мешовиту метричку димензију је n^2 за $n \geq 8$. Такође, анализа специјалних случајева, за метричку димензију грана и мешовиту метричку димензију за $4 \leq n \leq 7$, лепо се види из Табеле 6. Напоменимо да су са доње стране границе, као и код збира, теоријске, док се са горње стране $\mathrm{Nordhaus - Gaddum}$ горња граница, за производ мешовите метричке димензије, достиже исто за графове $G(n_1, n_2, n_3, n_4)$.

5 Класе графова где је добијена егзактна вредност мешовите метричке димензије

5.1 Графови облика точка

Теорема 5.1.
$$\beta_M(W_n) = \begin{cases} 4, & n = 3; \\ n, & n \geq 4. \end{cases}$$

Доказ. За $n = 3$ помоћу тоталне енумерације добијамо да је $\beta_M(W_3) = 4 = |V(W_3)|$, тако да је скуп мешовитог разрешења $S = V(W_3)$.
Даље ће бити разматрана мешовита метричка димензија за графове облика точка за случај када је $n \geq 4$. Како би доказ био јаснији, најпре ћемо у Табели 7 приказати мешовите метричке координате сваког чвора и сваке гране у односу на $V(W_n)$.

Корак 1: *Горња граница за* $n \geq 4$.
Нека је $S = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ и сада ћемо доказати да је S скуп мешовитог разрешења од W_n. Пошто је $S = V \setminus \{v_0\}$, тада је за сваки елемент вектор метричких координата у односу на S, приказан у Табели 8.

Из претходне Табеле 8 види се да су мешовите метричке координате свих елемената међусобно различите. Дакле, S је скуп мешовитог разрешења, одакле следи да је $\beta_M(W_n) \leq n$.

Корак 2: *Доња граница за* $n \geq 4$.
Претпоставимо супротно, то јест да је $\beta_M(W_n) \leq n - 1$. Тада постоји скуп мешовитог разрешења S, такав да важи да је $|S| \leq n - 1$.

Табела 7: Мешовите метричке координате графа W_n у односу на V

чвор	услов	$r(v,V)$
v_0		$(0,1,...,1)$
v_1		$(1,0,1,2...,2,1)$
v_2		$(1,1,0,1,2...,2)$
v_i	$3 \leq i \leq n-2$	$(1,2,...,2,1,\overbrace{0}^{i},1,2,...,2)$
v_{n-1}		$(1,2,...,2,1,0,1)$
v_n		$(1,1,2,...,2,1,0)$
грана	**услов**	$r(e,V)$
v_0v_i	$1 \leq i \leq n$	$(0,1,...,1,\overbrace{0}^{i},1,...,1)$
v_1v_2		$(1,0,0,1,2,...,2,1)$
v_1v_n		$(1,0,1,2,...,2,1,0)$
v_2v_3		$(1,1,0,0,1,2,...,2)$
v_iv_{i+1}	$3 \leq i \leq n-3$	$(1,2,...,2,1,\overbrace{0}^{i},0,1,2,...,2)$
$v_{n-2}v_{n-1}$		$(1,2,...,2,1,0,0,1)$
$v_{n-1}v_n$		$(1,1,2,...,2,1,0,0)$

Табела 8: Мешовите метричке координате графа W_n у односу на S

чвор	услов	$r(v,S)$
v_0		$(1, ..., 1)$
v_1		$(0, 1, 2..., 2, 1)$
v_2		$(1, 0, 1, 2..., 2)$
v_i	$3 \leq i \leq n-2$	$(2, ..., 2, 1, \overbrace{0}^{i}, 1, 2, ..., 2)$
v_{n-1}		$(2, ..., 2, 1, 0, 1)$
v_n		$(1, 2, ..., 2, 1, 0)$
грана	услов	$r(e, V \setminus \{v_0\})$
v_0v_i	$1 \leq i \leq n$	$(1, ..., 1, \overbrace{0}^{i}, 1, ..., 1)$
v_1v_2		$(0, 0, 1, 2, ..., 2, 1)$
v_1v_n		$(0, 1, 2, ..., 2, 1, 0)$
v_2v_3		$(1, 0, 0, 1, 2, ..., 2)$
v_iv_{i+1}	$3 \leq i \leq n-3$	$(2, ..., 2, 1, \overbrace{0}^{i}, 0, 1, 2, ..., 2)$
$v_{n-2}v_{n-1}$		$(2, ..., 2, 1, 0, 0, 1)$
$v_{n-1}v_n$		$(1, 2, ..., 2, 1, 0, 0)$

Случај 1. $v_0 \notin S$.
Из чињенице да је $|V| = n + 1$ и $|S| \leq n - 1$ следи да постоји чвор v_i $(1 \leq i \leq n)$, такав да $v_i \notin S$. Сада је лако закључити да је $r(v_0, S) = r(v_0 v_i, S) = (1, ..., 1)$, одакле следи да S није скуп мешовитог разрешења, што је у контрадикцији са почетном претпоставком.

Случај 2. $v_0 \in S$.
Такође, из чињенице да је $|V| = n+1$ и $|S| \leq n-1$ следи да постоје чворови v_i и v_j $(1 \leq i, j \leq n)$, такви да $v_i, v_j \notin S$. Сада је опет лако закључити да је $r(v_0, S) = r(v_0 v_i, S) = (0, 1, ..., 1)$, одакле следи да S није скуп мешовитог разрешења, што је у контрадикцији са почетном претпоставком.

Пошто у оба случаја S није скуп мешовитог разрешења, следи да је $\beta_M(W_n) \geq n$.

Дакле, из Корака 1 и Корака 2 следи тврђење теореме за $n \geq 4$, то јест $\beta_M(W_n) = n$.

□

Напоменимо да се горња граница такође може индиректно доказати коришћењем леме 1.1, али жеља је била да се прикаже конструктиван доказ.

5.2 Торус графови

У овој секцији користимо претходно уведене опште доње границе да би добили тачну вредност мешовите метричке димензије за торус графове.

Теорема 5.2. *За* $m, n \geq 3$ *следи да је* $\beta_M(T_{m,n}) = 4$.

Доказ. Доказаћемо да су и горња и доња граница за $\beta_M(T_{m,n})$ једнаке 4.

Корак 1: Најпре, показујемо да је горња граница једнака 4.
У зависности од парности димензија торуса разликујемо четири случаја:

Случај 1. $m = 2r + 1, n = 2s + 1$.
Нека је $S = \{(0, 0), (0, s), (1, s + 1), (r + 1, s + 1)\}$. Доказаћемо да је S скуп мешовитог разрешења. Репрезентација координата сваког чвора и сваке гране, у односу на скуп S, приказана је у Табели 9 и Табели 10.

Пошто из Табеле 9 и Табеле 10 видимо да су метричке координате свих елемената (и чворова и грана) графа $T_{2r+1,2s+1}$ међусобно различите, закључујемо да је S скуп мешовитог разрешења. Дакле, $\beta_M(T_{2r+1,2s+1}) \leq 4$.

Табела 9: Метричке координате чворова графа $T_{2r+1,2s+1}$

чвор	услов	$r(v,S)$
$(0,0)$		$(0,s,s+1,s+r)$
$(\chi,0)$	$1\leq\chi\leq r$	$(\chi,\chi+s,s+\chi-1,s+r-\chi+1)$
$(0,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(\psi,s-\psi,s+2-\psi,s+1-\psi+r)$
(χ,ψ)	$1\leq\chi\leq r-1$ $1\leq\psi\leq s$	$(\psi+\chi,\chi+s-\psi,s-\psi+\chi,s-\psi+r-\chi+2)$
$(0,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi,\psi-s,\psi-s,\psi-s+r-1)$
(χ,ψ)	$s+1\leq\psi\leq n-1$ $1\leq\chi\leq r-1$	$(n+\chi-\psi,\psi+\chi-s,\psi+\chi-s-2,r+\psi-\chi-s)$
$(\chi,0)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$	$(m-\chi,m+s-\chi,m-\chi+s+1,s-r+\chi-1)$
(χ,ψ)	$r+2\leq\chi\leq m-1$ $1\leq\psi\leq s$	$(m-\chi+\psi,m-\chi+s-\psi,m-\chi+s-\psi+2,\chi-r+s-\psi)$
(χ,ψ)	$r+2\leq\chi\leq m-1$ $s+1\leq\psi\leq n-1$	$(m+n-\chi-\psi,\psi-s+m-\chi,$ $\psi-s-\chi+m,\psi-s+\chi-r-2)$
$(r+1,0)$		$(r,r+s,r+s,s)$
(r,ψ)	$1\leq\psi\leq s$	$(r+\psi,r-\psi+s,r-\psi+s,s-\psi+2)$
$(r+1,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(\psi+r,s-\psi+r,s+r-\psi+1,s-\psi+1)$
(r,ψ)	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi+r,\psi-s+r,r+\psi-s-2,\psi-s)$
$(r+1,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(r+n-\psi,r+\psi-s,r+\psi-s-1,\psi-s-1)$

Табела 10: Метричке координате грана графа $T_{2r+1,2s+1}$

грана	услов	$r(e,S)$
$(0,0)(1,0)$		$(0,s,s,r+s)$
$(0,0)(0,n-1)$		$(0,s,s,r+s-1)$
$(0,0)(m-1,0)$		$(0,s,s+1,s+r-1)$
$(0,\psi)(0,\psi+1)$	$0\leq\psi\leq s-1$	$(\psi,s-\psi-1,s-\psi+1,r+s-\psi)$
$(\chi,0)(\chi+1,0)$	$1\leq\chi\leq r-1$	$(\chi,s+\chi,s+\chi-1,r-\chi+s)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$1\leq\chi\leq r$ $1\leq\psi\leq s-1$	$(\chi+\psi,s-\psi-1+\chi,s+\chi-\psi-1,s-\psi+r-\chi+1)$
$(\chi,s)(\chi,s+1)$	$1\leq\chi\leq r$	$(s+\chi,\chi,\chi-1,r+1-\chi)$
$(\chi,0)(\chi,1)$	$1\leq\chi\leq r$	$(\chi,s-1+\chi,s-1+\chi,s+r+1-\chi)$
$(0,\psi)(1,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(\psi,s-\psi,s-\psi+1,r+s-\psi+1)$
$(0,\psi)(0,\psi+1)$	$s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n-\psi-1,\psi-s,\psi-s,r+\psi-s-1)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$1\leq\chi\leq r$ $s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n-\psi+\chi-1,\psi+\chi-s,$ $\psi-s+\chi-2,r+\psi-s-\chi)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$1\leq\chi\leq r-1$ $1\leq\psi\leq s$	$(\psi+\chi,s+\chi-\psi,s+\chi-\psi,s-\psi+r-\chi+1)$
$(\chi,0)(\chi,n-1)$	$1\leq\chi\leq r$	$(\chi,s+\chi,s+\chi-2,s+r-\chi)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$1\leq\chi\leq r-1$ $s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi+\chi,\psi-s+\chi,$ $\psi-s+\chi-2,r-\chi+\psi-s-1)$
$(r+1,\psi)(r+1,\psi+1)$	$1\leq\psi\leq s-1$	$(\psi+r,r-\psi+s-1,r-\psi+s,s-\psi)$
$(0,\psi)(1,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi,\psi-s,\psi-1-s,r+\psi-1-s)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$r+1\leq\chi\leq m-2$ $1\leq\psi\leq s$	$(\psi+m-\chi-1,s-\psi+m-\chi-1,$ $m-\chi+s-\psi+1,s-\psi+\chi-r)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$ $1\leq\psi\leq s-1$	$(m-\chi+\psi,s-\psi-1+m-\chi,$ $s-\psi+m-\chi,s-\psi+\chi-r-1)$
$(\chi,0)(\chi+1,0)$	$r+1\leq\chi\leq m-2$	$(m-\chi-1,m+s-\chi-1,m+s-\chi,\chi-r-1+s)$
$(\chi,0)(\chi,1)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$	$(m-\chi,m+s-\chi-1,m-\chi+s+1,s+\chi-r-1)$
$(r,\psi)(r+1,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(r+\psi,r+s-\psi,r+s-\psi,s-\psi+1)$
$(0,\psi)(m-1,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(\psi,s-\psi,s-\psi+2,r-\psi+s)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$r+1\leq\chi\leq m-2$ $s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi+m-\chi-1,m-\chi+\psi-s-1,$ $m-\chi+\psi-s-1,\chi+\psi-r-s-2)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$ $s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n-\psi-1+m-\chi,\psi-s+m-\chi,$ $\psi-s+m-\chi+1,\psi-s+\chi-r-2)$
$(r,\psi)(r+1,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi+r,\psi-s+r,r+\psi-s-2,\psi-s-1)$
$(\chi,0)(\chi,n-1)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$	$(m-\chi,m-\chi+s,m-\chi+s,s+\chi-r-2)$
$(0,\psi)(m-1,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi,\psi-s,\psi-s,r+\psi-s-2)$
$(0,s)(0,s+1)$		$(s,0,1,r)$
$(r+1,s)(r+1,s+1)$		$(s+r,r,r,0)$
$(r,0)(r+1,0)$		$(r,s+r,s-1+r,s)$
$(r+1,0)(r+1,1)$		$(r,r-1+s,s+r,s)$
$(\chi,s)(\chi,s+1)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$	$(m+s-\chi,m-\chi,m+1-\chi,\chi-r-1)$
$(r+1,0)(r+1,n-1)$		$(r,s+r,s-1+r,s-1)$
$(r+1,\psi)(r+1,\psi+1)$	$s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n-\psi+r-1,\psi-s+r,\psi-s+r-1,\psi-s-1)$

Табела 11: Метричке координате чворова графа $T_{2r+1,2s}$

чвор	услов	$r(v,S)$
$(0,0)$		$(0,s,1,r+1)$
$(\chi,0)$	$1 \leq \chi \leq r$	$(\chi,\chi+s,\chi-1,r-\chi+2)$
$(0,\psi)$	$1 \leq \psi \leq s$	$(\psi,s-\psi,1+\psi,r+\psi-1)$
(χ,ψ)	$1 \leq \chi \leq r$ $1 \leq \psi \leq s$	$(\psi+\chi,s+\chi-\psi,\psi+\chi-1,\psi+r-\chi)$
$(0,\psi)$	$s+1 \leq \psi \leq n-1$	$(n-\psi,\psi-s,n+1-\psi,n+r-\psi+1)$
(χ,ψ)	$s+1 \leq \psi \leq n-1$ $1 \leq \chi \leq r$	$(n+\chi-\psi,\psi-s+\chi,n+\chi-\psi-1,n+r-\psi-\chi+2)$
$(\chi,0)$	$r+2 \leq \chi \leq m-1$	$(m-\chi,m-\chi+s,m-\chi+1,\chi-r)$
$(r+1,0)$		$(r,r+s,r,1)$
(χ,ψ)	$r+2 \leq \chi \leq m-1$ $1 \leq \psi \leq s$	$(m-\chi+\psi,m-\chi-\psi+s,m-\chi+\psi+1,\chi+\psi-r-2)$
$(r+1,\psi)$	$1 \leq \psi \leq s$	$(\psi+r,r+s-\psi,\psi+r,\psi-1)$
(χ,ψ)	$r+2 \leq \chi \leq m-1$ $s+1 \leq \psi \leq n-1$	$(m+n-\chi-\psi,m-\chi+\psi-s,$ $m+1+n-\chi-\psi,n+\chi-r-\psi)$
$(r+1,\psi)$	$s+1 \leq \psi \leq n-1$	$(n+r-\psi,n-\psi+1,\psi-s+r,n-\psi+1)$

Случај 2. $m=2r+1, n=2s$.
Нека је $S=\{(0,0),(0,s),(1,0),(r+1,1)\}$. Доказаћемо да је S скуп мешовитог разрешења. Репрезентација координата сваког чвора и сваке гране, у односу на скуп S, приказана је у Табели 11 и Табели 12.

Пошто из Табеле 11 и Табеле 12 видимо да су метричке координате свих елемената (и чворова и грана) графа $T_{2r+1,2s}$ међусобно различите, закључујемо да је S скуп мешовитог разрешења. Дакле, $\beta_M(T_{2r+1,2s}) \leq 4$.

Случај 3. $m=2r, n=2s+1$.
Нека је $S=\{(0,0),(r,0),(0,1),(1,s+1)\}$. Пошто је $C_m \square C_n$ исто што и $C_n \square C_m$, доказ овог случаја је сличан доказу случаја 2.

Случај 4. $m=2r, n=2s$.
Нека је $S=\{(0,0),(0,1),(1,s),(r,0)\}$. Аналогно доказима претходних случајева, доказаћемо да је S скуп мешовитог разрешења. Репрезентација координата сваког чвора и сваке гране, у односу на скуп S, приказана је у Табели 13 и Табели 14.

Пошто из Табеле 13 и Табеле 14 видимо да су метричке координате свих елемената (и чворова и грана) графа $T_{2r,2s}$ међусобно различите, закључујемо да је S скуп мешовитог разрешења. Дакле, $\beta_M(T_{2r,2s}) \leq 4$.

Корак 2: *Показујемо да је доња граница једнака 4.*
Торус граф је 4−регуларан граф, тако да из последице 2.3 следи $\beta_M(T_{m,n}) \geq \lceil log_2(r+1) \rceil + 1 = \lceil log_2 5 \rceil + 1 = 4$.

Дакле, из претходна два корака, следи да важи $\beta_M(T_{m,n}) = 4$.

$\square$

Табела 12: Метричке координате грана графа $T_{2r+1,2s}$

грана	услов	$r(e,S)$
$(0,0)(0,1)$		$(0,s-1,1,r)$
$(0,0)(1,0)$		$(0,s,0,r+1)$
$(0,0)(0,n-1)$		$(0,s-1,1,r+1)$
$(0,0)(m-1,0)$		$(0,s,1,r)$
$(\chi,0)(\chi,1)$	$1\leq\chi\leq r$	$(\chi,s-1+\chi,\chi-1,r-\chi+1)$
$(0,\psi)(0,\psi+1)$	$1\leq\psi\leq s-1$	$(\psi,s-\psi-1,\psi+1,r+\psi-1)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$1\leq\chi\leq r$ $s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n-\psi-1+\chi,\psi-s+\chi,n-\psi-2+\chi,r+n-\psi-\chi+1)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$1\leq\chi\leq r$ $1\leq\psi\leq s-1$	$(\chi+\psi,\chi+s-\psi-1,\psi+\chi-1,r+\psi-\chi)$
$(\chi,s)(\chi,s+1)$	$1\leq\chi\leq r$	$(s+\chi-1,\chi,s+\chi-2,r-\chi+s)$
$(\chi,0)(\chi+1,0)$	$1\leq\chi\leq r$	$(\chi,\chi+s,\chi-1,r-\chi+1)$
$(0,\psi)(1,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(\psi,s-\psi,\psi,r-1+\psi)$
$(0,\psi)(0,\psi+1)$	$s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n-1-\psi,\psi-s,n-\psi,r+n-\psi)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$1\leq\chi\leq r$ $1\leq\psi\leq s$	$(\psi+\chi,s+\chi-\psi,\psi+\chi-1,r-\chi+\psi-1)$
$(\chi,0)(\chi,n-1)$	$1\leq\chi\leq r$	$(\chi,s+\chi-1,\chi-1,r-\chi+2)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$1\leq\chi\leq r$ $s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi+\chi,\psi-s+\chi,$ $n-\psi+\chi-1,n+r-\chi-\psi+1)$
$(0,\psi)(1,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi,\psi-s,n-\psi,n-\psi+r+1)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$r+1\leq\chi\leq m-2$ $1\leq\psi\leq s$	$(m+\psi-\chi-1,m+s-\chi-\psi-1,$ $m-\chi+\psi,\chi-r+\psi-2)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$ $1\leq\psi\leq s-1$	$(m-\chi+\psi,m-\chi+s-\psi-1,$ $m-\chi+1+\psi,\chi-r+\psi-2)$
$(r+1,\psi)(r+1,\psi+1)$	$1\leq\psi\leq s-1$	$(\psi+r,s+r-\psi-1,r+\psi,\psi-1)$
$(\chi,0)(\chi+1,0)$	$r+2\leq\chi\leq m-2$	$(m-\chi-1,m-\chi+s-1,m-\chi,\chi-r)$
$(\chi,0)(\chi,1)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$	$(m-\chi,m-\chi-1+s,m-\chi+1,\chi-r-1)$
$(r+1,0)(r+1,1)$		$(r,r+s-1,r,0)$
$(0,\psi)(m-1,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(\psi,s-\psi,\psi+1,r+\psi-2)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$r+1\leq\chi\leq m-2$ $s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi+m-\chi-1,\psi-s+m-\chi-1,$ $m+n-\psi-\chi,n-\psi+\chi-r)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$ $s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n-\psi+m-\chi-1,m+\psi-\chi-s,$ $n-\psi+m-\chi,n-\psi+\chi-r-1)$
$(r+1,\psi)(r+1,\psi+1)$	$s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n+r-\psi-1,r+\psi-s,$ $r+n-\psi-1,n-\psi)$
$(\chi,s)(\chi,s+1)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$	$(s+m-\chi-1,m-\chi,s+m-\chi,s+\chi-r-2)$
$(r+1,s)(r+1,s+1)$		$(s+r-1,r,s+r-1,s-1)$
$(\chi,0)(\chi,n-1)$	$r+2\leq\chi\leq m-1$	$(m-\chi,m-\chi+s-1,m-\chi+1,\chi-r)$
$(r+1,0)(r+1,n-1)$		$(r,s+r-1,r,1)$
$(0,\psi)(m-1,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi,\psi-s,n-\psi+1,r+n-\psi)$
$(0,s)(0,s+1)$		$(s-1,0,s,r+s-1)$
$(r+1,0)(r+2,0)$		$(r-1,r+s-1,r,1)$

Табела 13: Метричке координате чворова графа $T_{2r,2s}$

чвор	услов	$r(v,S)$
$(0,0)$		$(0,1,s+1,r)$
$(\chi,0)$	$1\leq\chi\leq r$	$(\chi,\chi+1,s+\chi-1,r-\chi)$
(χ,ψ)	$1\leq\chi\leq r$ $1\leq\psi\leq s$	$(\psi+\chi,\psi-1+\chi,s-\psi+\chi-1,\psi+r-\chi)$
$(0,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi,n+1-\psi,\psi-s+1,n+r-\psi)$
$(0,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(\psi,\psi-1,s-\psi+1,r+\psi)$
$(\chi,0)$	$r+1\leq\chi\leq m-1$	$(m-\chi,m+1-\chi,m-\chi+s+1,\chi-r)$
(χ,ψ)	$s+1\leq\psi\leq n-1$ $1\leq\chi\leq r$	$(n-\psi+\chi,n+1-\psi+\chi,\psi-s+\chi-1,n-\psi+r-\chi)$
(χ,ψ)	$r+1\leq\chi\leq m-1$ $1\leq\psi\leq s$	$(m-\chi+\psi,m-1-\chi+\psi,m-\chi+s-\psi+1,\chi-r+\psi)$
(χ,ψ)	$r+1\leq\chi\leq m-1$ $s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n+m-\chi-\psi,n+m+1-\chi-\psi,$ $m-s+\psi-\chi+1,n+\chi-r-\psi)$

Табела 14: Метричке координате грана графа $T_{2r,2s}$

грана	услов	$r(e,S)$
$(0,0)(0,1)$		$(0,0,s,r)$
$(0,0)(1,0)$		$(0,1,s,r-1)$
$(0,0)(0,n-1)$		$(0,1,s,r)$
$(0,0)(m-1,0)$		$(0,1,s+1,r-1)$
$(0,\psi)(0,\psi+1)$	$1\leq\psi\leq s-1$	$(\psi,\psi-1,s-\psi,r+\psi)$
$(\chi,0)(\chi+1,0)$	$1\leq\chi\leq r-1$	$(\chi,\chi+1,s+\chi-1,r-\chi-1)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$1\leq\chi\leq r$ $1\leq\psi\leq s-1$	$(\chi+\psi,\chi+\psi-1,s-\psi+\chi-2,r+\psi-\chi)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$1\leq\chi\leq r$ $s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n-1-\psi+\chi,n-\psi+\chi,$ $\psi-s+\chi-1,n-\psi+r-\chi-1)$
$(0,\psi)(0,\psi+1)$	$s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n-1-\psi,n-\psi,1+\psi-s,n+r-\psi-1)$
$(\chi,0)(\chi,1)$	$1\leq\chi\leq r$	$(\chi,\chi,s+\chi-2,r-\chi)$
$(0,\psi)(1,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(\psi,\psi-1,s-\psi,r+\psi-1)$
$(\chi,0)(\chi,n-1)$	$1\leq\chi\leq r$	$(\chi,\chi+1,s+\chi-2,r-\chi)$
$(\chi,s)(\chi,s+1)$	$1\leq\chi\leq r$	$(s-1+\chi,s-1+\chi,\chi-1,s+r-1-\chi)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$1\leq\chi\leq r-1$ $1\leq\psi\leq s$	$(\chi+\psi,\chi+\psi-1,s-\psi+\chi-1,\psi+r-\chi-1)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$1\leq\chi\leq r-1$ $s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi+\chi,n-\psi+\chi+1,$ $\psi-s+\chi-1,n-\psi+r-\chi-1)$
$(0,\psi)(1,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi,n-\psi+1,\psi-s,n-\psi+r-1)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$r+1\leq\chi\leq m-2$ $1\leq\psi\leq s$	$(m-\chi+\psi-1,m-\chi+\psi-2,$ $m-\chi+s-\psi,\chi-r+\psi)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$r+1\leq\chi\leq m-1$ $1\leq\psi\leq s-1$	$(m-\chi+\psi,\psi+m-\chi-1,$ $s-\chi+m-\psi,\psi+\chi-r)$
$(\chi,0)(\chi+1,0)$	$r+1\leq\chi\leq m-2$	$(m-1-\chi,m-\chi,s+m-\chi,\chi-r)$
$(\chi,\psi)(\chi,\psi+1)$	$r+1\leq\chi\leq m-1$ $s+1\leq\psi\leq n-2$	$(n-\psi+m-1-\chi,n-\psi+m-\chi,$ $\psi-s+1+m-\chi,n-\psi+\chi-r-1)$
$(\chi,0)(\chi,1)$	$r+1\leq\chi\leq m-1$	$(m-\chi,m-\chi,s-\chi+m,\chi-r)$
$(r,\psi)(r+1,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(r-1+\psi,r-2+\psi,$ $r+s-\psi-1,\psi)$
$(0,\psi)(m-1,\psi)$	$1\leq\psi\leq s$	$(\psi,\psi-1,s+1-\psi,r-1+\psi)$
$(\chi,\psi)(\chi+1,\psi)$	$r+1\leq\chi\leq m-2$ $s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi+m-\chi-1,n+m-\psi-\chi,$ $\psi-s-\chi+m,\chi+n-\psi-r)$
$(\chi,s)(\chi,s+1)$	$r+1\leq\chi\leq m-1$	$(s+m-\chi-1,m+s-\chi-1,$ $m-\chi+1,s+\chi-r-1)$
$(r,\psi)(r+1,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi-1+r,n-\psi+r,$ $\psi-s+r-1,n-\psi)$
$(\chi,0)(\chi,n-1)$	$r+1\leq\chi\leq m-1$	$(m-\chi,m-\chi+1,m-\chi+s,\chi-r)$
$(0,\psi)(m-1,\psi)$	$s+1\leq\psi\leq n-1$	$(n-\psi,n-\psi+1,\psi-s+1,n-\psi+r-1)$
$(0,s)(0,s+1)$		$(s-1,s-1,1,s+r-1)$
$(r,0)(r+1,0)$		$(r-1,r,r-1+s,0)$

5.3 Комплетно раздвојени графови

Теорема 5.3.

$$\beta_M(K^*_{k,n-k}) = \begin{cases} n-1, & k=1 \text{ и } n \geq 3; \\ n, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Доказ. Прво, разматрамо неколико специјалних случајева.

- $n=2$ и $k=1$. Лако је видети да је $K^*_{1,1} \cong P_2$, тако да из теореме 1.1 следи $\beta_M(K^*_{1,1}) = \beta_M(P_2) = 2$;
- $n \geq 3$ и $k=1$. Приметимо да је $K^*_{1,n-1}$ стабло са $n-1$ листова, тако да из теореме 1.10 следи $\beta_M(K^*_{1,n-1}) = n-1$;
- $n-k=1$ и $k \geq 2$. Како је $K^*_{n-1,1} \cong K_n$, тада из теореме 1.2 следи $\beta_M(K^*_{n-1,1}) = \beta_M(K_n) = n$.

Сада дајемо доказ за $k \geq 2$ и $n-k \geq 2$.

Из $|V| = n$ следи да је $\beta_M(K^*_{k,n-k}) \leq n$. Дакле, доказаћемо да сви чворови морају да припадају скупу мешовитог разрешења. Претпоставимо супротно, то јест, да постоји скуп мешовитог разрешења S графа $K^*_{k,n-k}$ такав да је $S \neq V$. Тада постоји чвор u такав да $u \in V \setminus S$. Даље разликујемо два случаја.

Случај 1. $u \in V_1$ и $u \notin S$.
Из услова $k \geq 2$ следи да постоји чвор w такав да је $w \neq u$ и $w \in V_1$. Лако је видети да

$$(\forall v \in V_1 \setminus \{u,w\})\ d(u,v) = d(w,v) = d(uw,v) = 1, \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} &d(w,w) = d(uw,w) = 0, \\ &(\forall v \in V_2)\ d(u,v) = d(w,v) = d(uw,v) = 1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Дакле, све метричке координате чвора w у односу на $V \setminus \{u\}$, су једнаке метричким координатама гране uw, у односу на $V \setminus \{u\}$, то јест $r(w, V \setminus \{u\}) = r(uw, V \setminus \{u\})$. Пошто је $S \subseteq V \setminus \{u\}$, тада $r(w,S) = r(uw,S)$, што повлачи да S није скуп мешовитог разрешења.

Случај 2. $u \in V_2$ и $u \notin S$.
Нека је w произвољан чвор из V_1. Тада се уочава да је

$$\begin{aligned} &(\forall v \in V_1 \setminus \{w\})\ d(u,v) = d(w,v) = d(uw,v) = 1, \\ &d(w,w) = d(uw,w) = 0, \\ &(\forall v \in V_2 \setminus \{u\})\ d(u,v) = 2 \wedge d(w,v) = 1 = d(uw,v). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Дакле, $r(w, V \setminus \{u\}) = r(uw, V \setminus \{u\})$. Како је $S \subseteq V \setminus \{u\}$, онда је $r(w, S) = r(uw, S)$, што повлачи да S није скуп мешовитог разрешења.

Пошто у оба случаја S није скуп мешовитог разрешења, долазимо до контрадикције са почетном претпоставком, тако да је $\beta_M(K^*_{k,n-k}) = n$ за $k \geq 2$ и $n - k \geq 2$. Имајући у виду да су посебни случајеви претходно доказани, доказ теореме је комплетиран.

$\square$

Треба напоменути да доказ општег случаја теореме 5.1, може бити изведен алтернативно помоћу теореме 1.2 и анализирањем максималних суседа у $K^*_{k,n-k}$, који су дефинисани у поглављу 1.1.

5.4 Графови цветних латица

Најпре наводимо и доказујемо лему 5.1 која такође, поред тврђења 1.2, олакшава доказ теореме 5.4. Ради прецизније формулације, скуп чворова $V(J_n)$ биће подељен на следећи начин: $V_1 = \{a_k | 0 \leq k \leq n-1\}$, $V_2 = \{b_k | 0 \leq k \leq n-1\}$, $V_3 = \{c_k | 0 \leq k \leq n-1\}$ и $V_4 = \{d_k | 0 \leq k \leq n-1\}$.

Лема 5.1. *Ако је S произвољан скуп мешовитог разрешења од J_n, тада је:*
а) $(V_1 \cup V_2) \cap S \neq \emptyset$;
б) $(V_3 \cup V_4) \cap S \neq \emptyset$;
в) За свако $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ важи $S \cap \{a_l, b_l, c_l, d_l | k \leq l \leq k + r - 1\} \neq \emptyset$.

Доказ. *а)* Претпоставимо супротно, то јест $(V_1 \cup V_2) \cap S = \emptyset$, одакле следи да је $S \subseteq (V_3 \cup V_4)$. Тада за свако k и l, при чему су $0 \leq k, l \leq n-1$, следи да је $d(b_l, c_k) = d(b_l, d_k) = d(a_l, c_k) + 1$, односно $d(a_l b_l, c_k) = d(a_l, c_k) = d(a_l b_l, d_k) = d(a_l, d_k)$. Дакле, закључујемо да грана $a_l b_l$ има исте метричке координате као чвор a_l у односу на $V_3 \cup V_4$, то јест $r(a_l b_l, V_3 \cup V_4) = r(a_l, V_3 \cup V_4)$. Пошто је $S \subseteq (V_3 \cup V_4)$, онда важи да је $r(a_l b_l, S) = r(a_l, S)$, што повлачи да S није скуп мешовитог разрешења од J_n, а то је контрадикција са почетном претпоставком.
б) Аналогно доказу под *а)*, претпоставимо супротно, то јест $(V_3 \cup V_4) \cap S = \emptyset$, одакле следи да је $S \subseteq (V_1 \cup V_2)$. Тада за свако k и l, при чему су $0 \leq k, l \leq n-1$ и $k \neq l$, следи да је $d(c_l, a_k) = d(d_l, a_k) = d(a_l, a_k) - 1$ и $d(c_l, b_k) = d(d_l, b_k) = d(a_l, b_k) + 1$. За $k = l$ важи да је $d(c_k, a_k) = d(d_k, a_k) = 1$ и $d(c_k, b_k) = d(d_k, b_k) = 2 = d(a_k, b_k) + 1$. Затим, за свако l, такво да је $0 \leq l \leq n-1$ следи да чвор c_l има исте метричке координате као и чвор d_l у односу на $V_1 \cup V_2$, то јест $r(c_l, V_1 \cup V_2) = r(d_l, V_1 \cup V_2)$. Пошто је $S \subseteq (V_1 \cup V_2)$, онда важи да је $r(c_l, S) = r(d_l, S)$, што повлачи да S није скуп мешовитог

разрешења од J_n, а то је контрадикција са почетном претпоставком.
в) Претпоставимо супротно, то јест $S \cap \{a_l, b_l, c_l, d_l | k \leq l \leq k + r - 1\} = \emptyset$, одакле следи да је $S \subseteq \{a_l, b_l, c_l, d_l | k - r - 1 \leq l \leq k - 1\}$. За $k - r \leq l \leq k - 1$ следи да је $d(b_{k+1}, a_l) = d(b_k, a_l) + 1$, $d(b_{k+1}, b_l) = d(b_k, b_l) + 1$, $d(b_{k+1}, c_l) = d(b_k, c_l) + 1$ и $d(b_{k+1}, d_l) = d(b_k, d_l) + 1$, односно $d(b_k b_{k+1}, a_l) = d(b_k, a_l)$, $d(b_k b_{k+1}, b_l) = d(b_k, b_l)$, $d(b_k b_{k+1}, c_l) = d(b_k, c_l)$ и $d(b_k b_{k+1}, d_l) = d(b_k, d_l)$. Дакле, закључујемо да грана $b_k b_{k+1}$ има исте метричке координате као и чвор b_k у односу на $\{a_l, b_l, c_l, d_l | k - r \leq l \leq k - 1\}$. С обзиром да је остао још случај за $l = k - r - 1$, проверавамо да важи $d(b_{k+1}, a_{k-r-1}) = d(b_k, a_{k-r-1}) - 1$, $d(b_{k+1}, b_{k-r-1}) = d(b_k, b_{k-r-1}) - 1$, $d(b_{k+1}, c_{k-r-1}) = d(b_k, c_{k-r-1}) - 1$ и $d(b_{k+1}, d_{k-r-1}) = d(b_k, d_{k-r-1}) - 1$, односно $d(b_k b_{k+1}, a_{k-r-1}) = d(b_{k+1}, a_{k-r-1})$, $d(b_k b_{k+1}, b_l) = d(b_{k+1}, b_{k-r-1})$, $d(b_k b_{k+1}, c_{k-r-1}) = d(b_{k+1}, c_{k-r-1})$ и $d(b_k b_{k+1}, d_{k-r-1}) = d(b_{k+1}, d_{k-r-1})$. Дакле, закључујемо да грана $b_k b_{k+1}$ има исте метричке координате као и чвор b_{k+1} у односу на $\{a_{k-1-r}, b_{k-1-r}, c_{k-1-r}, d_{k-1-r}\}$. Дакле, $r(b_k b_{k+1}, \{a_l, b_l, c_l, d_l | k - r - 1 \leq l \leq k - 1\}) = r(b_{k+1}, \{a_l, b_l, c_l, d_l | k - r - 1 \leq l \leq k - 1\})$. Имајући на уму да је $S \subseteq \{a_l, b_l, c_l, d_l | k - r - 1 \leq l \leq k - 1\}$, следи да је $r(b_k b_{k+1}, S) = r(b_{k+1}, S)$, што повлачи да S није скуп мешовитог разрешења од J_n, а то је контрадикција са почетном претпоставком.

□

Треба напоменути да су сви индекси из леме 5.1, у делу под *в)*, узети по модулу n. Штавише, без губитка општости, један чвор из $S \cap (V_3 \cup V_4)$ из леме 5.1, у делу под *б)*, треба трансформисати у чвор c_0 изоморфизмом дефинисаним у тврђењу 1.2.

Теорема 5.4. *За непарно $n \geq 5$ важи да је* $\beta_M(J_n) = \begin{cases} 5, & n = 5; \\ 4, & n \geq 7. \end{cases}$

Доказ. **Корак 1:** *Тачна вредност за $n \in \{5, 7, 9\}$.*
Помоћу тоталне енумерације, може се показати да је:

- $\beta_M(J_5) = 5$, са мешовитом метричком базом $S = \{a_3, b_0, b_1, c_2, d_3\}$;
- $\beta_M(J_7) = 4$, са мешовитом метричком базом $S = \{b_0, c_1, c_5, d_3\}$;
- $\beta_M(J_9) = 4$, са мешовитом метричком базом $S = \{b_0, c_1, c_6, d_3\}$.

Корак 2: *Горња граница једнака је 4 за $n \geq 11$.*
Нека је $S = \{b_0, c_1, c_{r+2}, d_3\}$, где је $n = 2r + 1$. Показаћемо да је S скуп

Табела 15: Метричке координате чворова графа J_{2r+1}

чвор	услов	$r(v,S)$
a_k	$0 \le k \le 1$	$(k+1, 2-k, r+k, 4-k)$
a_2		$(3, 2, r+1, 2)$
a_k	$3 \le k \le r$	$(k+1, k, r+3-k, k-2)$
a_{r+1}		$(r+1, r+1, 2, r-1)$
a_k	$r+2 \le k \le r+3$	$(2r+2-k, 2r+3-k, k-1-r, k-2)$
	$r+4 \le k \le 2r$	$(2r+2-k, 2r+3-k, k-1-r, 2r+5-k)$
b_k	$0 \le k \le 1$	$(k, 3-k, r+k+1, 5-k)$
b_2		$(2, 3, r+2, 3)$
b_k	$3 \le k \le r$	$(k, k+1, r+4-k, k-1)$
b_{r+1}		$(r, r+2, 3, r)$
b_k	$r+2 \le k \le r+3$	$(2r+1-k, 2r+4-k, k-r, k-1)$
	$r+4 \le k \le 2r$	$(2r+1-k, 2r+4-k, k-r, 2r+6-k)$
c_0		$(2, 1, r+1, 5)$
c_k	$1 \le k \le 2$	$(2+k, k-1, r-k+2, 5-k)$
	$3 \le k \le r$	$(k+2, k-1, r+2-k, k-1)$
	$r+1 \le k \le 2+r$	$(2r+3-k, k-1, r+2-k, k-1)$
	$r+3 \le k \le 2r$	$(2r+3-k, 2r+4-k, k-2-r, 2r+4-k)$
d_0		$(2, 3, r-1, 3)$
d_k	$1 \le k \le 2$	$(k+2, k+1, r-1+k, 3-k)$
	$3 \le k \le r$	$(k+2, k+1, r+4-k, k-3)$
	$r+1 \le k \le r+2$	$(2r+3-k, 2r+2-k, r+4-k, k-3)$
	$r+3 \le k \le r+4$	$(2r+3-k, 2r+2-k, k-r, k-3)$
	$r+5 \le k \le 2r$	$(2r+3-k, 2r+2-k, k-r, 2r+6-k)$

Табела 16: Метричке координате грана графа J_{2r+1}

грана	услов	$r(e,S)$
a_0b_0		$(0,2,r,4)$
a_kb_k	$1 \leq k \leq 2$	$(k,k,1+r,4-k)$
	$3 \leq k \leq r$	$(k,k,r-k+3,k-2)$
$a_{r+1}b_{r+1}$		$(r,r+1,2,r-1)$
a_kb_k	$r+2 \leq k \leq 3+r$	$(2r+1-k,2r+3-k,k-1-r,k-2)$
	$r+4 \leq k \leq 2r$	$(2r+1-k,2r+3-k,k-1-r,2r+5-k)$
a_0c_0		$(1,1,r,4)$
a_kc_k	$1 \leq k \leq 2$	$(1+k,k-1,r-k+2,4-k)$
	$3 \leq k \leq r$	$(1+k,k-1,r-k+2,k-2)$
	$r+1 \leq k \leq r+2$	$(2r-k+2,k-1,r-k+2,k-2)$
	$r+3 \leq k \leq 2r$	$(2r+2-k,2r+3-k,k-2-r,2r+4-k)$
a_0d_0		$(1,2,r-1,3)$
a_kd_k	$1 \leq k \leq 2$	$(k+1,k,r-1+k,3-k)$
	$3 \leq k \leq r$	$(k+1,k,r+3-k,k-3)$
$a_{r+1}d_{r+1}$		$(r+1,r+1,2,r-2)$
a_kd_k	$r+2 \leq k \leq r+3$	$(2r+2-k,2r+2-k,k-1-r,k-3)$
	$r+4 \leq k \leq 2r$	$(2r+2-k,2r+2-k,k-1-r,2r+5-k)$
b_0b_1		$(0,2,r+1,4)$
b_kb_{k+1}	$1 \leq k \leq 2$	$(k,1+k,r-k+3,4-k)$
	$3 \leq k \leq r$	$(k,1+k,r+3-k,k-1)$
	$r+1 \leq k \leq 2+r$	$(2r-k,2r+3-k,2,k-1)$
	$r+3 \leq k \leq 2r$	$(2r-k,2r+3-k,k-r,2r+5-k)$
c_0c_1		$(2,0,r+1,4)$
c_kc_{k+1}	$1 \leq k \leq 2$	$(k+2,k-1,r+1-k,4-k)$
	$3 \leq k \leq r$	$(k+2,k-1,r+1-k,k-1)$
$c_{r+1}c_{r+2}$		$(r+1,r,0,r)$
c_kc_{k+1}	$r+2 \leq k \leq 2r-1$	$(2r+2-k,2r+3-k,k-2-r,2r+3-k)$
$c_{2r}d_0$		$(2,3,r-2,3)$
c_0d_{2r}		$(2,1,r,5)$
d_0d_1		$(2,2,r-1,2)$
d_kd_{k+1}	$1 \leq k \leq 2$	$(2+k,1+k,r+k-1,2-k)$
	$3 \leq k \leq r$	$(k+2,k+1,r+3-k,k-3)$
$d_{r+1}d_{r+2}$		$(r+1,r,2,r-2)$
d_kd_{k+1}	$r+2 \leq k \leq 3+r$	$(2r+2-k,2r+1-k,k-r,k-3)$
	$r+4 \leq k \leq 2r-1$	$(2r+2-k,2r+1-k,k-r,2r+5-k)$

мешовитог разрешења. Репрезентација координата за сваки чвор и сваку грану, у односу на S, биће приказана у Табели 15 и Табели 16.

Као што се види из Табеле 15 и Табеле 16, сви елементи графа имају међусобно различите метричке координате, тако да је S скуп мешовитог разрешења. Дакле, $\beta_M(J_n) \leq 4$.

Корак 3: *Доња ӯраница једнака је 4 за* $n \geq 11$.
Претпоставимо супротно, то јест $\beta_M(J_n) \leq 3$. Из неједнакости (1.4) и теореме 1.12 имамо да је $\beta_M(J_n) = 3$. Нека је S скуп мешовитог разрешења од J_n. Тада, из леме 5.1, из дела под *а)* и дела под *б)* могу се издвојити два елемента скупа S, то јест $c_0 \in S$ и постоји k такво да $a_k \in S$ или $b_k \in S$. Нека преостали трећи члан из S има индекс l, то јест постоји l такво да $a_l \in S$ или $b_l \in S$ или $c_l \in S$ или $d_l \in S$.

Из леме 5.1, дела под *в)*, следи да индекси k и l немају произвољне вредности:

(I) $k \neq 0$ и $l \neq 0$;

(II) $1 \leq k \leq r \Rightarrow r+1 \leq l \leq 2r$;

(III) $r+1 \leq k \leq 2r \Rightarrow 1 \leq l \leq r$.

Део под (I) важи, зато што ако је $k=0$ или $l=0$ онда следи да је $S \cap \{a_i, b_i, c_i, d_i | 1 \leq i \leq r\} = \emptyset$ или $S \cap \{a_i, b_i, c_i, d_i | r+1 \leq i \leq 2r\} = \emptyset$, а то је у директној контрадикцији са лемом 5.1, делом под *в)*.

Ако је $1 \leq k \leq r$, онда опет из леме 5.1, дела под *в)*, важи $S \cap \{a_i, b_i, c_i, d_i | r+1 \leq i \leq 2r\} \neq 0$. Пошто $k \notin \{i | r+1 \leq i \leq 2r\}$, онда $l \in \{i | r+1 \leq i \leq 2r\}$, тако да део под (II) следи.

Део под (III) такође следи из леме 5.1, на сличан начин као и део под (II).

Даље, имамо 8 могућих случајева за скуп мешовитог разрешења S.

Случај 1. $S = \{c_0, a_k, a_l\}$.
Пошто је $k \neq 0$ и $l \neq 0$, онда следи да је

$$d(a_0c_0, c_0) = d(c_0, c_0) = 0,\ d(a_0c_0, a_k) = d(a_0, a_k) - 1 = d(c_0, a_k) \text{ и}$$

$$d(a_0c_0, a_l) = d(a_0, a_l) - 1 = d(c_0, a_l).$$

Дакле, $r(a_0c_0, S) = r(c_0, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.

Случај 2. $S = \{c_0, a_k, b_l\}$.

Подслучај 1. $1 \leq k \leq r$.
Из дела под (II) следи да је $r+1 \leq l \leq 2r$.
Тада је

$$d(a_0c_0, c_0) = d(c_0d_{2r}, c_0) = 0 \text{ и } d(a_0c_0, a_k) = d(c_0, a_k) = d(c_0d_{2r}, a_k).$$

Такође, пошто је

$$d(a_0c_0, b_l) = d(a_0, b_l) = d(b_0, b_l) + 1,\ d(c_0d_{2r}, b_l) = d(d_{2r}, b_l) = d(b_{2r}, b_l) + 2 \text{ и}$$

$$d(b_0, b_l) = d(b_{2r}, b_l) + 1,$$

онда следи да је $d(a_0c_0, b_l) = d(c_0d_{2r}, b_l)$.
Дакле, $r(a_0c_0, S) = r(c_0d_{2r}, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.

Подслучај 2. $r+1 \leq k \leq 2r$.
Из дела под (III) следи да је $1 \leq l \leq r$.
Тада је

$$d(a_0c_0, c_0) = d(c_0c_1, c_0) = 0 \text{ и } d(a_0c_0, a_k) = d(c_0, a_k) = d(c_0c_1, a_k).$$

Такође, пошто је

$$d(a_0c_0, b_l) = d(a_0, b_l) = d(b_0, b_l) + 1,\ d(c_0c_1, b_l) = d(c_1, b_l) = d(b_1, b_l) + 2 \text{ и}$$

$$d(b_0, b_l) = d(b_1, b_l) + 1,$$

онда следи да је $d(a_0c_0, b_l) = d(c_0c_1, b_l)$.
Дакле, $r(a_0c_0, S) = r(c_0c_1, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.

Случај 3. $S = \{c_0, a_k, c_l\}$.
Подслучај 1. $1 \leq k \leq r$.
Из дела под (II) следи да је $r + 1 \leq l \leq 2r$.
Тада је

$$d(a_0c_0, c_0) = d(c_0d_{2r}, c_0) = 0 \text{ и } d(a_0c_0, a_k) = d(c_0, a_k) = d(c_0d_{2r}, a_k).$$

Такође, пошто је

$$d(a_0c_0, c_l) = d(a_0, c_l) = d(c_{2r}, c_l) + d(c_{2r}, a_0) = d(c_{2r}, c_l) + 2 \text{ и}$$

$$d(c_0d_{2r}, c_l) = d(d_{2r}, c_l) = d(c_{2r}, c_l) + 2,$$

онда следи да је $d(a_0c_0, c_l) = d(c_0d_{2r}, c_l)$.
Дакле, $r(a_0c_0, S) = r(c_0d_{2r}, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.
Подслучај 2. $r + 1 \leq k \leq 2r$.
Из дела (III) следи да је $1 \leq l \leq r$. Тада је

$$d(a_0c_0, c_0) = d(c_0, c_0) = 0,\ d(a_0c_0, a_k) = d(a_0, a_k) - 1 = d(c_0, a_k) \text{ и}$$

$$d(a_0c_0, c_l) = d(c_0, c_l).$$

Дакле, $r(a_0c_0, S) = r(c_0, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.

Случај 4. $S = \{c_0, a_k, d_l\}$.
Подслучај 1. $1 \leq k \leq r$.
Из дела под (II) следи да је $r + 1 \leq l \leq 2r$.
Тада је

$$d(a_0c_0, c_0) = d(c_0, c_0) = 0, d(a_0c_0, a_k) = d(a_0, a_k) - 1 = d(c_0, a_k) \text{ и}$$

$$d(a_0c_0, d_l) = d(a_0, d_l) - 1 = d(c_0, d_l).$$

Дакле, $r(a_0c_0, S) = r(c_0, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.
Подслучај 2. $r + 1 \leq k \leq 2r$.
Из дела под (III) следи да је $1 \leq l \leq r$.
Тада је

$$d(c_0a_0, c_0) = d(c_0c_1, c_0) = 0, d(c_0a_0, a_k) = d(c_0c_1, a_k) \text{ и}$$

$$d(c_0a_0, d_l) = d(a_0, d_l) = d(c_1, d_l) = d(c_0c_1, d_l).$$

Дакле, $r(c_0a_0, S) = r(c_0c_1, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.

Случај 5. $S = \{c_0, b_k, a_l\}$.
Овај случај се своди на случај 2 увођењем смене $l' = k$ и $k' = l$.

Случај 6. $S = \{c_0, b_k, b_l\}$.
Подслучај 1. $1 \leq k \leq r$.
Из дела под (II) следи да је $r + 1 \leq l \leq 2r$.
Тада је

$$d(a_0, c_0) = 1 = d(a_0d_0, c_0),$$

$$d(a_0, b_k) = d(b_0, b_k) + 1 = d(d_0, b_k) - 1 = d(a_0d_0, b_k) \text{ и}$$

$$d(a_0, b_l) = d(b_0, b_l) + 1 = d(d_0, b_l) - 1 = d(a_0d_0, b_l).$$

Дакле, $r(a_0, S) = r(a_0d_0, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.
Подслучај 2. $r + 1 \leq k \leq 2r$.
Можемо приметити да се подслучај 2, увођењем смене $l' = k$ и $k' = l$, своди на подслучај 1.

Случај 7. $S = \{c_0, b_k, c_l\}$.
Подслучај 1. $1 \leq k \leq r$.
Из дела под (II) следи да је $r + 1 \leq l \leq 2r$.
Тада је

$$d(b_0b_1, c_0) = d(b_0, c_0) = 2 = d(a_1, c_0) = d(a_1b_1, c_0),$$

$$d(b_0b_1, b_k) = d(b_1, b_k) = d(a_1, b_k) - 1 = d(a_1b_1, b_k) \text{ и}$$

$$d(b_0b_1, c_l) = d(b_0, c_l) = d(b_0, b_l) + 2 = d(c_0, c_l) = d(d_0, c_l) + d(d_0, c_0) =$$

$$d(d_0, c_l) + d(d_0, a_1) = d(a_1, c_l) = d(b_1, c_l) - 1 = d(a_1b_1, c_l),$$

при чему је $d(d_0, c_0) = d(d_0, a_1) = 2$.

Дакле, $r(b_0b_1, S) = r(a_1b_1, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.
Подслучај 2. $r + 1 \leq k \leq 2r$.
Из дела под (III) следи да је $1 \leq l \leq r$.
Тада је

$$d(b_0, c_0) = 2 = d(d_{2r-1}, c_0), d(b_0, b_k) = d(b_{2r-1}, b_k) + 2 = d(d_{2r-1}, b_k) \text{ и}$$

$$d(b_0, c_l) = d(b_0, b_l) + 2 = d(c_0, c_l) + 2 = d(c_0, c_l) + d(d_{2r-1}, c_0) = d(d_{2r-1}, c_l),$$
при чему је $d(d_{2r-1}, c_0) = 2$.

Дакле, $r(b_0, S) = r(d_{2r-1}, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.

Случај 8. $S = \{c_0, b_k, d_l\}$.

Подслучај 1. $1 \le k \le r$.
Из дела под (II) следи да је $r+1 \le l \le 2r$.
Тада је

$$d(b_0b_1, c_0) = d(b_0, c_0) = 2 = d(a_1, c_0) = d(a_1b_1, c_0),$$

$$d(b_0b_1, b_k) = d(b_1, b_k) = d(a_1, b_k) - 1 = d(a_1b_1, b_k) \text{ и}$$

$$d(b_0b_1, d_l) = d(b_0, d_l) = d(b_0, b_l) + 2 = d(d_0, d_l) =$$

$$d(c_0, d_l) + d(c_0, a_1) = d(a_1, d_l) = d(b_1, d_l) - 1 = d(a_1b_1, d_l),$$

при чему је $d(c_0, a_1) = d(c_0, c_1) + d(c_1, a_1) = 2$.
Дакле, $r(b_0b_1, S) = r(a_1b_1, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.

Подслучај 2. $r+1 \le k \le 2r$.
Из дела под (III) следи да је $1 \le l \le r$.
Тада је

$$d(b_0, c_0) = 2 = d(a_{2r}, c_0),\ \ d(b_0, b_k) = d(a_{2r}, b_k) \text{ и}$$

$$d(b_0, d_l) = d(b_0, b_l) + 2 = d(d_0, d_l) + 2 = d(d_0, d_l) + d(a_{2r}, d_0) = d(a_{2r}, d_l).$$

Дакле, $r(b_0, S) = r(a_{2r}, S)$, што значи да S није скуп мешовитог разрешења.

Пошто S није скуп мешовитог разрешења у свих 8 случајева, долазимо до контрадикције са полазном претпоставком, тако да је $\beta_M(J_n) \ge 4$. Дакле, из претходна 3 корака, закључујемо да је доказ теореме комплетиран.

$\square$

5.5 Анализа резултата

У литератури, до сада, нису познати резултати у вези метричке димензије и метричке димензије грана за комплетно раздвојене графове. Због тога у овом тренутку није могућа даља упоредна анализа метричке димензије, метричке димензије грана и мешовите метричке димензије.

На почетку, правимо поређење за све три метричке димензије, за графове облика точка. За $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ ситуација је једноставна тако да можемо да упоредимо све три метричке димензије. Наиме, за $n = 3$ мешовита метричка димензија је већа за један од метричке димензије и метричке димензије грана, односно $\beta(W_3) = \beta_E(W_3) = 3 < \beta_M(W_3) = 4$. Затим, за $n = 4$ метричка димензија грана и мешовита метричка димензија су за два веће од метричке димензије, односно $\beta(W_4) = 2 < \beta_E(W_4) = \beta_M(W_4) = 4$. Даље, када је $n = 5$ и када је $n = 6$ приказано је да је $\beta(W_5) = 2 < \beta_E(W_5) = 4 < \beta_M(W_5) = 5$, односно $\beta(W_6) = 3 < \beta_E(W_6) = 5 < \beta_M(W_6) = 6$, редом. На крају, за $n \geq 7$ метричка димензија грана мања је од мешовите метричке димензије, а већа од метричке димензије, односно $\beta(W_n) = \lfloor \frac{2n+2}{5} \rfloor < \beta_E(W_n) = n - 1 < \beta_M(W_n) = n$. Напоменимо да се из претходног може видети да све три димензије неограничено расту са порастом реда графа n као и да упоређивањем мешовите метричке димензије са преостале две, добијамо да је она већа и од метричке димензије и од метричке димензије грана за $n \geq 5$.

Даље, правимо поређење између све три метричке димензије за торус графове. Међутим, напоменимо да што се тиче метричке димензије грана, она у литератури није позната за све вредности параметара m и n. За непарно m или n мешовита метричка димензија је за један већа од метричке димензије, односно $\beta(T_{m,n}) = 3 < \beta_M(T_{m,n}) = 4$. Затим, за m и n парно (непарно) оне су једнаке, односно $\beta(T_{m,n}) = \beta_M(T_{m,n}) = 4$. Издвајамо случај када је $m = 4s$ и $n = 4t$, при чему су s и t цели бројеви, тада су метричка димензија и мешовита метричка димензија за један веће од метричке димензије грана, односно $\beta_E(T_{m,n}) = 3 < \beta(T_{m,n}) = \beta_M(T_{m,n}) = 4$. Из претходног се лако види да су метричка димензија грана и мешовита метричка димензија константе, док метричка димензија не зависи од реда графа n.

На крају, интересантно је направити још и поређење између мешовите метричке димензије и метричке димензије за графове цветних латица. За $n = 5$ ситуација је једноставна, тако да можемо да упоредимо чак и све три метричке димензије, зато што се оне могу добити помоћу тоталне енумерације. Дакле, добија се да је $\beta(J_5) = 3 < \beta_E(J_5) = 4 < \beta_M(J_5) = 5$. За непарно $n \geq 7$, мешовита метричка димензија је већа од метричке димензије, односно $\beta(J_n) = 3 < \beta_M(J_n) = 4$. Напоменимо да се лако може видети из теореме 5.4, да је мешовита метричка димензија, за графове цветних латица за $n \geq 7$, константа, то јест не зависи од n, што такође важи и за метричку димензију ових графова. Међутим, што се тиче метричке димензије грана, тачна вредност за графове цветних латица није одређена, али као последицу теореме 5.4 имамо да за $n \geq 7$ важи да је $\beta_E(J_n) \leq 4$. Са друге стране из теореме 1.6 следи да је $\beta_E(J_n) \geq 3$, одакле закључујемо да за свако $n \geq 7$ важи $\beta_E(J_n) \in \{3, 4\}$.

6 Закључак

У овом раду су приказани нови резултати који се односе на мешовиту метричку димензију графова. Како је овај проблем $NP-$тежак, поред налажења егзактних вредности врло је значајно и налажење добрих доњих и/или горњих граница. Имајући то у виду, развијене су три опште, доње границе. Прва доња граница зависи од минималног степена чвора. Следећа доња граница зависи од: броја чворова, броја грана, дијаметра и максималног степена чвора. Преостала доња граница се одређује решавањем проблема минималног репрезентативног скупа. Да су у питању врло корисне и примењиве доње границе, показује и то да се оне директно или индиректно примењују у већини доказа у поглављима 3-5, а не само у илустративним примерима у секцији 2.2.

У оквиру екстремалних проблема везаних за мешовиту метричку димензију врло је битно налажење максималних разлика где фигурише ова инваријанта. Добијени теоријски резултати описују две конкретне разлике. У једној је ова инваријанта умањеник (умањилац је метричка димензија грана), при чему су одређени графови где се доња граница достиже. У другој разлици посматрана инваријанта фигурише као умањилац (умањеник је јака метричка димензија). У првом случају мешовита метричка димензија расте неограничено са порастом реда графа, док је у другом случају константа, што није неочекивано.

Такође су дати резултати из још једног облика екстремалне теорије графова, а то су $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ доње и горње границе. Ту су разматрани случајеви произвољних графова, као и обострано повезаних, за збир/производ графа и његовог комплементарног графа. Поред резултата за мешовиту метричку димензију добијени су и резултати за метричку димензију грана. Такође је побољшана, доња граница позната из литературе, за метричку димензију. Приметимо да је побољшана значајно, јер уместо константне доње границе добијена је доња граница која зависи од реда графа.

Егзактне вредности мешовите метричке димензије су добијене за четири интересантне класе графова: графове облика точка, торус, комплетно раздвојене графове и графове цветних латица. Као и што је очекивано за комплетно раздвојене графове (који су јако густи), мешовита метричка димензија расте неограничено са порастом реда графа. Са друге стране, за ретке графове никакво такво опште правило не постоји, пошто за торус графове мешовита метричка димензија је константа, за графове цветних латица не зависи од реда графа, док насупрот томе за графове облика точка неограничено расте са порастом реда графа n.

Правци даљег истраживања могу укључивати:

- налажење егзактних вредности за још неке познате класе графова;
- $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ границе за неке сличне графовске инваријанте;
- добијање егзактних вредности или добрих граница за јако регуларне графове ($\mathrm{strongly\ regular\ graphs}$) или за неке друге фамилије графова.

6.1 Научни допринос рада

Најважнији допринос у овој дисертацији представљају следећи резултати:

- две нове опште, теоријске доње границе које укључују степене чворова, односно дијаметар графа.
- нова општа доња граница која се добија решавањем проблема минималног репрезентативног скупа.
- решена максимална разлика између мешовите метричке димензије и метричке димензије грана, односно између јаке метричке димензије и мешовите метричке димензије. За прву максималну разлику приказани су и графови на којима се она достиже.
- $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ горња и доња граница за збир и производ мешовите метричке димензије графа и његовог комплемента, како за произвољне тако и за обострано повезане графове.
- $\mathrm{Nordhaus-Gaddum}$ горња и доња граница за збир и производ метричке димензије грана графа и његовог комплемента, како за произвољне тако и за обострано повезане графове.

- додатно побољшање Nordhaus – Gaddum доње границе, за збир и производ метричке димензије графа и његовог комплемента за обострано повезане графове.

- егзактне вредности мешовите метричке димензије за графове облика точка, торус, комплетно раздвојене графове и графове цветних латица.

- за неке од тих графова су егзактне вредности добијене управо применом неких од горе наведених доњих граница. За сваки од датих графова су дате и мешовите метричке базе, као и метричке координате у односу на дате базе.

Из претходног се може видети да су сви предложени резултати веома значајни код проблема мешовите метричке димензије. Због свега горе наведеног, научно истраживање описано у овом раду даје допринос областима: теорија графова, дискретна математика и комбинаторна оптимизација. Део добијених резултата је већ објављен у међународним часописима са SCI листе, док су остали делови у припреми за објављивање.

Литература

[1] Aouchiche, M. *Comparaison Automatisé e d'Invariants en Théorie des Graphes*, Ph. D. thesis, École Polytechnique de Montréal, 2006.

[2] Aouchiche, M., Bonnefoy, J. M., Fidahoussen, A., Caporossi, G., Hansen, P., Hiesse, L., Lacheré, J., Monhait, A. (2006) *Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs, 14. The AutoGraphiX 2 System*. Global Optimization: from Theory to Implementation, Springer, pp. 281–310.

[3] Aouchiche, M., Caporossi, G., Hansen, P., Laffay, M. (2005) *AutoGraphiX: a survey*. Electron. Notes Discrete Math., Vol. 22, pp. 515–520.

[4] Aouchiche, M., Hansen, P. (2013) *A survey of Nordhaus–Gaddum type relations*. Discrete Appl. Math., Vol. 161, pp. 466–546.

[5] Behzad, M., Chartrand, G., Lesniak-Foster, L. *Graphs and digraphs*, Boston, Mass. 1979.

[6] Buczkowski, P. S., Chartrand, G., Poisson, C., Zhang, P. (2003) *On k-dimensional graphs and their bases*. Period. Math. Hung., Vol. 46, pp. 9-15.

[7] Bondy, J. A., Murty, U. S. R. *Graph theory*, Springer, 2008.

[8] Brankov, V., Stevanović, D. (2003) *An Invitation to newGRAPH*. Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, Serie II, Tomo XXV, Vol. 9, pp. 211-216.

[9] Cvetković, D. *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1981.

[10] Cvetković, D. *A project for using computers in further development of graph theory*, (The Theory and Applications of Graphs, Proc. 4th Internat. Conf. Theory and Appl. of Graphs, Kalamazoo 1980, ed. G. Chartrand, Y. Alavi, D. L. Goldsmith, L. Lesniak-Foster, D. R. Lick, John Wiley and Sons, New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore, 1981), pp. 285-296.

[11] Cvetković, D. *Diskretne matematičke strukture*, Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[12] Cvetković, D. *Further experiences in computer aided research in graph theory*, (Graphs, Hypergraphs and Applications, Proc. Conf. Graph Theory held in Eyba, October 1984, ed. H. Sachs, Teubner, Leipzig, 1985), pp. 27-30.

[13] Caporossi, G. (2017) *Variable Neighborhood Search for extremal vertices: The AutoGraphiX-III system*. Comput Oper Res, Vol. 78, pp. 431–438.

[14] Cvetković, D., Cangalović, M., Dugošija, Đ., Kovačević-Vujčić, V., Simić, S., Vuleta, J. *Kombinatorna Optimizacija*, Društvo operacionih istraživača, Beograd, 1996.

[15] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., Oellermann, O. R. (2000) *Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph*. Discrete Appl. Math., Vol. 105, pp. 99-113.

[16] Caporossi, G., Gutman, I., Hansen, P. (1999) *Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs IV: Chemical Trees with Extremal Connectivity Index*. Comput. Chem., Vol. 23, pp. 469-477.

[17] Caporossi, G., Gutman, I., Hansen, P., Pavlovic, LJ. (2003) *Graphs with maximum connectivity index*. Comput. Biol. Chem., Vol. 27, pp. 85-90.

[18] Caporossi, G., Hansen, P. (2000) *Variable neighborhood search for extremal graphs. I. The AutoGraphiX system*. Discrete Math., Vol. 212, pp. 29–44.

[19] Cáceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M., Puertas, M. L., Seara, C., Wood, D. R. (2007) *On the metric dimension of cartesian products of graphs*. SIAM J. Discrete Math., Vol. 2, pp. 423-441.

[20] Cvetković, D., Kraus, L., Simić, S. (1981) *Discussing graph theory with a computer I, Implementation of graph theoretic algorithms*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., pp. 100-104.

[21] Cvetković, D., Simić, S. *Odabrana poglavlja iz diskretne matematike*, Akademska misao, Beograd, 2012.

[22] Chartrand, G., Zhang, P. *A first course in graph theory*, Dover publications, Western Michigan University, 2013.

[23] Divnić, T., Milivojević, M., Pavlović, Lj. (2014) *Extremal graphs for the geometric-arithmetic index with given minimum degree*. Discrete Appl. Math., Vol. 162, pp. 386-390.

[24] Divnić, T., Pavlović, Lj., Liu, B. (2015) *Extremal graphs for the Randić index when minimum, maximum degrees and order of graphs are odd*. Optimization, Vol. 64, pp. 2021-2038.

[25] Đ. Dugošija, A. Savić, *Operaciona istraživanja: linearno i celobrojno programiranje, grafovi i algoritmi*, Matematički fakultet, Beograd, 2018.

[26] Fischermann, M., Hoffmann, A., Rautenbach, D., Volkmann, L. (2003) *A linear-programming approach to the generalized Randić index*. Discrete Appl. Math., Vol. 128, pp. 375-385.

[27] Filipović, V., Kartelj, A., Kratica, J. (2019) *Edge metric dimension of some generalized Petersen graphs*. Results Math., Vol. 74, Article number: 182.

[28] Geneson, J., Kaustav, S., Labelle, A. *Extremal results for graphs of bounded metric dimension*, arXiv preprint, https://arxiv.org/abs/2008.13302.

[29] Gutman, I., Pavlović, Lj., Miljković, O. (2000) *On graphs with extremal connectivity indices*. Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Vol. 24, pp. 1-14.

[30] Gutman, I., Furtula, B. *Recent Results in the Theory of Randić index*, Mathematical Chemistry Monographs, Kragujevac, Vol. 6, 2008.

[31] Harary, F. *Graph theory*, Reading 1969 (drugo izdanje: 1971; prevod na ruski: Moskva 1973; prevod na nemački: München - Wien 1974).

[32] Harary, F., Melter, R. (1976) *On the metric dimension of a graph*. Ars Comb., Vol. 2, pp. 191-195.

[33] Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M. (2014) *Nordhaus-gaddum bounds for locating domination*. Eur J Comb, Vol. 36, pp. 1-6.

[34] Isaacs, R. (1975) *Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable*. Am. Math. Mon., Vol. 82, pp. 221-239.

[35] Imran, S. M., Bokhary, S. A. u. H., Ahmad, A., Semaničová-Feňovčíková, A. (2013) *On classes of regular graphs with constant metric dimension.* Acta Math. Sci., Vol. 33, pp. 187-206.

[36] Johnson, M. (1993) *Structure-activity maps for visualizing the graph variables arising in drug design.* J. Biopharm. Stat., Vol. 3, pp. 203-236.

[37] Kozyrev, V. P. (1974) *Graph theory.* J. Sov. math., Vol. 2, pp. 489-519.

[38] Kelenc, A., Tratnik, N., Yero, I. G. (2018) *Uniquely identifying the edges of a graph: The edge metric dimension.* Discrete Appl. Math., Vol. 251, pp. 204-220.

[39] Kelenc, A., Kuziak, D., Taranenko, A., Yero, I. G. (2017) *Mixed metric dimension of graphs.* Appl. Math. Comput., Vol. 314, pp. 429-438.

[40] Korte, B., Vygen, J. *Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

[41] Kratica, J., Kovačević-Vujčić, V., Čangalović, M., Stojanović, M. (2012) *Minimal doubly resolving sets and the strong metric dimension of some convex polytopes.* Appl. Math. Comput., Vol. 218, pp. 9790-9801.

[42] Kratica, J., Kovačević-Vujčić, V., Čangalović, M., Stojanović, M. (2014) *Strong metric dimension: A survey.* Yugosl. J. Oper. Res., Vol. 24, pp. 187-198.

[43] Kratica, J., Matić, D., Filipović, V. (2020) *Weakly convex and convex domination numbers for generalized Petersen and flower snark graphs.* Rev. de la Union Mat. Argentina, Vol. 61, pp. 441-455.

[44] Knor, M., Majstorović, S., Toshi, A. T. M., Škrekovski, R., Yero, I. G. (2021) *Graphs with the edge metric dimension smaller than the metric dimension.* Appl. Math. Comput., Vol. 401, 126076.

[45] Khuller, S., Raghavachari, B., Rosenfeld, A. (1996) *Landmarks in graphs.* Discrete Appl. Math., Vol. 70, pp. 217-229.

[46] Li, X., Gutman, I. *Mathematical Aspects of Randić-Type Molecular Structure Descriptors*, Mathematical Chemistry Monographs, Kragujevac, 2006.

[47] Liu, B., Pavlović, Lj., Divnić, T., Liu, J., Stojanović, M. (2013) *On the conjecture of Aouchiche and Hansen about the Randić index.* Discrete Math., Vol. 313, pp. 225-235.

[48] Melter, R. A., Tomescu, I. (1984) *Metric bases in digital geometry.* Comput. Gr. Image Process., Vol. 25, pp. 113-121.

[49] Milivojević, M., Pavlović, Lj. (2017) *The Variation of the Randić Index with Regard to Minimum and Maximum Degree.* Discrete Appl. Math., Vol. 217, pp. 286-293.

[50] Mladenović, N., Labbe, M., Hansen, P. (2003) *Solving the p-center problem with tabu search and variable neighborhood search.* Networks, Vol. 42, pp. 48-64.

[51] Nordhaus, E. A., Gaddum, J. W. (1956) *On complementary graphs.* Am Math Mon., Vol. 63, pp. 175-177.

[52] Pavlović, Lj. (2007) *The linear programming approach to the Randić index.* Int. Tran. Oper. Res., Vol. 14, pp. 535-545.

[53] Pavlović, Lj. *Matematičko programiranje*, Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac, 2014.

[54] Pavlovic, Lj., Divnic, T. (2007) *A quadratic programming approach to the Randic index.* Eur. J. Oper. Res., Vol. 176, pp. 435-444.

[55] Pavlović, Lj., Gutman, I. (2001) *Graphs with extremal connectivity index.* Novi Sad J. Math., Vol. 31, pp. 53-58.

[56] Randić, M. (1975) *On characterization of molecular branching.* J. Am. Chem. Soc., Vol. 97, pp. 6609 -6615.

[57] Slater, P. J. (1975) *Leaves of trees.* Congr. Numer., Vol. 14, pp. 549–559.

[58] Sebő, A., Tannier, E. (2004) *On metric generators of graphs.* Math. Oper. Res., Vol. 29, pp. 383-393.

[59] Stevanović, D., Ćirić, M., Simić, S., Baltić, V. *Diskretna matematika-Osnove kombinatorike i teorije grafova*, 2007.

[60] Sedlar, J., Škrekovski, R. (2021) *Mixed metric dimension of graphs with edge disjoint cycles.* Discrete Appl. Math., Vol. 300, pp. 1-8.

[61] Sedlar, J., Škrekovski, R. (2021) *Extremal mixed metric dimension with respect to the cyclomatic number.* Appl. Math. Comput., Vol. 404, 126238.

[62] Turán, P. (1941) *Eine extremalaufgabe aus der graphentheorie.* Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, Vol. 48, pp. 436-452.

[63] Tadić, R. *Osnovi teorije grafova: primena u praksi*, Beograd, 1969.

[64] Wiener, H. (1947) *Structural determination of paraffin boiling points.* J. Am. Chem. Soc., Vol. 69, pp. 17–20.

[65] Wilson, R. J. *Introduction to Graph Theory*, The Open University, 2010.

[66] Zubrilina, N. (2018) *On the edge dimension of a graph.* Discrete math., Vol. 341, pp. 2083-2088.

[67] Zykov A. A. (1949) *On some properties of linear complexes.* Mat. Sb. (N.S.), Vol. 24, pp. 163-188.

[68] Zykov, A. A. *Some properties of linear complexes*, Amer. Math. Soc., 1952.

Радови настали у изради ове дисертације

[MDKSM21] Milivojević Danas, M., Kratica, J., Savić, A., Maksimović, Z. (2021) *Some new general lower bounds for mixed metric dimension of graphs.* FILOMAT, Vol 35, pp. 4275–4285.

[MD21] Milivojević Danas, M. (2021) *Mixed metric dimension of flower snarks and wheels.* Open Math., Vol 19, pp. 629–640.

[MD20] Milivojević Danas, M. (2020) *The difference between several metric dimension graph invariants*, arXiv preprint, https://arxiv.org/abs/2012.-07471.

[MDMKS20] Milivojević Danas, M., Maksimović, Z., Kratica, J., Savić, A. *Mixed metric dimension of complete split graphs*, $XLVII$ Simpozijum o operacionim istraživanjima, Kraljevo, 20.-23.09, 2020 Zbornik radova, 101–104.

7 Биографија аутора

Милица Миливојевић Данас је рођена 30. маја 1988. године у Крагујевцу. Завршила је основну школу Станислав Сремчевић 2003. године са одличним успехом и исте уписала Прву крагујевачку гимназију. Прву крагујевачку гимназију је завршила са одличним успехом и током гимназијског школовања учествовала на такмичењима из математике и биологије. Природно-математички факултет у Крагујевцу уписала је школске 2007/08 године, на којем је завршила основне академске студије са просечном оценом 9,23. Мастер студије на Природно-математичком факултету, смер теоријска математика, уписала је школске 2010/11 године и положила је испите предвиђене програмом ових студија са просечном оценом 9,75. Мастер рад под називом "m-димензионалне многострукости" одбранила је 29. августа 2012. године на Природно-математичком факултету у Крагујевцу, са оценом 10, под руководством проф. др Мирославе Петровић-Торгашев.

Докторске академске студије је уписала на студијском програму Математика, такође на Природно-математичком факултету у Крагујевцу школске 2012/2013. године. Положила је све предмете предвиђене програмом докторских студија и Статутом Факултета.

Радила је као истраживач приправник на Институту за математику и информатику ПМФ-а у Крагујевцу, за научну област Математика, од 2012. године. У звање асистента за ужу научну област Математичка анализа са применама изабрана је 02.10.2014. године у Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу.

Додатно је била ангажована (до 30 посто радног времена) на Економском факултету у Крагујевцу (2017–2018) и у Првој крагујевачкој гимназији (2012–2013).

Током свог досадашњег научно-истраживачког рада, објавила је 4 научна рада у часописима са SCI листе, од којих су два настала из ове докторске дисертације.Такође, напоменимо да има још један рад настао из ове дисертације, а који је у поступку рецензије.

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, илица иливојеви анас, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

ешовита метричка димензија графова

која је одбрањена на рииродно математичком факултету Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Крагујевцу, 24.1.2022. године,

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Милица иливојеви анас ____________________,

- ☑ дозвољавам
- ☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

ешовита метричка димензија графова

која је одбрањена на ______________________________ Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

- ☑ дозвољавам
- ☐ не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 24.1.2022. године,

М. Миловановић Јовић

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/