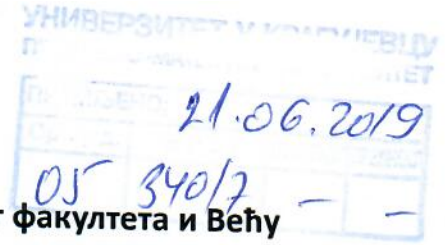


Извештај је сагласан.  
Крајина Миливојевић



**Наставно-научном већу Природно-математичког факултета и Већу  
за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу**

На седници Наставно-научног већа Природно-математичког факултета у Крагујевцу одржаној 24.04.2019. године (број одлуке 230/XII-1) и на седници Већа за природно-математичке науке одржаној 15.05.2019. године (број одлуке IV-01-388/12) одређени смо за чланове Комисије за подношење извештаја о оцени научне заснованости и испуњености услова кандидата Раде Мутавџић за израду докторске дисертације „Оцена грешке у стандардним квадратурама и квадратурама за Фуријеове коефицијенте Гаусовог типа“. На основу приложене документације Комисија подноси следећи

**Извештај о оцени научне заснованости теме и испуњености услова кандидата за израду докторске дисертације**

**1. Научни приступ проблему предложеног нацрта докторске дисертације и процена научног доприноса крајњег исхода рада**

Нумеричка анализа, још општије нумеричка математика, се развијала у оквирима класичне математике, као у радовима Њутна, Лагранжеа, Ојлера и других, кад год би се неки проблем решавао приближно. У наше време она се издвојила у посебну грану математике. Приближна израчунавања воде ка тачним када се грешка смањује, чему све више доприноси интезиван развој рачунарске технике која је постала средство у решавању задатака нумеричке математике. Посебан део нумеричке анализе је нумеричка интеграција којој припада тема ове докторске дисертације кандидата Раде Мутавџић. Формуле за приближна израчунавања одређених интеграла су квадратурне формуле, а међу њима оне најефикасније, са максимално могућим степеном прецизности су Гаусове квадратурне формуле, скраћено квадратуре. У последња два, три века оне се интезивно истражују. 1969. године је објављен метод за њихову ефикасну и нумерички стабилну конструкцију у раду Голуба и Велша (Mathematics of Computation). За практичну оцену грешке Гаусових квадратурних формула показало се да су од посебног значаја формуле које је увео шездесетих година прошлог века руски инжењер и математичар Кронрод, касније назване Гаус-Кронродовим квадратурним формулама. Овим формулама посвећена су многа истраживања у последњих 50-60 година. За те формуле које имају позитивне тежинске коефицијенте и реалне чворове конструисане су стабилне нумеричке процедуре, тако да је од посебног значаја питање егзистенције позитивних Гаус-Кронродових квадратура. Још раније је показано да у случају неограничених интервала и класичних тежинских функција такве формуле не постоје. У последње време је неегзистенција доказана и у случајевима интервала коначне дужине од стране аустријског математичара Персторфера и његових сарадника. Тако се јавља потреба за конструкцијом алтернатива Гаус-Кронродових квадратурних формула. Једна таква алтернатива је предложена у виду усредњених квадратурних формула Гаусовог типа, које су уведене у радовима Лорија и Спалевића, објављеним у часопису АМД-а Mathematics of Computation. Посебно су од интереса са становишта једноставне нумеричке конструкције усредњене квадратуре које је увео Спалевић (Mathematics of Computation, 2007), јер захтевају готово исти нумерички напор за конструкцију као и стандардне Гаусове квадратурне формуле. Кандидат Рада Мутавџић планира у својој дисертацији испитивање усредњених и скраћених усредњених

квадратурних формула, њихово коришћење за практичну оцену грешке стандардних Гаусових квадратура. Како је примена ових (као и других) квадратурних формула немогућа у случају не мале класе подинтегралних функција које нису дефинисане ван интервала интеграције, ако квадратурна формула има чворова који не припадају интервалу интеграције, значајно питање којим ће се у дисертацији бавити кандидат Рада Мутавџић је питање унутрашњости (интерналности) скраћених усредњених гаусовских квадратура. Истраживање је базирано како на класичним знањима математике, тако на савременим методама теорије апроксимација, нумеричке анализе, нумеричке интеграције, посебно теорије усредњених квадратура која се развија у последњем периоду. У једном сегменту свог истраживања и рада кандидат Рада Мутавџић ће истраживати оцене грешака у Гаус-Лобатовим квадратурама са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама када је интегранд функција аналитичка унутар области која је ограничена конфокалним елипсама, док је одговарајућа проблематика када је интегранд функција аналитичка на круговима решен раније у раду грчког математичара Нотариса који је објављен у Springer-овом часопису *Numerische Mathematik*. Такође ће кандидат ову врсту оцена покушати да изведе и за Кронродове екстензије за уопштене Мичели-Ривлинове квадратурне формуле за изарачунавање Фуријеових коефицијената аналитичке функције. Процена крајњег исхода истраживања и рада на овој дисертацији је да ће се добити ефикасне оцене грешке Гаусових квадратурних формула за широку класу мера коришћењем усредњених и од њих скраћених гаусовских квадратурних формула, и ефикасне оцене грешке Гаус-Лобатових квадратура.

## **2. Образложење предмета, метода и циља који уверљиво упућују да је предложена тема од значаја за развој науке**

Предмет рада је оцена грешке у Гаус-Лобатовим квадратурним формулама са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама и Кронродовим екстензијама за уопштене Мичели-Ривлинове формуле за рачунање Фуријеових коефицијента, када је подинтегрална функција аналитичка у унутрашњости конфокалних елипси које садрже интервал интеграције. Практичне оцене грешака Гаусових квадратурних формула за неке класе тежинских функција на интервалу  $[0,1]$ , израчунавањем модула разлике ових квадратура и усредњених квадратура Гаусовог типа или Гаус-Кронродових квадратурних формула, чине један мањи део планираног истраживања. Немачки математичар Карл Фридрих Гаус је 1814. године увео интерполациону квадратурну формулу за приближну интеграцију са максималним степеном тачности, користећи резултате свог рада из 1812. године о хипергеометријским развојима. Та квадратурна формула је касније добила назив Гаусова квадратурна формула и заузела централно место у нумеричкој интеграцији. Развијана је у разним правцима и истраживана са разних аспеката математике (теорије апроксимација, теорије мере, функционалне анализе, итд.) и нумеричке конструкције. Проблематика истраживања Гаусових квадратурних формула је веома актуелна и данас. Стабилан нумерички метод за конструкцију Гаусових квадратурних формула предложили су 1969. године математичари Голуб и Велш. Њихов рад је публикован у познатом часопису *AMД-а Mathematics of Computation*. С друге стране, веома интересантан проблем је оцена остатака у Гаусовим квадратурним формулама. Једну врло занимљиву методу предложио је 1964. године руски математичар и инжењер Кронрод, уводећи касније назване Гаус-Кронродове квадратурне формуле. Тако је настала теорија Гаус-Кронродових квадратурних формула, које су често називане квадратурним формулама 20. века. Проблематиком оцене остатака стандардних Гаусових квадратурних формула за аналитичке функције на конфокалним елипсама бавили су се поред страних, Гаучи, Варга, Хантер, Шира, и др., и наши

математичари Миловановић, Спалевић, Пранић, Пејчев, Ђукић, и др. Посматрајући квадратурне формуле за рачунање Фуријеових коефицијената, Мичели и Ривлин су 1972. години открили квадратурну формулу са максималним степеном тачности за рачунање Фуријеових коефицијента у односу на систем Чебишовљевих полинома прве врсте, када је фиксиран број израчунавања вредности функције или њених првих извода. Општији случај квадратурних формула са вишеструким чворовима, које укључују вредности виших извода функције, за рачунање Фуријеових коефицијената је посматран у раду Миловановића, Оривеа и Спалевића, који је објављен 2019. године у познатом часопису за нумеричку анализу IMA Journal of Numerical Analysis (Oxford University Press). Резултати овог рада су базирани на резултатима претходног рада Миловановића и Спалевића који је објављен 2014. године у часопису АМД-а Mathematics of Computation. Ту су уведене и уопштене Мичели-Ривлинове формуле, чије су оцене остатака за аналитичке функције на конфокалим елипсама размотрили Спалевић и Пејчев у раду који је прихваћен за штампу 2018. године у часопису Science China Mathematics.

**Циљ** овог рада и истраживања је да се добију ригорозне оцене грешке у Гаус-Лобатовим квадратурним формулама са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама и Кронродовим екстензијама за уопштене Мичели-Ривлинове формуле када је интегранд аналитичка функција на конфокалним елипсама. Добијене оцене биће упоређене са стварном грешком, али и са оценама које је за интегранде аналитичке на круговима који садрже интервал интеграције добио грчки математичар Нотарис. Практичне оцене грешке Гаусових квадратурних формула, коришћењем усредњених гаусовских квадратурних формула и њихових скраћених варијанти су такође циљ истраживања ове дисертације.

**Основне хипотезе** од којих се полази у истраживању базиране су на томе да се остатак квадратурних формула за аналитичке функције може представити као контурни интеграл са комплексним језгром. Тада се оцена остатака квадратурних формула своди на процену модула тог језгра. Ако се за контуре изабере конфокалне елипсе, максимум модула језгра ће се достићи у тачкама пресека координатних оса са елипсама, што ће нам дати могућност једноставног одређивања максимума модула и формула за оцену грешке. Полази се и од Кронродових идеја, које су касније разрађиване, да се добију практичне оцене грешке у Гаусовим квадратурама за неке класе тежинских функција које је недавно разматрао проф. Миловановић.

У истраживању ће се користити разне **математичке методе истраживања**, специјално методе математичке анализе, комплексне анализе и нумеричке анализе, те још специјалније методе нумеричке интеграције и теорије апроксимација. Оне ће делом бити имплементиране и њихова ефикасност ће бити експериментално проверена у програмском пакету МАТЛАБ. Користе се познате формуле за коефицијенте у трочланим рекурентним релацијама за одговарајуће ортогоналне полиноме. За процену остатка квадратурних формула за аналитичке функције користе се три методе: 1) Метода коју су за Гаусове квадратурне формуле са класичним Чебишовљевим тежинским функцијама увели Гаучи и Варга у раду публикованом у часопису SIAM Journal on Numerical Analysis, 1983. године; 2) Примена Коши-Шварцове неједнакости; 3) Оцењивање остатка након развијања у ред. Овом тематиком се под нешто другачијим претпоставкама, на контурама у облику кружница, бавио грчки математичар С. Нотарис.

### **3. Образложење теме за израду докторске дисертације које омогућава закључак да је у питању оригинална идеја или оригиналан начин анализирања проблема**

Уопштене и скраћене усредњене гаусовске квадратурне формуле су недавно уведене у математичку литературу. Усредњене гаусовске квадратуре се истражују у последњих двадесет, тридесет година, оне су од практичног значаја јер се користе за оцену грешке у Гаусовим квадратурним формулама. Скраћене усредњене квадратуре су нове формуле, посебно се третирање њихове унутрашњости јавља први пут у недавним истраживањима проф. Спалевића и његових сарадника. За Гаус-Лобатове квадратурне формуле са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама а за аналитичке интегранде на конфокалним елипсама по први пут се истражују оцене грешке у овој дисертацији. Коначно, постоји у литератури само пар радова о квадратурама за Фуријеове коефицијенте, на чему интезивније у последње време ради ова истраживачка група. Комисија закључује да је предложена тема „Оцена грешке у стандардним квадратурама и квадратурама за Фуријеове коефицијенте Гаусовог типа“ кандидата Раде Мутавџић оригинална.

### **4. Усклађеност дефиниције предмета истраживања, основних појмова, предложене хипотезе, извора података, метода анализе са критеријумима науке уз поштовање научних принципа у изради коначне верзије докторске дисертације**

Кандидат Рада Мутавџић ће у изради коначне верзије докторске дисертације обухватити све елементе савременог научно-истраживачког рада поштујући основне критеријуме математичке науке и научних принципа. Усклађеност свих сегмената истраживања, па и овог истраживања, у оквиру математике као егзактне науке се подразумева, јер само на тај начин истраживање ће водити ка валидним научним резултатима. Добијени резултати ће бити верификовани у познатим научним часописима за нумеричку и примењене математике, као и изложени на неколико научних скупова.

### **5. Предложени коментори израде докторске дисертације**

Институт за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Карагујевцу је за коменторе ове дисертације предложио проф. др Миодрага Спалевића, редовног професора Машинског факултета Универзитета у Београду и проф. др Александра Пејчева, ванредног професора Машинског факултета Универзитета у Београду. Проф. др Миодраг Спалевић се бави истраживањима у научној области нумеричка анализа, посебно у њеном делу нумеричка интеграција, има публиковане радове у реномираним научним часописима и већи број саопштења на међународним и националним конференцијама. Проф. др Александар Пејчев, близак научни сарадник проф. Спалевића, се бави истраживањима у научној области нумеричка анализа, посебно у њеном делу нумеричка интеграција, има публиковане радове у реномираним научним часописима и већи број саопштења на међународним и националним конференцијама. Проф. Спалевић ће се бавити координацијом рада са кандидаткињом, давањем истраживачких идеја и праћењем статуса и квалитета урађеног истраживања; проф. Пејчев ће бити више укључен ка усмеравању кандидаткиње у методе истраживања ове проблематике, пошто је и сам у претходном периоду учествовао у њиховој анализи и разради неких претходних случајева.

**Саопштења на међународним скуповима штампана у изводу (М34):**

[1] **Rada M. Mutavdžić**, Aleksandar V. Pejčev, Error bounds for Kronrod extension of generalizations of Micchelli-Rivlin quadrature formula for analytic functions, Approximation and computation – theory and applications Belgrade, Serbia, November 30 – December 2, 2017, p. 37.

[2] **Rada M. Mutavdžić**, Aleksandar V. Pejčev, Miodrag M. Spalević, Error bounds for Kronrod extension of generalizations of Micchelli-Rivlin quadrature formula for analytic functions, The 14th Serbian Mathematical Congress, Kragujevac, Serbia, May 16 – 19, 2018, p. 169, ISBN 978-86-6009-055-5.

[3] **R. M. Mutavdžić**, A. V. Pejčev, M. M. Spalević, The error bounds of Gauss-Lobatto quadratures for weights of Bernstein-Szego type, The Mediterranean International Conference of Pure&Applied Mathematics and Related Areas, Antalya, Turkey, October 26 – 29, 2018

## ЗАКЉУЧАК

Кандидат Рада Мутавцић је студент докторских академских студија математике на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу. У досадашњем раду је показала изузетно интересовање за научно-истраживачки рад и изузетно висок степен одговорности и способности решавања постављених јој научних задатака, висок степен самосталности у решавању истих.

Досадашњи резултати научно-истраживачког рада кандидата везани за предложену тему докторске дисертације објављени су у једном раду категорије M22 (рад [1] у часописима међународног значаја, из библиографије кандидата), један рад се налази у фази оцене у часопису *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, категорије M22, а један рад са проф. Спалевићем је у завршној фази и биће послат неком часопису са SCI листе на процену овог лета, што Раду Мутавцић препоручује као кандидата способног да одговори на планиране задатке. Рада Мутавцић је своје резултате до сада саопштила на 2 међународне конференције и Конгресу математичара Србије.

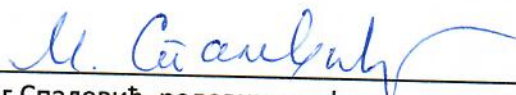
На основу анализе предложеног плана и програма истраживања, избора методологије и очекиваних резултата истраживања, Комисија сматра да предложена тема за докторску дисертацију Раде Мутавцић јесте актуелна и веома важна. Планирано је истраживање скраћених усредњених Гаусовских квадратурних формула и њихове интерналности, како би се омогућила њихова примена за класе интеграла који су дефинисани на интервалу интеграције  $[0,1]$ , за неке недавно уведене тежинске функције. Тако ће бити омогућена оцена остатка у одговарајућим стандардним Гаусовим квадратурним формулама. За Гаус-Лобатове квадратурне формуле са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама које се примењују на интегранде аналитичке у области конфокалних елипси које садрже интервал интеграције биће предложене ефикасне оцене грешака. Слична тематика је планирана за квадратуре са вишеструким чворовима за Фуријеове коефицијенте. Сви теоријски резултати биће подржани нумеричким резултатима, добијеним у великом броју експеримената. Добијени резултати ће бити од користи у многим гранама науке и технике где се користе Гаусове и њима сродне квадратуре, за чију оцену грешке се могу користити методе које се изучавају у овој дисертацији.

Комисија је мишљења да кандидат Рада Мутавцић испуњава све услове који су неопходни за пријаву теме за израду докторске дисертације и да ће успешно реализовати сва планирана истраживања. **За коменторе докторске дисертације предлагемо проф. др Миодрага Спалевића и проф. др Александра Пејчева.**

Коначно, Комисија са задовољством предлаже Научно-наставном већу Природно-математичког факултета у Крагујевцу и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу да позитивно оцене подобност кандидата **Раде Мутавцић** и научну заснованост теме њене докторске дисертације и одобре јој израду докторске дисертације под називом **„Оцена грешке у стандардним квадратурама и квадратурама за Фуријеове коефицијенте Гаусовог типа“.**

У Београду и Крагујевцу

Комисија:



---

Др Миодраг Спалевић, редовни професор, коментор  
Машински факултет, Универзитет у Београду  
Ужа научна област: Математика и рачунарство



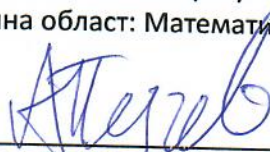
---

Др Марија Станић, редовни професор, **председник комисије**  
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу  
Ужа научна област: Математичка анализа са применама



---

Др Дејан Бојовић, ванредни професор  
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу  
Ужа научна област: Математичка анализа са применама



---

Др Александар Пејчев, ванредни професор, коментор  
Машински факултет, Универзитет у Београду  
Ужа научна област: Математика и рачунарство



---

Др Татјана Томовић, доцент  
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу  
Ужа научна област: Математичка анализа са применама