УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Братислав Средојевић

Нумеричка апроксимација дводимензионалних параболичких проблема са делта функцијом

докторска дисертација

КРАГУЈЕВАЦ, 2016

ИНДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I Аутор

Име и презиме: Братислав В. Средојевић
Датум и место рођења: 30.03.1984., Горњи Милановац

II Докторска дисертација

Наслов: Нумеричка апроксимација дводимензионалних параболичких проблема са делта функцијом
Број страна: 86
Установа и место где је рад урађен: Природно-математички факултет Крагујевац

Научна област (УДК): Математика 51
Ментор:др Дејан Бојовић, ванредни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу

III Оцена и одбрана

Датум пријаве теме: 10.05.2013. године
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:
-Одлука Наставно-научног већа ПМФ-а у Крагујевцу, број ________, од ________год.

Комисија за оцену подобности теме и кандидата:
-Одлука Наставно-научног већа ПМФ-а у Крагујевцу, број. 370/XII-3, од 29.05.2013. год.
-Одлука Стручног већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу, број 334/5, од 12.06.2013. године

1. др Бошко Јовановић, редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду
2. др Миодраг Спалевић, редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду
3. др Дејан Бојовић, ванредни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу
4. др Марија Станић, ванредни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:
-Одлука Наставно-научног већа ПМФ-а у Крагујевцу, број 470/XIV-1, од 11.05.2016. године.
-Одлука Већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу, бр. ________ од 15.06.2016. године.

1. др Миодраг Спалевић, редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду
2. др Бранислав Поповић, ванредни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу
3. др Марија Станић, ванредни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу

Датум одбране докторске дисертације: ___________________. године.

Сажетак

Гранични проблеми за парцијалне диференцијалне једначине представљају математичке моделе најразноврснијих појава, као на пример провођења топлоте, механике флуида, процеса атомске физике итд. Само у ретким случајевима ови задаци се могу решити класичним методама математичке анализе, док се у свим осталим мора прибегавати приближним методама. Метода коначних разлика је један од најчешће примењиваних метода за нумеричко решавање граничних проблема за парцијалне диференцијалне једначине. У оквиру методе коначних разлика, један од главних проблема је доказивање конвергенције диференцијских схема које апроксимирају граничне проблеме. Од посебног интереса су оцене брзине конвергенције сагласне са глаткошћу коефицијената и решења почетног проблема.

Приликом нумеричке апроксимације почетно-граничних параболичких проблема са генералисаним решењима јављају се и неки додатни проблеми: коефицијенти нису непрекидне функције, промењљиви коефицијенти могу бити и временски зависни, коефицијенти и решење припадају нестандардним анизотропним просторима Собољева итд. Ова дисертација се управо бави тим проблемима.

У дисертацији је разматран дводимензионални почетно-гранични параболички проблем с концентрисаним капацитетом, тј. проблем који садржи Дираков делта функцију као коефицијент уз извод по времену. Додатна потешкоћа у случају граничних проблема са делта функцијом као коефицијентом, је да решења проблема не припадају стандардним просторима Собољева. У раду су доказане априорне оцене у одговарајућим нестандардним нормама. Уз претпоставку да коефицијенти припадају анизотропним просторима Собољева, конструисане су диференцијске схеме с усредњеном десном страном. Доказане су оцене брзине конвергенције у дискретним $\widetilde{W}_2^{2,1}$ и $\widetilde{W}_2^{1,1/2}$ нормама. Добијене су оцене брзине конвергенције целобројног реда сагласне са глаткошћу коефицијената и решења почетног проблема.

Summary

Boundary problems for partial differential equations represent mathematical models of the most diverse phenomena, such as heat transfer, fluid mechanics, atomic physics, etc. Only in rare cases, these tasks can be solved by classical methods of mathematical analysis, while in all other must be resort to approximate methods. Finite-difference method is one of the most commonly used methods for the numerical solution of boundary value problems for partial differential equations. In the context of finite-difference method, one of the main problems is proving convergence of difference schemes which approximating boundary problems. Of particular interest are the estimates of the rate of convergence compatible with the smoothness of the coefficients and solution.

When numerical approximations parabolic initial-boundary problems with generalized solutions, there are also some additional problems: the coefficients are not continuous functions, variable coefficients can be time-dependent coefficients and the solution belong to nonstandard anisotropic Sobolev spaces, etc. This dissertation is concerned with precisely these problems.

The dissertation is considered a two-dimensional parabolic initial-boundary problem with concentrated capacity, that problem contains Dirac delta function as the coefficient of the derivative by time. A further problem, in the case boundary problems with delta function as the coefficient, is that solution not in standard Sobolev spaces. The paper demonstrated a priori estimates of the corresponding non-standard norms. Assuming that the coefficients belong to anisotropic Sobolev spaces have been constructed the difference schemes with averaged right-hand side. The estimates of the rate of convergence in the special discrete $\widetilde{W}_2^{2,\,1}$ and $\widetilde{W}_2^{1,\,1/2}$ norms, is proved. The estimates of the rate of convergence compatible with the smoothness of the coefficients and solution, are obtained.

ЗАХВАЛНИЦА

Ова дисертација је рађена на Природно-математичком факултету, при Институту за математику и информатику у Крагујевцу под менторством проф. др Дејана Бојовића.

Изражавам посебну захвалност проф. др Дејану Бојовићу на помоћи у току рада на овој дисертацији. Захваљујем се др Бошку Јовановићу на сарадњи и сугестијама а такође и члановима комисије др Миодрагу Спалевићу, др Браниславу Поповићу и др Марији Станић на непроцењивој помоћи пруженој приликом израде ове дисертације.

Највећу захвалност дугујем својим родитељима и брату на несебичној помоћи и неизмерном стрпљењу и мотивацији.

Садржај

Увод

Метода коначних разлика је једна од најзначајнијих метода за приближно решавање парцијалних диференцијалних једначина. Један од проблема који се јавља при коришћењу ове методе је и проблем конструкције конвергентних диференцијских схема. У оквиру тог проблема од интереса је успостављање везе између глаткости улазних података и брзине конвергенције диференцијских схема.

У случају линеарних парцијалних једначина другог реда параболичког типа изграђена је комплетна теорија егзистенције и јединствености решења основних почетно-граничних проблема у анизотропним просторима Собољева $W_2^{s,s/2}$. Зато можемо за оцену брзине конвергенције користити диференцијске аналоге оваквих норми.

Нека је $u = u(x,t)$ решење почетно-граничног проблема и v решење одговарајуће диференцијске схеме. За оцену брзине конвергенције параболичке диференцијске схеме облика (в.[16]):

$$\|u-v\|_{W_2^{k,k/2}(Q_{h\tau})} \leq C(h+\sqrt{\tau})^{s-k}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad s>k, \tag{1}$$

где је h корак по просторним промењљивим,а τ корак по временској промењљивој, рећи ћемо да је сагласна са глаткошћу решења полазног почетно-граничног проблема. Ако кораци h и τ задовољавају природну релацију:

$$k_1h^2 \leq \tau \leq k_2h^2, \quad k_1,k_2 = const > 0$$

оцена (1) се своди на облик:

$$\|u-v\|_{W_2^{k,k/2}(Q_{h\tau})} \leq Ch^{s-k}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad s>k. \tag{2}$$

У случају једначина са промењљивим коефицијентима константа C зависи од норми коефицијената (в.[38]). Ако коефицијенти не зависе од t, добијамо оцене облика:

$$\|u-v\|_{W_2^{k,k/2}(Q_{h\tau})} \leq Ch^{s-k}\max_{i,j}\|a_{ij}\|_{W_p^{s-1}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad s>k. \tag{3}$$

У случају да коефицијенти зависе и од t, што је посебно разматрано, имамо оцене облика:

$$(4) \quad \|u-v\|_{W_2^{k,k/2}(Q_{h\tau})} \leq Ch^{s-k} \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_p^{s-1,(s-1)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad s>k.$$

Техника извођења ових оцена заснована је на леми Брамбла-Хилберта и њеним генерализацијама.

Једна од интересантнијих класа почетно-граничних проблема су и проблеми са концентрисаним капацитетом, тј. проблеми који садрже Диракову делта функцију као коефицијент уз извод по времену (в.[12],[26],[32]). У једнодимензионом случају такви проблеми су разматрани у радовима Јовановића, Вулкова, Бојовића [5],[6],[19],[22],[23],[26]. Дводимензиони проблеми разматрани су у радовима [24] и [7]. Циљ ове дисертације је наставак и проширење истраживања започетих у радовима [24] и [7].

Прва глава садржи основне појмове и тврђења потребне за разматрање почетно-граничних проблема с генералисаним решењима. Дефинисани су стандардни (изотропни) и анизотропни простори Собољева и затим наведене одговарајуће теореме потапања у овим просторима. Дата је лема Брамбла-Хилберта са генерализацијама, неопходна за оцењивање функционала у просторима Собољева. Разматран је апстрактни Кошијев проблем и доказане су априорне оцене у одговарајућим нормама.

У другој глави дати су елементи теорије диференцијских схема. Дефинисане су коначне разлике, диференцијске схеме и проблеми стабилности и конвергенције диференцијских схема. Даље, дати су Стекловљеви оператори усредњења неопходни за рад у случају када улазни подаци нису непрекидне функције. Разматран је и и апстрактан операторско-диференцијски проблем и доказане одговарајуће априорне оцене.

Оригинални резултати дисертације дати су у трећој и четвртој глави (в.[8], [45], [46]).

У трећој глави је разматран дводимензионални параболички проблем са концентрисаним капацитетом и променљивим коефицијентима. Као увод у истраживање, у поглављу 3.1 разматрана је једначина са мешовитим изводима и променљивим (али не и временски зависним) коефицијентима (в.[7]). Детаљно су доказане све оцене функционала. У поглављу 3.2 разматран је проблем са променљивим временски зависним коефицијентима. Уз претпоставку да коефицијенти припадају анизотропним просторима Собољева, доказана је оцена брзине конвергенције диференцијске схеме у простору $\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})$ сагласна са глаткошћу коефицијената и решењем почетног проблема (в.[8]).

У четвртој глави је такође разматран дводимензионални параболички проблем са концентрисаним капацитетом и временски зависним коефицијентима, али уз претпоставку да коефицијенти и решење припадају просторима мање глаткости него у претходном случају. Доказана је оцена брзине конвергенције диференцијске схеме у простору $\widetilde{W}_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})$ сагласна са глаткошћу коефицијената и решењем почетног проблема (в. [45]).

1 Математички апарат

Прва глава садржи основне појмове и тврђења потребне за разматрање почетно-граничних проблема с генералисаним решењима. Дефинисани су простори Собољева, анизотропни простори Собољева и наведене одговарајуће теореме потапања у овим просторима. Дата је лема Брамбла-Хилберта са генерализацијама, неопходна за оцењивање функционала у просторима Собољева. Разматран је апстрактни Кошијев проблем и доказане су априорне оцене у одговарајућим нормама.

1.1 Простори Собољева

Уведимо најпре појмове и ознаке које ћемо користити у даљем раду. Отворен и повезан скуп $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ називамо облашћу. Нека је $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Носачем функције f, у ознаци $\mathrm{supp} f$, називаћемо затворење скупа тачака у којима је $f(x) = 0$. Парцијалне изводе означаваћемо на следећи начин:

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

где је $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

Користићемо следеће функционалне просторе:

- $C^m(\Omega)$ =простор функција непрекидних у Ω, заједно са свим парцијалним изводима реда $\leq m (m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$,
- $C(\Omega) = C^0(\Omega)$,
- $C_0^m(\Omega)$ = потпростор $C^m(\Omega)$ који чине функције с компактним носачем у Ω,

- $C^m(\overline{\Omega})$ = простор функција непрекидних на $\overline{\Omega}$ заједно са свим парцијалним изводима реда $\leq m$ са нормом:

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|,$$

- $L_p(\Omega)$ = Лебегов простор мерљивих функција на Ω, за које је:

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

  односно,

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{supess}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty.$$

- $L_{p,loc}(\Omega)$ = простор локално интеграбилних функција:
  Функција $f(x) \in L_{p,loc}(\Omega)$ ако $f(x) \in L_p(\Omega')$ за сваку ограничену подобласт $\Omega' \Subset \Omega$.

За хиперповрш $S \subset \mathbb{R}^n$ димензије $n-1$ кажемо да је класе C^m, у ознаци $S \in C^m$, ако се у околини сваке тачке $x_0 \in S$ може представити једначином:

$$\varphi_{x_0}(x) = 0,$$

при чему $\varphi_{x_0} \in C^m$. За хиперповрш S кажемо да је непрекидна по Липшицу ако се може поделити на коначно много делова S_j од којих се сваки може представити једначином облика:

$$x_{i_j} = \psi_j(x_1, \ldots, x_{i_j-1}, x_{i_j+1}, \ldots, x_n),$$

при чему је функција ψ_j непрекидна по Липшицу. За област Ω кажемо да је Липшицова ако јој је граница непрекидна по Липшицу.

У скупу функција $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ дефинишемо конвергенцију на следећи начин.

Дефиниција 1.1. *За низ функција $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ кажемо да конвергира ка функцији $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ако су испуњени следећи услови:*

1. *Постоји компактан скуп $K \subset \mathbb{R}^n$ такав да скуп $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$ за свако j,*

2. *За сваки мултииндекс α, низ $D^\alpha\varphi_j$ униформно конвергира ка $D^\alpha\varphi$ на K, кад $j \to \infty$.*

Простор $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ снабдевен овом топологијом називаћемо простором основних функција и означавати са $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ако је Ω област у $\mathbb{R}^n$ са

$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ означаваћемо скуп основних функција чији су носачи у Ω. Линеарне непрекидне функционале на скупу $\mathcal{D}(\Omega)$ називаћемо дистрибуцијама, а њихов скуп означаваћемо са $\mathcal{D}'(\Omega)$ (в.[42]). Вредност дистрибуције $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ на основној функцији $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ означавамо са:

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Ако је $f(x) \in L_{1,\,loc}(\mathbb{R}^n)$ тада је са:

$$\varphi(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

дефинисан један линеаран ограничен функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Другим речима, свака локално интеграбилна функција индукује једну дистрибуцију. Овакве дистрибуције називамо регуларним. Сваку регуларну дистрибуцију изједначаваћемо с локално интеграбилном функцијом која је индукује и писати:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Множење дистрибуције $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ глатком функцијом $a \in C^\infty(\Omega)$ дефинише се на следећи начин:

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Диференцирање дистрибуције $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ дефинише се на следећи начин:

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Приметимо да је свака дистрибуција бесконачно пута диференцијабилна. Уведимо сада простор Собољева (в.[1]). Нека је $k \in \mathbb{N}_0$ и $1 \le p \le \infty$. Простор Собољева $W_p^k(\Omega)$ дефинише се на следећи начин:

$$W_p^k(\Omega) = \{f \in L_p(\Omega) : D^\alpha f \in L_p(\Omega),\, |\alpha| \le k\}.$$

При томе се изводи схватају у смислу дистрибуција. Специјално, за $k = 0$, означаваћемо:

$$W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega).$$

Норма у $W_p^k(\Omega)$ уводи се на следећи начин:

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^{k} |f|^p_{W_p^i(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

где је:

$$|f|^p_{W^i_p(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=i} \|D^\alpha f\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

односно:

$$\|f\|_{W^k_\infty(\Omega)} = \max_{0\le i\le k} |f|_{W^i_\infty(\Omega)},$$

где је:

$$|f|_{W^i_\infty(\Omega)} = \max_{|\alpha|=i} \|D^\alpha f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Простор $W^k_p(\Omega)$ је Банахов простор. Специјално, $W^k_2(\Omega)$ је Хилбертов простор са скаларним производом:

$$(f,g)_{W^k_2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha f(x) D^\alpha g(x)\mathrm{d}x.$$

За $0<\sigma<1$ означимо:

$$|f|_{W^\sigma_p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1\le p<\infty,$$

односно:

$$|f|_{W^\sigma_\infty(\Omega)} = \operatorname*{supess}_{x\in\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\sigma}.$$

Простор Собољева $W^s_p(\Omega)$ с разломљеним позитивним индексом $s=[s]+\sigma$, $0<\sigma<1$, дефинише се као скуп функција из $W^{[s]}_p(\Omega)$, за које је коначна норма:

$$\|f\|_{W^s_p(\Omega)} = \left(\|f\|^p_{W^{[s]}_p(\Omega)} + |f|^p_{W^s_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1\le p<\infty,$$

где је:

$$|f|_{W^s_p(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=[s]} |D^\alpha f|^p_{W^{s-[s]}_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

односно:

$$\|f\|_{W^s_\infty(\Omega)} = \|f\|_{W^{[s]}_\infty(\Omega)} + |f|_{W^s_\infty(\Omega)},$$

где је:

$$|f|_{W^s_\infty(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=[s]} |D^\alpha f|_{W^{s-[s]}_\infty(\Omega)}.$$

Затворење скупа $\mathcal{D}(\Omega)$ у норми простора $W^s_p(\Omega)$ представља потпростор $W^s_p(\Omega)$ који ћемо означавати са $\dot{W}^s_p(\Omega)$.

У теорији простора Собољева фундаменталну улогу имају теореме потапања (в.[1],[3],[34],[47]).

Теорема 1.1. *Нека је* $f \in W_p^s(\Omega)$, $s > 0$ *и нека је граница области* Ω *непрекидна по Липшицу. Тада важе следећа потапања:*

а) *ако је* $sp < n$ *тада*

$$W_p^s(\Omega) \subseteq L_q(\Omega), \quad p \leq q \leq \frac{np}{n - sp},$$

б) *ако је* $sp = n$ *тада*

$$W_p^s(\Omega) \subseteq L_q(\Omega), \quad p \leq q < \infty,$$

в) *ако је* $sp > n$ *тада*

$$W_p^s(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega}).$$

Теорема 1.2. *Нека је* $0 \leq t \leq s < \infty$ *и* $1 < p \leq q < \infty$ *и* $s - n/p \geq t - n/q$. *Тада важи:*

$$W_p^s(\Omega) \subseteq W_t^q(\Omega).$$

Теорема 1.3. *Нека* $f \in W_p^s(\Omega)$, $s > 1/p$, $s \neq$ *цео број* $+ 1/p$ *и нека је граница области* Ω *довољно глатка(* $\Gamma \in C^{[s]^- + 1}$*). Тада постоји траг функције* f *на граници* Γ *који припада простору* $W_p^{s-1/p}(\Gamma)$ *и важи оцена:*

$$\|f\|_{W_p^{s-1/p}(\Gamma)} \leq C\|f\|_{W_p^s(\Omega)}.$$

Такође нам је потребан следећи резултат (в.[35]):

Лема 1.1. *За* $f \in W_p^1(0,1)$, $p > 1$ *и* $\varepsilon \in (0,1)$ *важи следећа оцена:*

$$\|f\|_{L_p(0,\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{1/p}\|f\|_{W_p^1(0,1)}.$$

1.2 Анизотропни простори Собољева

Често се појављују функције које имају различиту глаткост по појединим променљивим, као у случају решења параболичког проблема. Простори таквих функција називају се анизотропним.

Нека је $\mathbb{R}_+$ скуп ненегативних реалних бројева. У овом одељку елементе скупа $\mathbb{R}_+^n$ називаћемо мултииндексима. За

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$$

означимо:

$$[\alpha] = ([\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_n])^T \text{ и } [\alpha]^- = ([\alpha_1]^-, [\alpha_2]^-, \dots, [\alpha_n]^-)^T$$

где је $[\alpha_i]$ = највећи цео број $\leq \alpha_i$ и $[\alpha_i]^-$ = највећи цео број $< \alpha_i$. Уведимо и коначне разлике:

$$\triangle_{i,h} f(x) = f(x + hr_i) - f(x), \quad h \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n,$$

где су $r_1, r_2, \dots, r_n$ јединични вектори координатних оса у $\mathbb{R}^n$.

Нека је Ω област у $\mathbb{R}^n$, с границом непрекидном по Липшицу. За $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$ и $1 \leq p < \infty$ уводимо полунорму $|f|_{\alpha,p}$ на следећи начин:

$$\begin{aligned}
|f|^p_{\alpha,p} &= \|f\|^p_{L_p(\Omega)}, \quad \text{за } \ \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,\\
|f|^p_{\alpha,p} &= \int_\Omega \int_{\Omega_i(x)} \frac{|\triangle_{i,,h_i} f(x)|^p}{|h_i|^{1+p\alpha_i}} \,\mathrm{d}h_i \,\mathrm{d}x, \quad \text{за } \ 0 < \alpha_i < 1,\ \alpha_k = 0,\ \forall k \neq i,\\
|f|^p_{\alpha,p} &= \int_\Omega \iint_{\Omega_{ij}(x)} \frac{|\triangle_{i,h_i} \triangle_{j,h_j} f(x)|^p}{|h_i|^{1+p\alpha_i} |h_j|^{1+p\alpha_j}} \,\mathrm{d}h_i \,\mathrm{d}h_j \,\mathrm{d}x,\\
&\quad \text{за } \ 0 < \alpha_i, \alpha_j < 1,\ \alpha_k = 0,\ \forall k \neq i, j,\\
\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
|f|^p_{\alpha,p} &= \int_\Omega \int \cdots \int_{\Omega_{1\ldots n}(x)} \frac{|\triangle_{1,h_1} \ldots \triangle_{n,h_n} f(x)|^p}{|h_1|^{1+p\alpha_1} \ldots |h_n|^{1+p\alpha_n}} \,\mathrm{d}h_1 \cdots \mathrm{d}h_n \,\mathrm{d}x,\\
&\quad \text{за } \ 0 < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n < 1,\\
|f|^p_{\alpha,p} &= |D^{[\alpha]} f|^p_{\alpha-[\alpha],p}, \quad \text{ако је неко } \ \alpha_k \geq 1.
\end{aligned}$$

Овде је означено:

$$\begin{aligned}
&\Omega_i(x) = \{h_i : \ x + h_i r_i \in \Omega\},\\
&\Omega_{ij}(x) = \{(h_i, h_j)^T : \ x + c_i h_i r_i + c_j h_j r_j \in \Omega,\ c_i, c_j = 0, 1\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Omega_{1\ldots n}(x) = \{(h_1, \dots, h_n)^T : \ x + \sum_{k=1}^{n} c_k h_k r_k \in \Omega,\ c_k = 0, 1\}.
\end{aligned}$$

За $p = \infty$ интеграли у дефиницији се замењују са supess:

$$\begin{aligned}
|f|_{\alpha,\infty} &= \|f\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad \text{за } \ \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,\\
|f|_{\alpha,\infty} &= \operatorname*{supess}_{x \in \Omega,\, h_i \in \Omega_i(x)} \frac{|\triangle_{i,h_i} f(x)|}{|h_i|^{\alpha_i}}, \quad \text{за } \ 0 < \alpha_i < 1,\ \alpha_k = 0,\ \forall k \neq i,
\end{aligned}$$

итд.

Коначан скуп мултииндекса $A \subset \mathbb{R}^n_+$ називаћемо регуларним ако важи:

$$0 = (0, 0, \dots, 0)^T \in A$$

и за свако

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T \in A$$

постоје реални бројеви $\beta_k \geq \alpha_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ такви да $\beta_k r_k \in A$.

Ако је A регуларан скуп мултииндекса уводимо норме:

$$\begin{aligned} \|f\|_{W_p^A(\Omega)} &= \left(\sum_{\alpha \in A} |f|_{\alpha, p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{W_\infty^A(\Omega)} &= \max_{\alpha \in A} |f|_{\alpha, \infty}. \end{aligned}$$

Затворење $C^\infty(\overline{\Omega})$ у норми $\| \cdot \|_{W_p^A(\Omega)}$ означаваћемо са $W_p^A(\Omega)$.

Нека је, даље, Ω област у $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{H}$ произвољан Хилбертов простор. Простори Собољева $W_p^s(\Omega, \mathcal{H})$ функција $f : \Omega \to \mathcal{H}$ дефинишу се аналогно са просторима $W_p^s(\Omega)$, при чему се апсолутна вредност замењује са нормом простора $\mathcal{H}$. Тако је:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(\Omega, \mathcal{H})} &= \left(\int\limits_\Omega \|f(x)\|_{\mathcal{H}}^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ |f|_{W_p^i(\Omega, \mathcal{H})} &= \left(\sum_{|\alpha| = i} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega, \mathcal{H})}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \\ |f|_{W_p^\sigma(\Omega, \mathcal{H})} &= \left(\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|_{L_p(\Omega, \mathcal{H})}^p}{|x - y|^{n + \sigma p}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < \sigma < 1, \text{ итд.} \end{aligned}$$

Нека је $Q = \Omega \times I$, где је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $I = (0, T) \subset \mathbb{R}$. Ако су s и r ненегативни реални бројеви, анизотропни простор Собољева $W_p^{s,r}(Q)$ дефинишемо на следећи начин (в.[21]):

$$W_p^{s,r}(Q) = L_p(I, W_p^s(\Omega)) \cap W_p^r(I, L_p(\Omega)),$$

при чему се норма уводи са:

$$\|f\|_{W_p^{s,r}(Q)} = \left(\int\limits_0^T \|f(t)\|_{W_p^s(\Omega)}^p \mathrm{d}t + \|f\|_{W_p^r(I, L_p(\Omega))}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

с одговарајућом изменом за $p = \infty$.

Простор $W_p^{s,r}(Q)$ се своди на простор облика $W_p^A(Q)$. На пример, ако $s \in \mathbb{N}_0$ тада је:

$$\begin{aligned} A = &\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0)^T : \alpha_i \in \mathbb{N}_0, \, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq s\} \\ &\cup \{(0, \ldots, 0, \beta)^T : \beta \in \mathbb{N}_0, \beta < r\} \cup \{(0, \ldots, 0, r)^T\}. \end{aligned}$$

У даљем раду користићемо простор

$$W_2^{s,\,s/2}(Q) = L_2(I, W_2^s(\Omega)) \cap W_2^{s/2}(I, L_2(\Omega)).$$

Код њега можемо издвојити најстарију полунорму стављајући:

$$|f|_{W_2^{s,\,s/2}(Q)} = \left(\int_0^T |f(\cdot,t)|^2_{W_2^s(\Omega)} \mathrm{d}t + |f|^2_{W_2^{s/2}(I,L_2(\Omega))} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Анизотропни простори такође задовољавају одређене теореме потапања. У даљем раду биће нам потребна следећа тврђења (в.[3], [31], [47]).

Теорема 1.4. *Нека $f \in W_2^{s,\,r}(Q)$, $s, r > 0$ и нека $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $k \in \mathbb{N}_0$ задовољавају услов $|\alpha|/s + k/r \le 1$. Тада*

$$D_x^\alpha D_t^k f \in W_2^{\mu,\,\nu}(Q),$$

где је

$$\frac{\mu}{s} = \frac{\nu}{r} = 1 - \left(\frac{|\alpha|}{s} + \frac{k}{r} \right),$$

D_x и D_t парцијални изводи по $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и t.

Теорема 1.5. *Ако $f \in W_2^{s,\,r}(Q)$, $s \ge 0, r > 1/2$, тада за $k < r - 1/2$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ постоји траг*

$$\frac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k} \in W_r^q(\Omega),$$

где је $q = s\,(r - k - 1/2)\,/r$.

Теорема 1.6. а) *ако је $sp > n + 2$ тада*

$$W_p^{s,\,s/2}(Q) \subseteq C(\overline{Q}),$$

б) *ако је $1 \le p \le q \le \infty$, $0 \le t \le s < \infty$ и $s - (n+2)/p \ge t - (n+2)/q$ тада*

$$W_p^{s,\,s/2}(Q) \subseteq W_q^{t,\,t/2}(Q).$$

Уведимо и простор $\widehat{W}_2^{s,\,s/2}(Q) = W_2^{(s,\ldots,s,s/2)}(Q)$. Важи:

$$W_2^{s,\,s/2}(Q) = \widehat{W}_2^{s,\,s/2}(Q)$$

уз еквивалентност норми (в.[21]).

1.3 Лема Брамбла-Хилберта

Лема Брамбла-Хилберта има фундаменталну улогу за оцењивање линеарних функционала у просторима Собољева (в.[10], [11],[14]).

Лема 1.2. *Нека је Ω област у $\mathbb{R}^n$ с Липшицовом границом, s-позитиван реалан број и $\mathcal{P}_s$ скуп полинома (од n променљивих) степена $< s$. Тада постоји константа $C = C(\Omega, s, p)$ таква да је:*

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_s} \|f - P\|_{W_p^s(\Omega)} \leq C|f|_{W_p^s(\Omega)}, \quad \forall f \in W_p^s(\Omega).$$

Ова лема се лако преноси на анизотропне просторе Собољева. Нека је $A \subset \mathbb{R}_+^n$ регуларан скуп ненегативних реалних мултииндекса. Са $\kappa(A)$ означимо конвексан омотач скупа A у $\mathbb{R}^n$. Нека је $\partial_0\kappa(A)$ део границе скупа $\kappa(A)$ који не припада координатним хиперравнима и $A_\partial = A \cap \overline{\partial_0\kappa(A)}$. Нека је B подскуп од A_∂, такав да је $B \cup 0$ регуларан скуп мултииндекса, и $\nu(B) = \{\beta \in N_0^n : D^{[\alpha]^-} x^\beta \equiv 0, \forall\alpha \in B\}$. Са $\mathcal{P}_B$ означимо скуп полинома облика:

$$P(x) = \sum_{\alpha\in\nu(B)} p_\alpha x^\alpha.$$

Важи следећи резултат (в.[15], [27]):

Лема 1.3. *Нека је Ω област у $\mathbb{R}^n$ с Липшицовом границом и нека скупови мултииндекса A и B задовољавају горње услове. Тада постоји константа $C = C(\Omega, A, B, p)$ таква да је:*

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_B} \|f - P\|_{W_p^A(\Omega)} \leq \sum_{\alpha\in B} |f|_{\alpha,p}\,, \quad \forall f \in W_p^A(\Omega).$$

Следећа тврђења су непосредна последица Леме 1.3.

Лема 1.4. *Нека је $\eta(f)$ ограничен линеаран функционал на $W_p^A(\Omega)$ који се анулира када је $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \nu(B)$. Тада постоји константа $C = C(\Omega, A, B, p)$ таква да за свако $f \in W_p^A(\Omega)$ важи неједнакост:*

$$|\eta(f)| \leq C \sum_{\alpha\in B} |f|_{\alpha,p}.$$

Лема 1.5. *Нека A_k, B_k и Ω_k у $\mathbb{R}^{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ задовољавају исте услове као A, B и Ω. Нека је $\eta(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ ограничен полилинеаран функционал на $W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times W_{p_2}^{A_2}(\Omega_2) \times \cdots \times W_{p_m}^{A_m}(\Omega_m)$, који се анулира ако је* *неки од његових аргумената облика* $f_k = x^\alpha$, $x \in \Omega_k$, $\alpha \in \nu(B_k)$. *Тада постоји константа* $C = C(\Omega_1, A_1, B_1, p_1, \Omega_2, A_2, B_2, p_2, \dots, \Omega_m, A_m, B_m, p_m)$ *таква да за свако*

$$(f_1, f_2, \dots, f_m) \in W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times W_{p_2}^{A_2}(\Omega_2) \times \cdots \times W_{p_m}^{A_m}(\Omega_m)$$

важи неједнакост:

$$|\eta(f_1, f_2, \dots, f_m)| \le C \prod_{k=1}^{m} \sum_{\alpha \in B_k} |f_k|_{\alpha, p_k}.$$

1.4 Мултипликатори у просторима Собољева

Нека су V и W два реална функционална простора у области Ω. За функцију a дефинисану на Ω кажемо да је мултипликатор из V у W ако за свако $f \in V$, производ $a(x) \cdot f(x)$ припада простору W. Скуп оваквих мултипликатора означавамо са $M(V \to W)$. Специјално за $V = W$ стављамо $M(V) = M(V \to V)$. Ограничимо се на мултипликаторе

$$M(W_p^t(\Omega) \to W_p^s(\Omega)), \quad 1 \le p < \infty, t \ge s \ge 0.$$

Наведимо неке основне резултате о мултипликаторима у просторима Собољева (в.[33]).

Лема 1.6. *Ако* $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$, $t \ge s \ge 0$, *тада:*

$$\begin{aligned}
&a \in M(W_p^{t-s}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)),\\
&a \in M(W_p^{t-\sigma}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-\sigma}(\mathbb{R}^n)), \quad 0 < \sigma < s,\\
&D^\alpha a \in M(W_p^{t}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)), \quad |\alpha| \le s,\\
&D^\alpha a \in M(W_p^{t-s+|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)), \quad |\alpha| \le s.
\end{aligned}$$

Лема 1.7. *Нека је* $t \ge s \ge 0$. *Ако* $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$ *тада* $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^{n+k}) \to W_p^s(\mathbb{R}^{n+k}))$. *Такође* $a \in M(W_p^{t,t/2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to W_p^{s,s/2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}))$.

Лема 1.8. *Ако* $a_\alpha \in M(W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n)), s < k$, *за сваки мултииндекс* α, *тада диференцијски оператор:*

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha u, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

дефинише непрекидно пресликавање $W_p^s(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n)$.

Лема 1.9. *Нека оператор* (1.1) *дефинише непрекидно пресликавање из* $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ *у* $W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n)$ *и нека је* $p(s-k) > n, p > 1$. *Тада*

$$a_\alpha \in M(W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n))$$

за сваки мултииндекс α.

Претходни резултати се могу пренети и на просторе Собољева у области. Прецизније, ако је Ω Липшицова област у $\mathbb{R}^n$ и a припада простору $M(W_p^t(\Omega) \to W_p^s(\Omega))$ тада постоји продужење $\widetilde{a}$ на $\mathbb{R}^n$ које припада простору $M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$. Важи и обрнуто: сужење мултипликатора $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$ на Ω припада простору $M(W_p^t(\Omega) \to W_p^s(\Omega))$.

Лема 1.10. *Нека је* Ω *ограничена Липшицова област у* $\mathbb{R}^n$, $s > 0$ *и* $p > 1$. *Ако* $a \in W_q^t(\Omega)$, *где је:*

$$\begin{aligned} &q = p, \quad t = s, \quad \textit{када је} \quad sp > n, \ \textit{односно} \\ &q \geq n/s, \quad t = s + \varepsilon \notin \mathbb{N}, \quad \varepsilon > 0, \quad \textit{када је} \quad sp \leq n, \end{aligned}$$

тада $a \in M(W_p^s(\Omega))$.

Лема 1.11. *Нека је* Ω *ограничена Липшицова област у* $\mathbb{R}^n$, $s > 0$ *и* $p > 1$. *Ако* $a \in L_q(\Omega)$, *где је:*

$$\begin{aligned} &q = p, \quad \textit{када је} \quad sp > n, \\ &q > p, \quad \textit{када је} \quad sp = n, \ \textit{и} \\ &q \geq n/s, \quad \textit{када је} \quad sp < n, \end{aligned}$$

тада $a \in M(W_p^s(\Omega) \to L_p(\Omega))$.

1.5 Апстрактни Кошијев проблем

Нека је H реалан сепарабилан Хилбертов простор снабдевен скаларним производом $(\cdot,\cdot)$ и нормом $\|\cdot\|$ и S неограничен самоконјугован позитивно дефинитан линеаран оператор, чији је домен $D(S)$ густ у H. Лако је видети да производ $(u,v)_S = (Su,v)$ $(u,v \in D(S))$ задовољава аксиоме скаларног производа. Затворење $D(S)$ у норми $\|u\|_S = (u,u)_S^{1/2}$ представља Хилбертов простор $H_S \subset H$. Скаларни производ (u,v) се непрекидно продужава на $H_S^* \times H_S$, где је $H_S^* = H_{S^{-1}}$ дуални простор од H_S. Простори H_S, H и $H_{S^{-1}}$ формирају Гељфандову тројку $H_S \subset H \subset H_{S^{-1}}$, у смислу потапања. Оператор S пресликава H_S у H_S^*. То гарантује постојање неограниченог самоадјунгованог позитивно дефинитног линеарног оператора $S^{1/2}$, таквог да $D(S^{1/2}) = H_S$ и $(u,v)_S = (Su,v) = (S^{1/2}u, S^{1/2}v)$. Такође дефинишимо просторе Собољева $W_2^s(a,b;H)$, $W_2^0(a,b;H) = L_2(a,b;H)$, функција $u = u(t)$ које пресликавају интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$ у H (в.[30], [51]).

Нека су даље A и B неограничени самоадјунговани позитивно дефинитни линеарни оператори, $A = A(t)$, $B \neq B(t)$, у Хилбертовом простору H (у општем случају некомутативни), домена $D(A)$ који је густ у H и $H_A \subset H_B$. Размотримо следећи апстрактан Кошијев проблем (в.[51], [37]):

$$B\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = f(t), \quad 0 < t < T; \quad u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

где је u_0 фиксирани елемент простора, $f(t)$ позната и $u(t)$ непозната функција са вредностима у H. Претпоставимо да је испуњено $A_0 \leq A(t) \leq cA_0$ где је $c = const. > 1$ и $A_0 \neq A_0(t)$ је самоадјунгован позитиван линеаран оператор у H. Такође претпоставимо да је $A(t)$ опадајући по промењивој t, односно нека важи:

$$\left(\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}u, u\right) < 0, \quad \forall u \in H. \tag{1.3}$$

Тада важи следеће тврђење (в.[26], [6]):

Лема 1.12. *Решење проблема* (1.2) *задовољава априорну оцену:*

$$\int_0^T \left(\|Au(t)\|_{B^{-1}}^2 + \left\|\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right\|_B^2 \right) \mathrm{d}t \leq C \left(\|u_0\|_A^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{B^{-1}}^2 \,\mathrm{d}t \right), \tag{1.4}$$

под условима $u_0 \in H_A$ *и* $f \in L_2(0,T;H_{B^{-1}})$.

Доказ. Из теорије почетно-граничних проблема за параболичке једначине следи да за $u_0 \in H_B$ и $f \in L_2(0,T;H_{A_0^{-1}})$ проблем (1.2) има јединствено решење (в.[37], [51])

$$u \in L_2(0,T;H_{A_0})$$

и

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t \in L_2(0,T;H_{BA_0^{-1}B}).$$

Помножимо скаларно (1.2) са $2\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, и проценимо десну страну помоћу неједнакости Коши-Шварца:

$$2\left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|_B^2 + 2\left(Au, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = 2\left(f, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) \leq \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|_B^2 + \|f\|_{B^{-1}}^2.$$

Из (1.3) следи да је:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_A^2) \le 2\left(Au, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right), \quad \forall u \in H.$$

Даље, имамо:

$$2\left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|_B^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_A^2) \le \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|_B^2 + \|f\|_{B^{-1}}^2.$$

Када интегралимо по t добијамо:

$$\int_0^T \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|_B^2 \mathrm{d}t + \|u(T)\|_A^2 \le \|u_0\|_A^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{B^{-1}}^2 \,\mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

Такође помножимо скаларно (1.2) са $2B^{-1}Au$ и добијамо

$$2\|Au\|_{B^{-1}}^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_A^2) \le \|Au\|_{B^{-1}}^2 + \|f\|_{B^{-1}}^2.$$

После, интеграљења по t имамо:

$$\int_0^T \|Au(t)\|_{B^{-1}}^2 \,\mathrm{d}t + \|u(T)\|_A^2 \le \|u_0\|_A^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{B^{-1}}^2 \,\mathrm{d}t. \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) следи оцена (1.4). □

Лема 1.13. *Ако $f \in L_2(0,T;H_{A_0^{-1}})$ и $u_0 \in H_B$ онда решење проблема (1.2) задовољава априорну оцену*

$$\int_0^T \|u(t)\|_{A_0}^2 \mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^T \frac{\|u(t)-u(t')\|_B^2}{|t-t'|^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}t' \le C\left(\|u_0\|_B^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{A_0^{-1}}^2 \mathrm{d}t\right), \tag{1.7}$$

где је C израчуњљива константа.

Доказ. Из теорије почетно-граничних проблема за параболичке једначине следи да за $u_0 \in H_B$ и $f \in L_2(0,T;H_{A_0^{-1}})$ проблем (1.2) има јединствено решење

$$u \in L_2(0,T;H_{A_0})$$

и

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t \in L_2(0,T;H_{BA_0^{-1}B}).$$

Помножимо скаларно (1.2) са $2u$, и проценимо десну страну помоћу неједнакости Коши-Шварца:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_B^2) + 2\|u\|_A^2 \le \|f\|_{A_0^{-1}}^2 + \|u\|_{A_0}^2.$$

Интеграцијом по t добијамо

$$\int_0^T \|u(t)\|_{A_0}^2 \mathrm{d}t + \|u(T)\|_B^2 \le \|u_0\|_B^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{A_0^{-1}}^2 \mathrm{d}t. \tag{1.8}$$

Сада ћемо извршити оцену семинорми по t. Почињемо са развојем функције $u(t) : [0,T] \to H$ у Фуријеов ред по синусима и косинусима:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos\frac{j\pi t}{T}, \tag{1.9}$$

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin\frac{j\pi t}{T}, \tag{1.10}$$

где је

$$a_j = a_j[u] = \frac{2}{T}\int_0^T u(t')\cos\frac{j\pi t'}{T}\mathrm{d}t',$$

$$b_j = b_j[u] = \frac{2}{T}\int_0^T u(t')\sin\frac{j\pi t'}{T}\mathrm{d}t'.$$

Лако је проверити да је

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 \mathrm{d}t = \frac{T}{2}\left(\frac{\|a_0[u]\|^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\|a_j[u]\|^2\right) = \frac{T}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\|b_j[u]\|^2. \tag{1.11}$$

Помножимо (1.2) са $\sin k\pi t/T$ и интегралимо по t у границама од 0 до T. Коришћењем формуле (1.10)

$$B\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[Bu(t)]}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{\infty} a_j[Bu]\frac{j\pi}{T}\sin\frac{j\pi t}{T}$$

и ортогоналности синуса имамо

$$\frac{k\pi}{T}a_k[Bu] = b_k[Au] - b_k[f].$$

Даље множећи скаларно ову једнакост са $a_k[u]$ и сумирајући по k добијамо

$$\frac{\pi}{T}\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k[Bu], a_k[u]) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k[Au], a_k[u]) - \sum_{k=1}^{\infty}(b_k[f], a_k[u]). \tag{1.12}$$

Даље, имамо

$$(a_k[Bu], a_k[u]) = (a_k[B^{1/2}u], a_k[B^{1/2}u])$$

и аналогно

$$(b_k[Au], a_k[u]) = (b_k[A_0^{-1/2}Au], a_k[A_0^{1/2}u])$$

и

$$(b_k[f], a_k[u]) = (b_k[A_0^{-1/2}f], a_k[A_0^{1/2}u]).$$

Дакле, из (1.12) следи

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{T}\sum_{k=1}^{\infty} k\|a_k[B^{1/2}u]\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty}(\|b_k[A_0^{-1/2}Au]\|\|a_k[A_0^{1/2}u] + \|b_k[A_0^{-1/2}f]\|\|a_k[A_0^{1/2}u]\|)\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\|b_k[A_0^{-1/2}Au]\|^2 + 2\|a_k[A_0^{1/2}u]\|^2 + \|b_k[A_0^{-1/2}f]\|^2).\end{aligned}$$

Даље, користећи (1.11), налазимо

$$\begin{aligned}\text{(1.13)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} k\|a_k[B^{1/2}u]\|^2 &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^T [(2+c^2)\|A_0^{1/2}u(t)\|^2 + \|A_0^{-1/2}f(t)\|^2]\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^T [(2+c^2)\|u(t)\|^2_{A_0} + \|f(t)\|^2_{A_0^{-1}})\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Размотримо израз

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\frac{\|\widetilde{u}(t)-\widetilde{u}(t-\tau)\|_B^2}{|\tau|^2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t,$$

где смо претпоставили да је функција $u(t)$ периодично продужена изван $[0, T]$:

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, T];\\ u(-t), & t \in [-T, 0];\\ u(2T-t), & t \in [T, 2T];\\ \text{итд.} & \end{cases}$$

Користећи периодичност функције $\widetilde{u}(t)$ и формулу (1.9) добијамо

$$\begin{aligned}&\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\frac{\|\widetilde{u}(t)-\widetilde{u}(t-\tau)\|_B^2}{|\tau|^2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t =\\ &= \int_{-T}^{T}\left[\int_{-T}^{T}(\widetilde{u}(t), -\widetilde{u}(t+\tau) + 2\widetilde{u}(t) - \widetilde{u}(t-\tau))_B\mathrm{d}t\right]\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} =\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{-T}^{T} \left[\int\limits_{-T}^{T} (B^{1/2}\widetilde{u}(t), -B^{1/2}\widetilde{u}(t+\tau) + 2B^{1/2}\widetilde{u}(t) - B^{1/2}\widetilde{u}(t-\tau))\mathrm{d}t \right] \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} =$$

$$= 4T \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k[B^{1/2}\widetilde{u}]\|^2 \int\limits_{-T}^{T} \sin^2 \frac{k\pi\tau}{2T} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}.$$

Даље имамо

$$\int\limits_{-T}^{T} \sin^2 \frac{k\pi\tau}{2T} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} = 2\int\limits_{0}^{T} \sin^2 \frac{k\pi\tau}{2T} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} = \frac{k\pi}{T} \int\limits_{0}^{k\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\mathrm{d}\theta \le \frac{k\pi}{T} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\mathrm{d}\theta = \frac{k\pi^2}{2T}$$

и добијамо

$$\int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{-T}^{T} \frac{\|\widetilde{u}(t) - \widetilde{u}(t-\tau)\|_B^2}{|\tau|^2} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \le 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\|a_k[B^{1/2}\widetilde{u}]\|^2. \tag{1.14}$$

Размотримо продужење

$$\int\limits_{0}^{T} \int\limits_{0}^{T} \frac{\|u(t) - u(t')\|_B^2}{|t-t'|^2} \mathrm{d}t\mathrm{d}t'.$$

Из (1.13) и (1.14) и неједнакости

$$\int\limits_{0}^{T} \int\limits_{0}^{T} \frac{\|u(t) - u(t')\|_B^2}{|t-t'|^2} \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \le \frac{1}{2} \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{-T}^{T} \frac{\|\widetilde{u}(t) - \widetilde{u}(t-\tau)\|_B^2}{|\tau|^2} \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

добијамо

$$\int\limits_{0}^{T} \int\limits_{0}^{T} \frac{\|u(t) - u(t')\|_B^2}{|t-t'|^2} \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \le \pi \int\limits_{0}^{T} [(2+c^2)\|u(t)\|_{A_0}^2 + \|f(t)\|_{A_0^{-1}}^2)\mathrm{d}t.$$

Отуда, узимајући у обзир (1.8), имамо

$$\int\limits_{0}^{T} \int\limits_{0}^{T} \frac{\|u(t) - u(t')\|_B^2}{|t-t'|^2} \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \le (2+c^2)\pi\|u_0\|_B^2 + (3+c^2)\pi \int\limits_{0}^{T} \|f(t)\|_{A_0^{-1}}^2 \mathrm{d}t. \tag{1.15}$$

Из (1.8) и (1.15) следи априорна оцена (1.7). □

Нека је даље $\ddot{W}_2^{1/2}(0,T;H_{B^{-1}})$ простор Собољева са нормом (в.[25]):

$$\|u\|^2_{\ddot{W}_2^{1/2}(0,T;H_{B^{-1}})} = \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{0}^{T} \frac{\|u(t) - u(t')\|_{B^{-1}}^2}{|t-t'|^2} \mathrm{d}t\mathrm{d}t' + \int\limits_{0}^{T} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{T-t} \right) \|u(t)\|_{B^{-1}}^2 \mathrm{d}t.$$

Стављајући у (1.2) $f(t)=\mathrm{d}g(t)/\mathrm{d}t$ имамо проблем

$$B\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t},\quad 0<t<T,\quad u(0)=u_0. \tag{1.16}$$

Користећи сличну технику можемо доказати следеће тврђење (в.[28]).

Лема 1.14. *Ако* $g\in\ddot{W}_2^{1/2}(0,T;H_{B^{-1}})$ *онда решење проблема* (1.16) *задовољава априорну оцену*

$$\begin{aligned}\int_0^T\|u(t)\|_{A_0}^2\,\mathrm{d}t&+\int_0^T\int_0^T\frac{\|u(t)-u(t')\|_B^2}{|t-t'|^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\\&\le C\left[\int_0^T\int_0^T\frac{\|g(t)-g(t')\|_{B^{-1}}^2}{|t-t'|^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t'+\int_0^T\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{T-t}\right)\|g(t)\|_{B^{-1}}^2\,\mathrm{d}t\right].\end{aligned} \tag{1.17}$$

2 Елементи теорије диференцијских схема

У другој глави дати су елементи теорије диференцијских схема. Дефинисане су коначне разлике, диференцијске схеме и проблеми стабилности и конвергенције диференцијских схема. Даље, дати су Стекловљеви оператори усредњења неопходни за рад у случају када улазни подаци нису непрекидне функције. Разматран је и и апстрактан операторско-диференцијски проблем и доказане одговарајуће априорне оцене.

2.1 Метода коначних разлика

У овом одељку се углавном ослањамо на материјал изложен у [20]. Нека се у области Ω променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тражи решење u линеарне парцијалне диференцијалне једначине:

$$Lu(x) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \tag{2.1}$$

које на граници Γ области Ω задовољава извесне додатне услове:

$$lu(x) = g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2.2}$$

при чему l и g могу бити вектори.

Да бисмо га лакше решили, задатак (2.1)-(2.2) дискретизујемо. Пре свега област $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ замењујемо скупом дискретних тачака (чворова) $\overline{\Omega}_h$, који називамо мрежом. Мрежу $\overline{\Omega}_h$ растављамо на скуп унутрашњих чворова Ω_h и скуп граничних чворова $\Gamma_h = \overline{\Omega}_h \backslash \Omega_h$. Густину распореда чворова карактеришемо параметром h, који може бити и вектор $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$. Вектору h придружујемо норму $|h|$. Уколико је $|h|$ мања утолико је мрежа гушћа. Замењујући изводе који се јављају у(2.1)-(2.2) количницима разлика функције у чворовима добијамо дискретни задатак:

$$(2.3) \qquad L_h v_h(x) = f_h(x),\ x \in \Omega_h,$$

$$(2.4) \qquad l_h v_h(x) = g_h(x),\ x \in \Gamma_h,$$

који апроксимира (2.1)-(2.2). Обично се трудимо да оператори L_h и l_h задрже карактеристичне особине оператора L и l - линеарност, самоконјугованост итд. Задатак (2.3)-(2.4) представља систем алгебарских диференцијских једначина. Његово решење v_h зависи од параметра h, односно од избора мрежа $\overline{\Omega}_h$. Фамилију задатака (2.3)-(2.4), који зависе од h, називамо диференцијском схемом задатка (2.1)-(2.2) (в.[39]).

При оваквом поступку дискретизације појављују се различити проблеми које углавном можемо сврстати у две групе:

1. Да ли диференцијска схема апроксимира полазни задатак и да ли њено решење конвергира ка његовом при бесконачном уситњавању мреже

2. Ефективно решавање диференцијског задатка.

Размотримо прво проблеме повезане с апроксимацијом. У скупове функција дефинисаних на $\overline{\Omega}_h, \Omega_h$ и Γ_h уведимо респективно норме

$$\|\cdot\|_{1,h}, \quad \|\cdot\|_{2,h}, \quad \|\cdot\|_{3,h}.$$

Са u_h означимо пројекцију решења $u = u(x)$ задатка (2.1)-(2.2) на простор функција дефинисаних на $\overline{\Omega}_h$. Означимо са

$$z_h = v_h - u_h$$

грешку схеме. Ако су оператори L_h и l_h линеарни тада z_h задовољава услове:

$$(2.5) \qquad L_h z_h(x) = \varphi_h(x),\ x \in \Omega_h,$$

$$(2.6) \qquad l_h z_h(x) = \psi_h(x),\ x \in \Gamma_h,$$

где су φ_h и ψ_h грешке апроксимације диференцијалне једначине (2.1) и додатног услова (2.2). За диференцијску схему (2.3)-(2.4) казаћемо да апроксимира задатак (2.1)-(2.2) ако

$$\|\varphi_h\|_{2,h} \to 0$$

и

$$\|\psi_h\|_{3,h} \to 0$$

кад $|h| \to 0$. Ако је

$$\|\varphi_h\|_{2,h},\ \|\psi_h\|_{3,h} = O(|h|^k)$$

кажемо да схема има k-ти ред апроксимације. Слично кажемо да диференцијска схема конвергира, односно конвергира брзином $O(|h|^k)$, ако

$$\|v_h - u_h\|_{1,h} \to 0$$

кад $|h| \to 0$, односно ако је

$$\|v_h - u_h\|_{1,h} = O(|h|^k).$$

За диференцијске схеме се такође уводе појмови стабилности и коректности. За схему (2.3)-(2.4) кажемо да је стабилна ако за довољно мало $|h| \le h_0$ њено решење v_h непрекидно зависи од улазних података f_h и g_h, при чему је та зависност равномерна по кораку h. Ако су L_h и l_h линеарни тада стабилност значи да постоје константе M_1 и M_2, које не зависе од h, f_h и g_h, такве да је за $|h| \le h_0$:

$$\|v_h\|_{1,h} \le M_1\|f_h\|_{2,h} + M_2\|g_h\|_{3,h}. \tag{2.7}$$

Неједнакости типа (2.7) називају се априорним оценама за схему (2.3)-(2.4). Добијање оваквих оцена је један важан задатак теорије диференцијских схема (в.[21], [39]). Ако је диференцијска схема (2.3)-(2.4) стабилна и за $|h| \le h_0$ једнозначно решива при произвољним улазним подацима f_h и g_h кажемо да је она коректна.

У даљем раду углавном ћемо се служити равномерним мрежама. Нека је $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ и $h_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Са

$$\mathbb{R}_h^n = \{(i_1h_1, i_2h_2, \ldots, i_nh_n) | i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

означимо скуп тачака који ћемо називати мрежом. Код елиптичких проблема се најчешће користе мреже са истим кораком у свим правцима

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_{n-1} = h,$$

док се код параболичких и хиперболичких проблема у правцу „просторних промењљивих" $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ користи један корак

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_{n-1} = h,$$

а у правцу временске промењљиве $x_n = t$ други

$$h_n = \tau.$$

Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, конвексна, једноструко повезана област и Γ њена граница. Са Ω_h означимо скуп тачака $x \in \mathbb{R}_h^n$ које припадају Ω_h заједно са својом околином

$$O(x) = \{(x_1 + i_1 h_1, \ldots, x_n + i_n h_n | i_1, \ldots, i_n = 0, \pm 1\},$$

са Γ_h скуп тачака из $\mathbb{R}_h^n$ које припадају $\overline{\Omega}_h$ али не припадају Ω_h и са $\overline{\Omega}_h$ скуп $\Omega_h \cup \Gamma_h$. Скуп Ω_h називамо скупом унутрашњих тачака (чворова), а Γ_h границом мрежне области или скупом граничних чворова. Мрежу Ω_h називамо повезаном ако произвољна два њена чвора можемо спојити изломљеном линијом чији су одсечци паралелни координатним осама, а врхови припадају Ω_h. У даљем раду служићемо се само повезаним мрежама. При нашим претпоставкама о области Ω мрежа Ω_h ће бити повезана ако су кораци $h_1, h_2, \ldots, h_n$ довољно мали.

Даље, нека је v функција дефинисана на мрежи $\mathbb{R}_h^n$. Означимо

$$v_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = v(i_1 h_1, i_2 h_2, \ldots, i_n h_n).$$

Операторе количника разлика дефинишемо на следећи начин (в.[39]):

$$(v_{x_k})_{i_1, \ldots, i_k, \ldots, x_n} = (v_{i_1, \ldots, i_k+1, \ldots, i_n} - v_{i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n})/h_k = (v_{\overline{x}_k})_{i_1, \ldots, i_k+1, \ldots, i_n},$$
$$v_{\dot{x}_k} = (v_{x_k} + v_{\overline{x}_k})/2,$$

при чему v_{x_k} називамо разликом унапред, $v_{\overline{x}_k}$ разликом уназад, а $v_{\dot{x}_k}$ централном разликом. Ако сада у једнодимензионом случају са

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih | i = 0, 1, \ldots, N; Nh = l\}$$

означимо мрежу на одсечку $[0, l]$ онда је

$$(u, v) = h \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2},$$
$$[u, v) = h \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i, \quad |[u\| = [u, u)^{1/2},$$
$$(u, v] = h \sum_{i=1}^{N} u_i v_i, \quad \|u]| = (u, u]^{1/2}.$$

Формули диференцирања производа $(uv)' = u'v + uv'$ одговарају следеће формуле с количницима разлика:

$$(uv)_{x,i} = u_{x,i} v_i + u_{i+1} v_{x,i} = u_{x,i} v_{i+1} + u_i v_{x,i}\,,$$

$$(uv)_{\overline{x},i} = u_{\overline{x},i}v_i + u_{i-1}v_{\overline{x},i} = u_{\overline{x},i}v_{i-1} + u_i v_{\overline{x},i}\,.$$

Формули парцијалне интеграције

$$\int_0^l uv^{'}dx = uv|_0^l - \int_0^l u^{'}vdx$$

као у претходном случају одговарају две формуле

$$(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\overline{x}}, v],$$
$$(u, v_{\overline{x}}) = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - [u_x, v).$$

Поред ових формула наведимо још две неједнакости:

Лема 2.1. *За сваку функцију v дефинисану на мрежи $\overline{\omega}_h$ и једнаку нули за $x = 0$ и $x = l$ важи неједнакост*

(2.8) $$\|v\|_{C,h} = \max_{0\leq i\leq N}|v_i| \leq \sqrt{l}\|v_{\overline{x}}]|/2.$$

Лема 2.2. *За произвољну функцију v дефинисану на мрежи $\overline{\omega}_h$ и једнаку нули за $x = 0$ и $x = l$ важе неједнакости*

(2.9) $$h\|v_{\overline{x}}]| \leq 2\|v\| \leq l\|v_{\overline{x}}]|.$$

Размотримо још диференцијске схеме за параболичке једначине. Код параболичких једначина промењљива t ("време") има другачију улогу од осталих промењљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ("просторне промењљиве"). Као што смо већ напоменули обично се у правцу оса $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$ узима један корак h, док се у правцу осе Ot узима други корак τ. Област $\overline{\Omega}$ замењује се скупом дискретних тачака $\overline{\Omega}_h$, као и у случају елиптичких проблема, док се интервал $[0, T]$ замењује скупом

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau | j = 0, 1, \ldots, M; \tau = T/M\}.$$

Тако добијамо дискретну област (мрежу)

$$\overline{\Omega}_{h,\tau} = \overline{\Omega}_h \times \overline{\omega}_\tau.$$

Функције дефинисане на мрежи $\overline{\Omega}_{h,\tau}$ означаваћемо са

$$v^j_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = v(i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h; j\tau).$$

Ако то не доводи до двосмислености, индексе ћемо изостављати. Скуп чворова мреже за које је $\tau_j = const.$ називаћемо временски слој.

У даљем раду, поред већ уведених оператора количника разлика биће нам неопходни и следећи оператори (в.[39])

$$v_{x_i\bar{x}_i}(x,t) = \frac{v^{+i}(x,t) - 2v(x,t) + v^{-i}(x,t)}{h^2}\,,$$

$$v_t(x,t) = \frac{v(x,t+\tau) - v(x,t)}{\tau} = v_{\bar{t}}(x,t+\tau)\,,$$

где је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v^{\pm i}(x,t) = v(x \pm hr_i, t)$ и r_i јединични вектор координатне осе x_i.

Елиптички члан, Lu, дискретизујемо као и у случају елиптичких једначина. Да би се апроксимирао извод по времену $\partial u/\partial t$ потребне су вредности функције u бар са два временска слоја, на пример:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_j} = \big(u(t_j+\tau) - u(t_j)\big)/\tau + O(t) = (u_t)^j + O(\tau).$$

Одатле следи да диференцијски аналог парцијалне једначине такође садржи вредности тражене функције са два временска слоја. Овакве диференцијске схеме називамо двослојним.

Од диференцијских схема за решавање параболичких проблема такође захтевамо да буду коректне и да конвергирају. Код доказивања коректности основну улогу има доказ стабилности схеме, док је њена једнозначна решивост обично очигледна или се лако доказује. Стабилност може бити апсолутна и условна у зависности од тога да ли су кораци h и τ међусобно независни или зависни. Услед постојања два корака, h и τ, брзина конвергенције може бити различита по сваком од њих.

2.2 Оператори усредњења

У теорији парцијалних диференцијалних једначина с генералисаним решењима коефицијенти једначине не морају бити непрекидне функције. Зато диференцијске схеме које апроксимирају такве проблеме морају имати усредњене коефицијенте. За произвољну функцију $u \in L_{1,\,loc}(\mathbb{R})$ и $h > 0$ дефинишемо линеарни оператор усредњења (Стекловљев оператор) са (в.[21], [49]):

$$(T_h u)(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{x-h/2}^{x+h/2} u(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приметимо да је функција $(T_h u)(x)$ непрекидна на $\mathbb{R}$. Примера ради, за Хевисајдову функцију

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

која има прекид у тачки $x = 0$ потражимо $(T_h u)(x)$. Ако је $x < -h/2$, тада је

$$(T_h H)(x) = \frac{1}{h} \int\limits_{x-h/2}^{x+h/2} H(\xi) \mathrm{d}\xi = 0.$$

Даље, за $-h/2 \leq x \leq h/2$, имамо

$$(T_h H)(x) = \frac{1}{h} \int\limits_{x-h/2}^{x+h/2} H(\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{h} \int\limits_{0}^{x+h/2} H(\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2h}(2x+h).$$

Коначно, за $x > h/2$ је

$$(T_h H)(x) = \frac{1}{h} \int\limits_{x-h/2}^{x+h/2} H(\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{h} \cdot h = 1.$$

Следи,

$$(T_h H)(x) = \begin{cases} 0, & x < -h/2; \\ (2x+h)/2h, & -h/2 \leq x \leq h/2; \\ 1, & x > h/2. \end{cases}$$

Дакле, за функцију $H(x)$ која није непрекидна функција, $(T_h H)(x)$ је непрекидна (део-по-део линеарна функција).

Такође важи

$$||T_h H - H||_{L_2(\mathbb{R})} = (2\sqrt{3})^{-1} \sqrt{h} \leq \sqrt{h}.$$

Аналогно, у вишедимензионом случају за функцију $u = u(x_1, x_2, t)$ уведимо Стекловљеве операторе са (в.[21]):

$$T_1 u(x_1, x_2, t) = T_1^{\pm} u(x_1 \mp h/2, x_2, t) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2} u(x_1', x_2, t) dx_1' \,,$$

$$T_2 u(x_1, x_2, t) = T_2^{\pm} u(x_1, x_2 \mp h/2, t) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_2-h/2}^{x_2+h/2} u(x_1, x_2', t) dx_2' \,,$$

$$T_1^2 u(x_1, x_2, t) = T_1^+ T_1^- u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{h} \int\limits_{x_1-h}^{x_1+h} \left(1 - \frac{|x_1' - x_1|}{h} \right) u(x_1', x_2, t) \, dx_1' \,,$$

$$T_2^2 u(x_1,x_2,t) = T_2^+ T_2^- u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_2-h}^{x_2+h} \left(1 - \frac{|x_2' - x_2|}{h}\right) u(x_1,x_2',t)\, dx_2',$$

$$T_t^- u(x_1,x_2,t) = T_t^+ u(x_1,x_2,t-\tau) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t} u(x_1,x_2,t')dt'.$$

Приметимо да су ови оператори међусобно комутативни и да пресликавају парцијалне изводе у коначне разлике, тј. важи:

$$T_i^- \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{\bar{x}_i}, \quad T_i^+ \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}, \quad T_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_i \bar{x}_i}, \quad T_t^- \frac{\partial u}{\partial t} = u_{\bar{t}}.$$

Заиста,

$$\begin{aligned} T_1^- \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2,t) &= \frac{1}{h}\int\limits_{x_1-h}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1',x_2,t)\mathrm{d}x_1' \\ &= \frac{1}{h} u(x_1',x_2,t)\Big|_{x_1-h}^{x_1} = \frac{u(x_1,x_2,t) - u(x_1-h,x_2,t)}{h} = u_{\bar{x}_1}. \end{aligned}$$

На сличан начин се могу доказати и остале једнакости.

2.3 Апстрактни операторско-диференцијски проблем

Нека је H_h коначно димензионалан реалан Хилбертов простор са скаларним производом $(\cdot,\cdot)_h$ и нормом $\|\cdot\|_h$. За самоконјугован линеаран оператор S_h у H_h, са H_{S_h} означавамо простор $H_{S_h} = H_h$ са скаларним производом

$$(v,w)_{S_h} = (S_h v, w)_h$$

и нормом

$$\|v\|_{S_h} = (S_h v, v)_h^{1/2}.$$

Размотримо имплицитну операторско-диференцијску схему

$$\begin{aligned} &B_h v_{\bar{t}} + A_h v = \varphi(t), \quad t \in \omega_\tau^+, \\ &v(0) = v_0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где су $A_h = A_h(t)$ и $B_h \neq B_h(t)$ позитивно дефинитни самоконјуговани линеарни оператори у H_h, (у општем случају некомутативни), v_0 дат елемент из H_h, $\varphi(t)$ је позната и $v(t)$ непозната мрежна функција са вредностима у H_h. Такође размотримо и схему

$$B_h v_{\bar{t}} + A_h v = \psi_{\bar{t}}, \quad t \in \omega_\tau^+, \qquad v(0) = 0, \tag{2.11}$$

где је $\psi(t)$ дата мрежна функција са вредностима у H_h. Аналогно са проблемом (1.2) претпоставимо да је $A_{0h} \le A_h(t) \le kA_{0h}$ где је $k = const. > 1$ и $A_{0h} \neq A_{0h}(t)$ самоконјугован позитиван линеаран оператор у H_h. Важе следећи аналози Лема 1.12 и Лема 1.13.

Лема 2.3. *Нека је B_h позитивно дефинитан самоадјунгован линеаран оператор у H_h и нека оператор A_{0h} задовољава следеће услове: $A_{0h} = A_{h0} + A_{h1}$, $A_{h0} = (A_{0h} + A_{0h}^*)/2 > 0$, $\|A_{h1}v\|_h \le C_0\|v\|_{A_{h0}}$. Тада решење v операторско-диференцијске схеме* (2.10) *задовољава априорну оцену*

$$\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|v(t)\|^2_{A_{h0}} + \tau^2 \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau, t'\neq t} \frac{\|v(t)-v(t')\|^2_{B_h}}{|t-t'|^2} \le C\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|\varphi(t)\|^2_{A_{h0}^{-1}}.$$

Доказ. Множећи скаларно једнакост (2.10) са $2\tau v$ добијамо

$$\|v\|^2_{B_h} - \|\check{v}\|^2_{B_h} + \|v-\check{v}\|^2_{B_h} + 2\tau\|v\|^2_{A_{h0}} = 2\tau(\varphi, v)_h \le \tau\|v\|^2_{A_{h0}} + \tau\|\varphi\|^2_{A_{h0}^{-1}}.$$

После сумирања по мрежи ω_τ^+ имамо

$$\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|v(t)\|^2_{A_{h0}} \le \tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|\varphi(t)\|^2_{A_{h0}^{-1}}. \tag{2.12}$$

За функцију $v(t)$ дефинисану на мрежи $\overline{\omega}_\tau, \omega_\tau^+$ или ω_τ^-, уведимо Фуријеове развоје

$$v(t) = \sum_{k=0}^{m}{}' a_k[v]\cos\frac{k\pi t}{\tau} \equiv \frac{a_0[v]}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} a_k[v]\cos\frac{k\pi t}{\tau} + \frac{a_n[v]}{2}\cos\frac{n\pi t}{\tau}, \quad t\in\overline{\omega}_\tau,$$

$$v(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k^{\mp}[v]\sin\frac{k\pi t}{\tau}(t\mp\frac{\tau}{2}), \quad t\in\omega_\tau^{\pm}.$$

Применом развоја косинуса једноставно добијамо

$$Bv_{\bar{t}} = \sum_{k=0}^{m}{}' \frac{-2}{\tau}\sin\frac{k\pi\tau}{2T} a_k[B_h v]\sin\frac{k\pi}{T}(t-\frac{\tau}{2}).$$

Враћањем овог развоја у (2.10), множећи са $\sin\frac{j\pi}{T}(t-\frac{\tau}{2})$ и сумирајући по мрежи ω_τ^+ добијамо

$$-\frac{\sin j\pi\tau/(2T)}{j\pi\tau/(2T)}\frac{\pi}{T} j a_j[b_h v] + b_j^-[A_h v] = b_j^-[\varphi].$$

Даље, скаларно множимо са $a_j[v]$ и сумирамо по j. Применом релација

$$\begin{aligned}
&(a_j[B_h v], a_j[v]) = (a_j[B_h^{1/2} v], a_j[B_h^{1/2} v]) = \|a_j[B_h^{1/2} v]\|_h^2,\\
&(b_j^-[A_h v], a_j[v]) = (b_j^-[A_{h0}^{1/2} v], a_j[A_{h0}^{1/2} v]) + (b_j^-[A_{h1} v], a_j[v]),\\
&(b_j^-[\varphi], a_j[v]) = (b_j^-[A_{h0}^{-1/2}\varphi], a_j[A_{h0}^{1/2} v]),
\end{aligned}$$

Коши-Шварцове неједнакости и идентитета

$$\tau {\sum_{t\in\overline{\omega}_\tau}}' \|v(t)\|_h^2 \equiv \tau[\frac{1}{2}\|v(0)\|_h^2 + \sum_{t\in\omega_\tau} \|v(t)\|_h^2 + \frac{1}{2}\|v(T)\|_h^2] = \frac{T}{2} {\sum_{k=0}^{m}}' \|a_k[v]\|_h^2,$$

$$\tau \sum_{t\in\omega_\tau^\pm} \|v(t)\|_h^2 = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{m} \|b_k^\mp[v]\|_h^2$$

добијамо

$$\sum_{j=1}^{m} j\|a_j[B_h^{1/2} v]\|_h^2 \le c\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \left[\|v(t)\|_{A_{h0}}^2 + \|\varphi(t)\|_{A_{h0}^{-1}}^2\right].$$

Применом еквиваленција

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} j\|a_j[B_h^{1/2} v]\|_h^2,\\
&\tau^2 \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau, t'\ne t} \frac{\|v(t)-v(t')\|_{B_h}^2}{|t'-t|^2}
\end{aligned}$$

добијамо

$$\tau^2 \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau, t'\ne t} \frac{\|v(t)-v(t')\|_{B_h}^2}{|t-t'|^2} \le C\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \left[\|v(t)\|_{A_{h0}}^2 + \|\varphi(t)\|_{A_{h0}^{-1}}^2\right]. \tag{2.13}$$

□

Лема 2.4. *Решење v операторско-диференцијске схеме* (2.11) *задовољава априорну оцену*

$$\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|v(t)\|_{A_{h0}}^2 + \tau^2 \sum_{t\in\bar{\omega}_\tau} \sum_{t'\in\bar{\omega}_\tau, t'\ne t} \frac{\|v(t)-v(t')\|_{B_h}^2}{|t-t'|^2}$$

$$\le C\Big[\tau^2 \sum_{t\in\bar{\omega}_\tau} \sum_{t'\in\bar{\omega}_\tau, t'\ne t} \frac{\|\psi(t)-\psi(t')\|_{B_h^{-1}}^2}{|t-t'|^2} + \tau\sum_{t\in\bar{\omega}_\tau}\Big(\frac{1}{t+\tau} + \frac{1}{T-t+\tau}\Big)\|\psi(t)\|_{B_h^{-1}}^2\Big].$$

Доказ. Идентично као у претходном случају множећи скаларно (2.11) са $2\tau v$ и сумирајући по мрежи ω_τ^+ добијамо

$$\frac{1}{2}\|v(T)\|_{B_h}^2 + \tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|v(t)\|_{A_{h0}}^2 \le \tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} (\psi_{\bar{t}}, v)_h.$$

Даље, имамо

$$\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} (\psi_{\bar{t}}, v)_h = \tau {\sum_{t\in\overline{\omega}_\tau}}' (\widetilde{\psi}_{\bar{t}}, v)_h + (\psi(T), v(T))_h,$$

где је $\widetilde{\psi}$ продужење функције ψ изван ω_τ^- дато са

$$\widetilde{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t), & t\in\omega_\tau^-; \\ -\psi(-t-\tau), & -t\in\omega_\tau^+; \\ -\psi(2T-t-\tau), & 2T-t\in\omega_\tau^+; \\ \text{итд.} \end{cases}$$

Применом развоја

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k^+[\psi] \sin\frac{k\pi}{T}\left(t+\frac{\tau}{2}\right),$$
$$v(t) = {\sum_{j=0}^{m}}' a_j[v] \cos\frac{j\pi t}{T}$$

имамо

$$\begin{aligned}
\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} (\psi_{\bar{t}}, v)_h &= \frac{\pi}{2} {\sum_{k=1}^{m}}' \frac{(\sin k\pi\tau/(2T))}{k\pi\tau/(2T)} k (b_k^+[B_h^{-1/2}\psi], a_k[B_h^{1/2} v])_h + (\psi(T), v(T))_h \\
&\le {\sum_{k=1}^{m}}' k\left(\varepsilon\|a_k[B_h^{1/2}v]\|_h^2 + \frac{C}{\varepsilon}\|b_k^+[B_h^{-1/2}\psi]\|_h^2\right) \\
&+ \frac{1}{2}\|v(T)\|_{B_h}^2 + \frac{1}{2}\|\psi(T)\|_{B_h^{-1}}^2 \\
&\le \frac{1}{2}\|v(T)\|_{B_h}^2 + C_1\varepsilon\tau^2 \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau, t'\ne t} \frac{\|v(t)-v(t')\|_{B_h}^2}{|t'-t|^2} \\
&+ \frac{C_2}{\varepsilon}\Big[\tau^2 \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau, t'\ne t} \frac{\|\psi(t)-\psi(t')\|_{B_h^{-1}}^2}{|t'-t|^2} \\
&+ \tau \sum_{t\in\bar{\omega}_\tau} \left(\frac{1}{t+\tau} + \frac{1}{T-t+\tau}\right) \|\psi(t)\|_{B_h^{-1}}^2\Big],
\end{aligned}$$

где је ε произвољан позитиван број. Из претходних неједнакости следи

$$
\begin{aligned}
(2.14)\qquad \tau \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \|v(t)\|^2_{A_{h0}} \ \leq\ & C_1\varepsilon\tau^2 \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau, t'\neq t} \frac{\|v(t)-v(t')\|^2_{B_h}}{|t'-t|^2} \\
& + \frac{C_2}{\varepsilon}\Bigg[\tau^2 \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau, t'\neq t} \frac{\|\psi(t)-\psi(t')\|^2_{B_h^{-1}}}{|t'-t|^2} \\
& + \tau \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \left(\frac{1}{t+\tau} + \frac{1}{T-t+\tau}\right) \|\psi(t)\|^2_{B_h^{-1}}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Применом косинусног развоја за $v(t)$ и $\psi(t)$ заменимо $v_{\bar{t}}$ и $\psi_{\bar{t}}$ у (2.11). Множећи добијене релације са $\sin\frac{j\pi}{T}(t-\frac{\tau}{2})$ и сумирајући по мрежи ω_τ^+ имамо

$$
-\frac{\sin(j\pi\tau/(2T))}{j\pi\tau/(2T)}\frac{\pi}{T} j a_j[B_h v] + b_j^-[A_h v] = -\frac{\sin(j\pi\tau/(2T))}{j\pi\tau/(2T)}\frac{\pi}{T} j a_j[\psi].
$$

Узимајући скаларни производ ове релације са $a_j[v]$ и сумирајући по j, после једноставних трансформација имамо

$$
\begin{aligned}
(2.15)\qquad \tau^2 \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau, t'\neq t} \frac{\|v(t)-v(t')\|^2_{B_h}}{|t'-t|^2} \leq\ & C_3\tau \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \|v(t)\|^2_{A_{h0}} \\
& + C_4\tau^2 \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau, t'\neq t} \frac{\|\psi(t)-\psi(t')\|^2_{B_h^{-1}}}{|t'-t|^2}.
\end{aligned}
$$

Из (2.14) и (2.15) за довољно мало $\varepsilon > 0$ следи горе наведени резултат. □

У даљем раду биће нам потребно и следеће тврђење (в.[21], [29]):

Лема 2.5. *Решење проблема* (2.10), *уз услов* $((A_h(t+\tau) - A_h(t))u, u) < 0$, *задовољава следећу оцену*

$$
\tau{\sum_{t\in\overline{\omega}_\tau}}' \|A_h v(t)\|^2_{B_h^{-1}} + \tau\sum_{t\in\omega_\tau^+} \|v_{\bar{t}}(t)\|^2_{B_h} \leq C\left(\|v_0\|^2_{A_h} + \tau\|A_h v_0\|^2_{B_h^{-1}} + \tau\sum_{t\in\omega_\tau^+} \|\varphi(t)\|^2_{B_h^{-1}}\right),
$$

где смо означили:

$$
{\sum_{t\in\overline{\omega}_\tau}}' w(t) = \frac{w(0)}{2} + \sum_{t\in\omega_\tau} w(t) + \frac{w(T)}{2}.
$$

3 Конвергенција диференцијске схеме у дискретној $\widetilde{\mathbf{W}}_2^{2,1}$ норми

У трећој глави је разматран дводимензионални параболички проблем са концентрисаним капацитетом и промењивим коефицијентима. Као увод у истраживање, у поглављу 3.1 разматрана је једначина са мешовитим изводима и промењивим (али не и временски зависним) коефицијентима. Преузети су делови рада [7] и детаљно су доказане све оцене функционала. У поглављу 3.2 разматран је проблем са промењивим временски зависним коефицијентима. Уз претпоставку да коефицијенти припадају анизотропним просторима Собољева, доказана је оцена брзине конвергенције диференцијске схеме у простору $\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})$ сагласна са глаткошћу коефицијената и решењем почетног проблема.

3.1 Параболички проблем са промењивим коефицијентима

3.1.1 Поставка проблема

Посматрајмо дводимензионални почетно-гранични проблем за једначину топлоте са концентрисаним капацитетом на правој $x_2 = \xi,\ 0 < \xi < 1$ (в.[7]):

$$\begin{aligned} &(1 + k\delta(x_2 - \xi))\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f\,, \quad \text{на } Q\,, \\ &u = 0\,, \ \text{на } \partial\Omega \times (0,T)\,, \\ &u(x,0) = u_0(x)\,, \ \text{на } \Omega\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где је $\delta(x)$ Диракова делта функција, $k>0$ и $\Omega=(0,1)^2$, $Q=\Omega\times(0,T)$. Дефинишимо и подобласти:

$$\begin{aligned}&\Omega_1=(0,1)\times(0,\xi),\quad \Omega_2=(0,1)\times(\xi,1),\\ &Q_1=\Omega_1\times(0,T),\quad Q_2=\Omega_2\times(0,T),\\ &\Sigma=\{(x_1,\xi)|\ x_1\in(0,1)\}.\end{aligned}$$

Претпоставимо да коефицијенти a_{ij} задовољавају услов елиптичности и да

$$\begin{aligned}&a_{ij}\in W_2^3(\Omega_1)\cap W_2^3(\Omega_2),\\ &f\in W_2^{2,1}(Q).\end{aligned}$$

Тада, уз претходне услове, услове сагласности на граници области Q и услове конјугације на Σ (в.[12], [24]):

$$\begin{aligned}&[u]_\Sigma=0\\ &\left[\sum_{j=1}^{2}a_{2j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]_\Sigma=k\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_\Sigma\end{aligned}\tag{3.2}$$

где је

$$[u]_\Sigma=u(x_1,\xi+0,t)-u(x_1,\xi-0,t),$$

потражимо решење проблема (3.1), тако да

$$u\in W_2^{4,2}(Q_1)\cap W_2^{4,2}(Q_2)\cap W_2^{4,2}(\Sigma\times(0,T)).$$

3.1.2 Нумеричка апроксимација

Нека је $\overline{\omega}_h$– униформна мрежа са кораком h у $\overline{\Omega}$,

$$\begin{aligned}&\omega_h=\overline{\omega}_h\cap\Omega,\\ &\omega_{1h}=\overline{\omega}_h\cap([0,1)\times(0,1)),\\ &\omega_{2h}=\overline{\omega}_h\cap((0,1)\times[0,1)),\\ &\sigma_h=\omega_h\cap\Sigma\end{aligned}$$

и ω_τ униформна мрежа са кораком τ у $[0,T]$. Не умањујући општост, претпоставимо да је ξ рационалан број. Тада се може изабрати корак h тако да је $\sigma_h\neq\emptyset$. Сматраћемо да је задовољен услов:

$$c_1h^2\leq\tau\leq c_2h^2,\quad c_1,c_2=const.$$

Проблем (3.1) се може апроксимирати на мрежи $\overline{Q}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ следећом диференцијском схемом са усредњеном десном страном:

$$
(3.3) \qquad
\begin{aligned}
&(1 + k\delta_h(x_2 - \xi))v_{\bar{t}} + L_h v = T_1^2 T_2^2 T_t^- f \,, \text{на } Q_{h\tau} \,, \\
&v = 0 \,, \ \text{на } \gamma_h \times \omega_\tau^+ \,, \\
&v(x, 0) = u_0(x) \,, \ \text{на } \omega_h \,,
\end{aligned}
$$

где је

$$
L_h v = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} ((a_{ij} v_{x_j})_{\bar{x}_i} + (a_{ij} v_{\bar{x}_j})_{x_i}),
$$

и

$$
\delta_h(x_2 - \xi) = \begin{cases} 0 \,, & x \notin \sigma_h \\ 1/h \,, & x \in \sigma_h \end{cases}
$$

је мрежна Диракова функција.

Поред стандардних Стекловљевих оператора T_1^+, T_2^+, T_t^- дефинисаних у поглављу 2.2, за даљи рад биће нам неопходни и следећи оператори:

$$
T_2^{2-} f(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{x_2 - h}^{x_2} \left(1 + \frac{x_2' - x_2}{h}\right) f(x_1, x_2') dx_2' \,,
$$

$$
T_2^{2+} f(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{x_2}^{x_2 + h} \left(1 - \frac{x_2' - x_2}{h}\right) f(x_1, x_2') dx_2' \,.
$$

Даље, уведимо следеће скаларне производе и норме:

$$
\begin{aligned}
(v, u)_{L_2(\omega_h)} &= h^2 \sum_{x \in \omega_h} v(x) u(x) \,, \\
\|v\|_{L_2(\omega_h)} &= (v, v)_{L_2(\omega_h)}^{1/2} \,, \\
(v, u)_{L_2(\omega_{ih})} &= h^2 \sum_{x \in \omega_{ih}} v(x) u(x) \,, \\
\|v\|_{L_2(\omega_{ih})} &= (v, v)_{L_2(\omega_{ih})}^{1/2} \,.
\end{aligned}
$$

Означимо са

$$
B_h v = (1 + k\delta_h(x_2 - \xi)) v
$$

и уведимо следеће норме:

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{B_h}^2 &= \|v\|_{L_2(\omega_h)}^2 + kh \sum_{x \in \sigma_h} v^2(x) \,, \\
\|v\|_{B_h^{-1}}^2 &= h^2 \sum_{x \in w_h \setminus \sigma_h} v^2(x) + \frac{h^3}{k + h} \sum_{x \in \sigma_h} v^2(x) \,, \\
\|v\|_{\widetilde{W}_{2,h}^2} &= \sum_{i,j=1}^{2} \|v_{x_i \bar{x}_j}\|_{B_h^{-1}}^2 + \sum_{i=1}^{2} \|v_{x_i}\|_{L_2(\omega_{ih})}^2 + \|v\|_{B_h}^2 \,.
\end{aligned}
$$

Приметимо да су норме $\|L_h v\|_{B_h^{-1}}$ и $\|v\|_{\widetilde{W}^2_{2,h}}$ еквивалентне. Такође уводимо дискретну $\widetilde{W}_2^{2,1}$ норму на следећи начин:

$$\|v\|^2_{\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})} = \tau \sum_{t\in\bar{\omega}_\tau} \|v(\cdot,t)\|^2_{\widetilde{W}^2_{2,h}} + \tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|v_{\bar{t}}(\cdot,t)\|^2_{B_h}\,.$$

3.1.3 Конвергенција у простору $\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})$

У овом делу доказаћемо конвергенцију диференцијске схеме (3.3) у простору $\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})$. Важи следеће тврђење:

Теорема 3.1. *Решење диференцијске схеме* (3.3) *конвергира у простору* $\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})$ *ка решењу почетно-граничног проблема* (3.1), *и уз услов* $c_1 h^2 \le \tau \le c_2 h^2$, *важи следећа оцена:*

$$\|u-v\|_{\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le Ch^2 \left(\max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)} + \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)} + 1\right) \times \left(\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)} + \|u\|_{W_2^{4,2}(\Sigma\times(0,T))}\right). \tag{3.4}$$

Доказ. Нека је u решење почетно-граничног проблема (3.1) и v решење диференцијске схеме (3.3). Тада грешка

$$z = u - v$$

задовољава услове:

$$\begin{aligned} &(1+k\delta_h(x_2-\xi))z_{\bar{t}} + L_h z = \varphi + \psi\,, \text{ на } Q_{h\tau}\,,\\ &z = 0\,, \text{ на } \gamma_h \times \omega_\tau^+\,,\\ &z(x,0) = 0\,, \text{ на } \omega_h\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где је $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, при чему је

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= u_{\bar{t}} - T_1^2 T_2^2 T_t^- \frac{\partial u}{\partial t}\,,\\ \varphi_2 &= k\delta_h(x_2-\xi)(u_{\bar{t}} - T_1^2 u_{\bar{t}})\,, \end{aligned}$$

и

$$\psi = \sum_{i,j=1}^{2} \psi_{ij}\,,$$

при чему је

$$\psi_{ij} = T_1^2 T_2^2 T_t^- \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - \frac{1}{2}((a_{ij}u_{x_j})_{\bar{x}_i} + (a_{ij}u_{\bar{x}_j})_{x_i})\,,\ i,j = 1,2\,.$$

Применом Леме 2.5 директно добијамо априорну оцену диференцијске схеме (3.5):

$$\|z\|_{\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le C\left(\tau\sum_{t\in w_\tau^+}(\|\varphi(\cdot,t)\|^2_{B_h^{-1}} + \|\psi(\cdot,t)\|^2_{B_h^{-1}})\right)^{1/2}. \tag{3.6}$$

На тај начин је проблем оцене диференцијске схеме (3.3) сведен на оцену десне стране неједнакости (3.6).

Оценимо прво израз φ_1 за $x \notin \sigma_h$ (в.[21]). Израз $\varphi_1(x,t)$ је ограничен функционал аргумента

$$u \in W_2^{4,2}(e),$$

где је

$$e = (x_1-h, x_1+h)\times(x_2-h,x_2+h)\times(t-\tau,t),\ \ x_2 \ne \xi.$$

Осим тога $\varphi_1 = 0$ ако је u полином трећег степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.4 добијамо

$$|\varphi_1(x,t)| \le C|u|_{W_2^{4,2}(e)}.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h \setminus \sigma_h$ добијамо

$$\left(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\varphi_1(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2(\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)})\,. \tag{3.7}$$

За $x \in \sigma_h$ извршимо декомпозицију израза $\varphi_1 = \varphi_1^+ + \varphi_1^-$, где је

$$\begin{aligned}\varphi_1^+ &= \frac{1}{2}T_t^-\frac{\partial u}{\partial t} - T_1^2T_2^{2+}T_t^-\frac{\partial u}{\partial t}\,,\\ \varphi_1^- &= \frac{1}{2}T_t^-\frac{\partial u}{\partial t} - T_1^2T_2^{2-}T_t^-\frac{\partial u}{\partial t}\,.\end{aligned}$$

Даље, нека је $\varphi_1^+ = \varphi_{11}^+ - \varphi_{12}^+$, где је

$$\begin{aligned}\varphi_{11}^+ &= \frac{1}{2}T_t^-\frac{\partial u}{\partial t} - T_1^2T_2^{2+}T_t^-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h}{6}T_1^2T_t^-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial t}\,,\\ \varphi_{12}^+ &= \frac{h}{6}T_1^2T_t^-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial t}\,.\end{aligned}$$

Запишимо израз φ_{11}^+ у интегралном облику:

$$\varphi_{11}^+(x_1,\xi+0,t) =$$
$$-\frac{1}{h^2\tau}\int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{\xi}^{\xi+h}\int_{x_1}^{x_1'}\int_{x_1}^{x_1''}\int_{t-\tau}^{t} k_1(x_1')k_2(x_2')\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial t}(x_1''',x_2',t')dt'x_1'''dx_1''dx_2'dx_1'$$
$$+\frac{1}{h^2\tau}\int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{\xi}^{\xi+h}\int_{\xi}^{x_2'}\int_{x_1}^{x_1'}\int_{t-\tau}^{t} k_1(x_1')k_2(x_2')\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2\partial t}dx_1'',x_2'',t')dt'x_1''dx_2''dx_2'dx_1'$$
$$-\frac{1}{h^2\tau}\int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{\xi}^{\xi+h}\int_{\xi}^{x_2'}\int_{\xi}^{x_2''}\int_{t-\tau}^{t} k_1(x_1')k_2(x_2')\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2\partial t}(x_1',x_2''',t')dt'x_2'''dx_2''dx_2'dx_1'\,,$$

где је

$$k_1(x_1') = 1-|x_1-x_1'|/h\,,$$

и

$$k_2(x_2') = 1-(x_2'-x_2)/h.$$

Применом Коши-Шварцове неједнакости и сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h добијамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\varphi_{11}^+(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,.$$

Даље је,

$$\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\varphi_{12}^+(x,t)|^2 \le Ch^4\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial t}\right\|^2_{L_2(\Sigma\times(0,T))} \le Ch^4\|u\|^2_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,.$$

Из претходних оцена имамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\varphi_{1}^+(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,. \tag{3.8}$$

Аналогно добијамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\varphi_{1}^-(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)}\,. \tag{3.9}$$

Из (3.7),(3.8) и (3.9) следи

$$\left(\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|\varphi_1(\cdot,t)\|^2_{B_h^{-1}}\right)^{1/2} \le Ch^2(\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}) . \tag{3.10}$$

У тачки $x \notin \sigma_h$ имамо да је $\varphi_2(x,t) = 0$. За $x \in \sigma_h$ имамо да је

$$\varphi_2(x,t) = kh^{-1}(u_{\bar t} - T_1^2 u_{\bar t}),$$

и важи следећа репрезентација:

$$\varphi_2(x,t) = \frac{k}{h^2\tau} \int\limits_{x_1-h}^{x_1+h} \int\limits_{x_1'}^{x_1} \int\limits_{t-\tau}^{t} (x_1' - x_1'')k_1(x_1') \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial t}(x_1'', \xi, t')dt'dx_1''dx_1' .$$

Из претходног развоја директно добијамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t\in\omega_\tau^+} \sum_{x\in\sigma_h} |\varphi_2(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\|u\|_{W_2^{4,2}(\Sigma\times(0,T))} . \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) имамо

$$\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|\varphi(\cdot,t)\|^2_{B_h^{-1}} \le Ch^4(\|u\|^2_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|u\|^2_{W_2^{4,2}(Q_2)} + \|u\|^2_{W_2^{4,2}(\Sigma\times(0,T))}) . \tag{3.12}$$

Даље оценимо израз $\psi_{ij},\ i,j = 1,2$. У тачки $x \notin \sigma_h$ извршимо декомпозицију израза ψ_{ij} на следећи начин(в.[4]):

$$\psi_{ij} = \sum_{k=1}^{7} \psi_{ijk},$$

где је

$$\psi_{ij1} = T_1^2 T_2^2 T_t^- \Big(a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big) - \Big(T_1^2 T_2^2 a_{ij}\Big)\Big(T_1^2 T_2^2 T_t^- \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big) ,$$

$$\psi_{ij2} = \Big(T_1^2 T_2^2 a_{ij} - a_{ij}\Big)\Big(T_1^2 T_2^2 T_t^- \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big) ,$$

$$\psi_{ij3} = a_{ij}\Big(T_1^2 T_2^2 T_t^- \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{2}(u_{x_i \bar x_j} + u_{\bar x_i x_j})\Big) ,$$

$$\psi_{ij4} = T_1^2 T_2^2 T_t^- \Big(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - \Big(T_1^2 T_2^2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\Big)\Big(T_1^2 T_2^2 T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) ,$$

$$\psi_{ij5} = \Big(T_1^2 T_2^2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\big(a_{ij,x_i} + a_{ij,\bar x_i}\big)\Big)\Big(T_1^2 T_2^2 T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) ,$$

$$\psi_{ij6} = \frac{1}{2}\big(a_{ij,x_i} + a_{ij,\bar x_i}\big)\Big(T_1^2 T_2^2 T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\big(u_{\bar x_j} + u_{x_j}\big)\Big) ,$$

$$\psi_{ij7} = \frac{1}{4}\big(a_{ij,x_i} - a_{ij,\bar x_i}\big)\big(u_{\bar x_j} - u_{x_j}\big) .$$

Уведимо елементарне правоугаонике

$$E = (-1,1) \times (-1,1),$$
$$e = (x_1 - h, x_1 + h) \times (x_2 - h, x_2 + h).$$

Означимо

$$u^*(x^*,t^*) = u^*(x_1^*, x_2^*, t^*) = u(x_1 + hx_1^*, x_2 + hx_2^*, t + \tau t^*),$$
$$a_{ij}^*(x^*) = a_{ij}^*(x_1^*, x_2^*) = a_{ij}(x_1 + hx_1^*, x_2 + hx_2^*).$$

На основу интегралне репрезентације израза ψ_{ij1}:

$$\psi_{ij1}(x,t) = \frac{1}{h^2}\Bigg\{ \iint\limits_E k(x_1^*)k(x_2^*)a_{ij}^*(x^*)T_t^- \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i^* \partial x_j^*}(x^*,t^*)dt^*dx^*$$
$$- \iint\limits_E k(x_1^*)k(x_2^*)a_{ij}^*(x^*)dx^* \times \iint\limits_E k(x_1^*)k(x_2^*)T_t^- \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i^* \partial x_j^*}(x^*,t^*)dt^*dx^* \Bigg\},$$

где је $k(x_i^*) = 1 - |x_i|^*$, следи да је израз ψ_{ij1} ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{ij}^*, T_t^- u^*(\cdot,t)) \in W_q^1(E) \times W_{2q/(q-2)}^3(E), \;\; q > 2$$

и важи оцена

$$|\psi_{ij1}(\cdot,t)| \le \frac{C}{h^2} \|a_{ij}^*\|_{W_q^1(E)} \|T_t^- u^*(\cdot,t)\|_{W_{2q/(q-2)}^3(E)}.$$

Осим тога, $\psi_{ij1} = 0$ када је a_{ij}^* константа или када је u^* полином другог степена по x_1^* и x_2^*. Применом Леме 1.5 имамо (в.[11]):

$$|\psi_{ij1}(\cdot,t)| \le \frac{C}{h^2} |a_{ij}^*|_{W_q^1(E)} |T_t^- u^*(\cdot,t)|_{W_{2q/(q-2)}^3(E)}\,. \tag{3.13}$$

Враћајући се на старе промењљиве добијамо:

$$|a_{ij}^*|_{W_q^1(E)} \le Ch^{1-2/q} |a_{ij}|_{W_q^1(e)},$$
$$|T_t^- u^*(\cdot,t)|_{W_{2q/(q-2)}^3(E)} \le Ch^{3-(q-2)/q} |T_t^- u(\cdot,t)|_{W_{2q/(q-2)}^3(e)}.$$

На основу претходних оцена и (3.13) једноставно следи:

$$|\psi_{ij1}(\cdot,t)| \le Ch |a_{ij}|_{W_q^1(e)} |T_t^- u(\cdot,t)|_{W_{2q/(q-2)}^3(e)}.$$

Сумирањем по чворовима мреже $\omega_h \backslash \sigma_h$ и применом потапања

$$W_2^3(\Omega_k) \subset W_q^1(\Omega_k),$$
$$W_2^4(\Omega_k) \subset W_{2q/(q-2)}^3(\Omega_k), \;\; k = 1,2$$

имамо:

$$\begin{aligned}\Big(h^2\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{ij1}(\cdot,t)|^2\Big)^{1/2} &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_q^1(\Omega_1)}\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W^3_{2q/(q-2)}(\Omega_1)}\\ &+\|a_{ij}\|_{W_q^1(\Omega_2)}\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W^3_{2q/(q-2)}(\Omega_2)})\\ &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_1)}\\ &+\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_2)}).\end{aligned}$$

Даље, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+, после очигледне мајоризације, имамо

$$\begin{aligned}\Big(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{ij1}(x,t)|^2\Big)^{1/2} &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)}\\ &+\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)})\,.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Израз ψ_{ij2} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{ij},T_t^-u(\cdot,t))\in W_q^2(e)\times W^2_{2q/(q-2)}(e),\ q>2.$$

Осим тога, $\psi_{ij2}=0$ када је a_{ij} полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{ij2}(\cdot,t)|\le Ch|a_{ij}|_{W_q^2(e)}|T_t^-u(\cdot,t)|_{W^2_{2q/(q-2)}(e)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже $\omega_h\setminus\sigma_h$ и применом потапања

$$\begin{aligned}&W_2^3(\Omega_k)\subset W_q^2(\Omega_k),\\ &W_2^4(\Omega_k)\subset W^2_{2q/(q-2)}(\Omega_k),\ \ k=1,2\end{aligned}$$

имамо:

$$\begin{aligned}\Big(h^2\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{ij2}(\cdot,t)|^2\Big)^{1/2} &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_q^2(\Omega_1)}\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W^2_{2q/(q-2)}(\Omega_1)}\\ &+\|a_{ij}\|_{W_q^2(\Omega_2)}\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W^2_{2q/(q-2)}(\Omega_2)})\\ &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_1)}\\ &+\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_2)}).\end{aligned}$$

Даље, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+, после очигледне мајоризације, имамо

$$\begin{aligned}\Big(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{ij2}(x,t)|^2\Big)^{1/2} &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)}\\ &+\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)})\,.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Израз ψ_{ij3} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{ij}, u) \in C(\overline{\Omega}_k) \times W_2^{4,\,2}(g),\ \ k = 1, 2,$$

где је $g = e \times (t-\tau, t)$. Осим тога, $\psi_{ij3} = 0$ када је u полином трећег степена по x_1 и x_2 или полином првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{ij3}(x,t)| \le C\|a_{ij}\|_{C(\overline{\Omega}_k)} |u|_{W_2^{4,\,2}(g)}, \quad k = 1, 2.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h \backslash \sigma_h$ и применом потапања

$$W_2^3(\Omega_k) \subset C(\overline{\Omega}_k),\ \ k = 1, 2$$

имамо:

$$\begin{aligned}(3.16)\quad \left(h^2\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \sum_{x\in\omega_h\backslash\sigma_h} |\psi_{ij3}(x,t)|^2\right)^{1/2} &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} \\ &\quad +\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)})\,.\end{aligned}$$

Израз ψ_{ij4} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{ij}, T_t^- u(\cdot, t)) \in W_q^2(e) \times W_{2q/(q-2)}^2(e),\ \ q > 2.$$

Осим тога, $\psi_{ij4} = 0$ када је a_{ij} полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{ij4}(\cdot, t)| \le Ch|a_{ij}|_{W_q^2(e)} |T_t^- u(\cdot, t)|_{W_{2q/(q-2)}^2(e)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже $\omega_h \backslash \sigma_h$ и применом потапања

$$\begin{aligned}&W_2^3(\Omega_k) \subset W_q^2(\Omega_k),\\ &W_2^4(\Omega_k) \subset W_{2q/(q-2)}^2(\Omega_k),\ \ k = 1, 2\end{aligned}$$

имамо:

$$\begin{aligned}\left(h^2 \sum_{x\in\omega_h\backslash\sigma_h} |\psi_{ij4}(\cdot, t)|^2\right)^{1/2} &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_q^2(\Omega_1)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_{2q/(q-2)}^2(\Omega_1)} \\ &\quad +\|a_{ij}\|_{W_q^2(\Omega_2)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_{2q/(q-2)}^2(\Omega_2)}) \\ &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_1)} \\ &\quad +\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_2)}).\end{aligned}$$

Даље, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+, после очигледне мајоризације, имамо

$$\left(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{ij4}(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\big(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\big)\,. \tag{3.17}$$

Израз ψ_{ij5} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$\left(a_{ij},\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\in W_2^3(e)\times C(\overline{Q}_k),\ k=1,2.$$

Осим тога, $\psi_{ij5}=0$ када је a_{ij} полином другог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{ij5}(x,t)|\le Ch|a_{ij}|_{W_2^3(e)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{C(\overline{Q}_k)},\ k=1,2.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h\setminus\sigma_h$ и применом потапања

$$W_2^{3,3/2}(Q_k)\subset C(\overline{Q}_k),\ k=1,2$$

имамо:

$$\left(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{ij5}(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\big(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\big)\,. \tag{3.18}$$

Израз ψ_{ij6} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{ij},T_t^-u(\cdot,t))\in W_q^1(e)\times W_{2q/(q-2)}^3(e),\ q>2.$$

Осим тога, $\psi_{ij6}=0$ када је a_{ij} константа или када је u полином другог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{ij6}(\cdot,t)|\le Ch|a_{ij}|_{W_q^1(e)}|T_t^-u(\cdot,t)|_{W_{2q/(q-2)}^3(e)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже $\omega_h\setminus\sigma_h$ и применом потапања

$$W_2^4(\Omega_k)\subset W_{2q/(q-2)}^3(\Omega_k),$$
$$W_2^3(\Omega_k)\subset W_q^1(\Omega_k),\ k=1,2$$

имамо:

$$\begin{aligned}\Big(h^2\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{ij6}(\cdot,t)|^2\Big)^{1/2} &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_q^1(\Omega_1)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W^3_{2q/(q-2)}(\Omega_1)}\\ &\quad+\|a_{ij}\|_{W_q^1(\Omega_2)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W^3_{2q/(q-2)}(\Omega_2)})\\ &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_1)}\\ &\quad+\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_2)}).\end{aligned}$$

Даље, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+, после очигледне мајоризације, имамо

$$\Big(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{ij6}(x,t)|^2\Big)^{1/2} \le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} +\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)})\,. \tag{3.19}$$

Израз ψ_{ij7} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{ij},T_t^- u(\cdot,t))\in W_q^2(e)\times W^2_{2q/(q-2)}(e),\ q>2.$$

Осим тога, $\psi_{ij7}=0$ када је a_{ij} полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{ij7}(\cdot,t)|\le Ch|a_{ij}|_{W_q^2(e)}|T_t^- u(\cdot,t)|_{W^2_{2q/(q-2)}(e)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже $\omega_h\setminus\sigma_h$ и применом потапања

$$\begin{aligned}&W_2^4(\Omega_k)\subset W^2_{2q/(q-2)}(\Omega_k),\\ &W_2^3(\Omega_k)\subset W_q^2(\Omega_k),\ k=1,2\end{aligned}$$

имамо:

$$\begin{aligned}\Big(h^2\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{ij7}(\cdot,t)|^2\Big)^{1/2} &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_q^2(\Omega_1)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W^2_{2q/(q-2)}(\Omega_1)}\\ &\quad+\|a_{ij}\|_{W_q^2(\Omega_2)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W^2_{2q/(q-2)}(\Omega_2)})\\ &\le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_1)}\\ &\quad+\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_2)}).\end{aligned}$$

Даље, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+, после очигледне мајоризације, имамо

$$\Big(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{ij7}(x,t)|^2\Big)^{1/2} \le Ch^2(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} +\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)})\,. \tag{3.20}$$

Из оцена (3.14)-(3.20) следи оцена

$$
(3.21) \quad \left(h^2\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h} |\psi_{ij}(x,t)|^2 \right)^{1/2} \leq Ch^2\Big(\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_1)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)} \Big) \,.
$$

Остаје да оценимо израз ψ_{ij} за $x \in \sigma_h$. У тачки $x \in \sigma_h$ раставимо ψ_{1j} на следећи начин:

$$
\psi_{1j} = \psi_{1j}^+ + \psi_{1j}^- \,, \;\; \psi_{1j}^\pm = \sum_{k=1}^{7} \psi_{1jk}^\pm,
$$

где је:

$$
\begin{aligned}
\psi_{1j1}^\pm &= T_1^2T_2^{2\pm}T_t^-\Big(a_{1j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j}\Big) - 2\Big(T_1^2T_2^{2\pm}a_{1j}\Big)\Big(T_1^2T_2^{2\pm}T_t^-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j}\Big)\,,\\
\psi_{1j2}^\pm &= \Big(2T_1^2T_2^{2\pm}a_{1j} - a_{1j}\Big)\Big(T_1^2T_2^{2\pm}T_t^-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j}\Big)\,,\\
\psi_{1j3}^\pm &= \frac{1}{2}a_{1j}\Big(2T_1^2T_2^{2\pm}T_t^-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j} - \frac{1}{2}(u_{x_1\bar{x}_j} + u_{\bar{x}_1x_j})\Big)\,,\\
\psi_{1j4}^\pm &= T_1^2T_2^{2\pm}T_t^-\Big(\frac{\partial a_{1j}}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - 2\Big(T_1^2T_2^{2\pm}\frac{\partial a_{1j}}{\partial x_1}\Big)\Big(T_1^2T_2^{2\pm}T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\,,\\
\psi_{1j5}^\pm &= \Big(2T_1^2T_2^{2\pm}\frac{\partial a_{1j}}{\partial x_1} - \frac{1}{2}(a_{1j,x_1} + a_{1j,\bar{x}_1})\Big)\Big(T_1^2T_2^{2\pm}T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\,,\\
\psi_{1j6}^\pm &= \frac{1}{4}(a_{1j,x_1} + a_{1j,\bar{x}_1})\Big(2T_1^2T_2^{2\pm}T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{1}{2}(u_{x_j} + u_{\bar{x}_j})\Big)\,,\\
\psi_{1j7}^\pm &= \frac{1}{8}(a_{1j,x_1} - a_{1j,\bar{x}_1})(u_{\bar{x}_j} - u_{x_j})\,.
\end{aligned}
$$

Уведимо елементарни правоугаоник

$$
e_1 = (x_1 - h, x_1 + h) \times (x_2, x_2 + h).
$$

Израз ψ_{1j1}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$
(a_{1j}, T_t^- u(\cdot,t)) \in W_q^1(e_1) \times W_{2q/(q-2)}^3(e_1)\,, \quad q > 2\,.
$$

Осим тога, $\psi_{1j1}^+ = 0$ када је a_{1j} константа или када је u полином другог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$
|\psi_{1j1}^+(\cdot,t)| \leq Ch|a_{1j}|_{W_q^1(e_1)} |T_t^- u(\cdot,t)|_{W_{2q/(q-2)}^3(e_1)}\,.
$$

Сумирањем по чворовима мреже σ_h и применом потапања

$$W_2^3(\Omega_2) \subset W_q^1(\Omega_2),$$
$$W_2^4(\Omega_2) \subset W_{2q/(q-2)}^3(\Omega_2), \quad q > 2,$$

имамо:

$$\frac{h^3}{k+h} \sum_{x \in \sigma_h} |\psi_{1j1}^+(\cdot, t)|^2 \le Ch^4 \|a_{1j}\|^2_{W_2^3(\Omega_2)} \|T_t^- u(\cdot, t)\|^2_{W_2^4(\Omega_2)} .$$

Даље, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ добијамо

$$(3.22) \qquad \left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t \in \omega_\tau^+} \sum_{x \in \sigma_h} |\psi_{1j1}^+(x, t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^2 \|a_{1j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)} .$$

Израз ψ_{1j2}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{1j}, T_t^- u(\cdot, t)) \in W_q^1(e_1) \times W_{2q/(q-2)}^2(e_1) , \quad q > 2 .$$

Осим тога, $\psi_{1j2}^+ = 0$ када је a_{1j} константа или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 добијамо следећу оцену израза ψ_{1j2}^+:

$$|\psi_{1j2}^+(\cdot, t)| \le C |a_{1j}|_{W_q^1(e_1)} |T_t^- u(\cdot, t)|_{W_{2q/(q-2)}^2(e_1)} .$$

Сумирањем по чворовима мреже σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$W_2^3(\Omega_2) \subset W_q^2(\Omega_2),$$
$$W_2^4(\Omega_2) \subset W_{2q/(q-2)}^3(\Omega_2), \quad q > 2$$

добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{k+h} \sum_{x \in \sigma_h} |\psi_{1j2}^+(\cdot, t)|^2 &\le Ch^3 \|a_{1j}\|^2_{W_q^1(\Omega_2^h)} \|T_t^- u(\cdot, t)\|^2_{W_{2q/(q-2)}^2(\Omega_2^h)} \\ &\le Ch^4 \|a_{1j}\|^2_{W_q^2(\Omega_2)} \|T_t^- u(\cdot, t)\|^2_{W_{2q/(q-2)}^3(\Omega_2)} \\ &\le Ch^4 \|a_{1j}\|^2_{W_2^3(\Omega_2)} \|T_t^- u(\cdot, t)\|^2_{W_2^4(\Omega_2)} , \end{aligned}$$

где је $\Omega_2^h = (0,1) \times (\xi, \xi + h)$. Из добијене неједнакости, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ следи:

$$(3.23) \qquad \left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t \in \omega_\tau^+} \sum_{x \in \sigma_h} |\psi_{1j2}^+(x, t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^2 \|a_{1j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)} .$$

Израз ψ_{1j3}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{1j}, u) \in C(\overline{\Omega}_2) \times W_2^{3,\,3/2}(g_1),$$

где је $g_1 = e_1 \times (t-\tau, t)$. Осим тога, $\psi_{1j3}^+ = 0$ када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Даље, применом Леме 1.5 добијамо:

$$|\psi_{1j3}^+(x,t)| \le \frac{C}{h} \|a_{1j}\|_{C(\overline{\Omega}_2)} |u|_{W_2^{3,3/2}(g_1)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, коришћењем Леме 1.1 и потапања

$$W_2^3(\Omega_2) \subset C(\overline{\Omega}_2)$$

имамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t \in \omega_\tau^+} \sum_{x \in \sigma_h} |\psi_{1j3}^+(x,t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^{3/2} \|a_{1j}\|_{\mathbb{C}(\overline{\Omega}_2)} \|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2^h)} \le Ch^2 \|a_{1j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}, \tag{3.24}$$

где је $Q_2^h = \Omega_2^h \times (0,T)$.

Израз ψ_{1j4}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{1j}, T_t^- u(\cdot,t)) \in W_q^2(e_1) \times W_{2q/(q-2)}^2(e_1)\,, \quad q > 2.$$

Осим тога, $\psi_{1j4}^+ = 0$ када је a_{1j} полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{1j4}^+(\cdot,t)| \le Ch |a_{1j}|_{W_q^2(e_1)} |T_t^- u(\cdot,t)|_{W_{2q/(q-2)}^2(e_1)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже σ_h и применом потапања

$$W_2^3(\Omega_2) \subset W_q^2(\Omega_2),$$
$$W_2^4(\Omega_2) \subset W_{2q/(q-2)}^2(\Omega_2)$$

имамо:

$$\frac{h^3}{k+h} \sum_{x \in \sigma_h} |\psi_{1j4}^+(\cdot,t)|^2 \le Ch^4 \|a_{1j}\|_{W_2^3(\Omega_2)}^2 \|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_2)}^2\,.$$

Даље, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ добијамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t \in \omega_\tau^+} \sum_{x \in \sigma_h} |\psi_{1j4}^+(x,t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^2 \|a_{1j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,. \tag{3.25}$$

Израз ψ_{1j5}^{+} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$\left(a_{1j}, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \in W_2^2(e_1) \times C(\overline{Q}_2)\,.$$

Даље, $\psi_{1j5}^{+} = 0$ када је a_{1j} полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{1j5}^{+}(x,t)| \le C|a_{1j}|_{W_2^2(e_1)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{C(\overline{Q}_2)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h,применом Леме (1.1) и потапања

$$W_2^{3,3/2}(Q_2) \subset C(\overline{Q}_2)$$

имамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t\in\omega_\tau^+} \sum_{x\in\sigma_h} |\psi_{1j5}^{+}(x,t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^{3/2} \|a_{1j}\|_{W_2^2(\Omega_2^h)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{C(\overline{Q}_2)} \le Ch^2 \|a_{1j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,. \tag{3.26}$$

Израз ψ_{1j6}^{+} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{1j}, u) \in C(\overline{\Omega}_2) \times W_2^{3,3/2}(g_1)\,.$$

Даље, $\psi_{1j6}^{+} = 0$ када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо

$$|\psi_{1j6}^{+}(x,t)| \le \frac{C}{h} \|a_{1j}\|_{C(\overline{\Omega}_2)} |u|_{W_2^{3,3/2}(g_1)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, коришћења Леме 1.1 и потапања

$$W_2^3(\Omega_2) \subset C(\overline{\Omega}_2)$$

имамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t\in\omega_\tau^+} \sum_{x\in\sigma_h} |\psi_{1j6}^{+}(x,t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^{3/2} \|a_{1j}\|_{C(\overline{\Omega}_2)} \|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2^h)} \le Ch^2 \|a_{1j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,. \tag{3.27}$$

Израз ψ_{1j7}^{+} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{1j}, T_t^- u(\cdot,t)) \in W_q^2(e_1) \times W_{2q/(q-2)}^2(e_1)\,,\ q > 2\,.$$

Даље, $\psi_{1j7}^+ = 0$ када је a_{1j} полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{1j7}^+(\cdot,t)| \le Ch|a_{1j}|_{W_q^2(e_1)}|T_t^- u(\cdot,t)|_{W^2_{2q/(q-2)}(e_1)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже σ_h и применом потапања

$$W_2^3(\Omega_2) \subset W_q^2(\Omega_2),$$
$$W_2^4(\Omega_2) \subset W^2_{2q/(q-2)}(\Omega_2)$$

имамо:

$$\frac{h^3}{k+h}\sum_{x\in\sigma_h}|\psi_{1j7}^+(\cdot,t)|^2 \le Ch^4\|a_{1j}\|^2_{W_2^3(\Omega_2)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|^2_{W_2^4(\Omega_2)}\,.$$

Даље, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ добијамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\psi_{1j7}^+(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\|a_{1j}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,. \tag{3.28}$$

Из (3.22)-(3.28) добијамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\psi_{1j}^+(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\|a_{1j}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,. \tag{3.29}$$

Аналогна оцена важи за израз ψ_{1j}^-:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\psi_{1j}^-(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\|a_{1j}\|_{W_2^3(\Omega_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)}\,. \tag{3.30}$$

Из (3.21), (3.29) и (3.30) имамо:

$$\begin{aligned}\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\|\psi_{1j}(\cdot,t)\|^2_{B_h^{-1}} \le Ch^4(&\|a_{1j}\|^2_{W_2^3(\Omega_1)}\|u\|^2_{W_2^{4,2}(Q_1)}\\ &+\|a_{1j}\|^2_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|^2_{W_2^{4,2}(Q_2)}).\end{aligned} \tag{3.31}$$

Остаје нам још да оценимо израз ψ_{2j} у тачки $x \in \sigma_h$. Важи да је $\psi_{2j} = \eta_{j,\bar{x}_2}$, где је

$$\eta_j = T_1^2T_2^+T_t^-\Big(a_{2j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - \frac{1}{2}\Big(a_{2j}u_{x_j} + a_{2j}^{+2}u_{\bar{x}_j}\Big)\,,$$

и $a^{+2}(x_1,x_2)=a_2(x_1,x_2+h)$. Важи елементарна неједнакост:

$$\frac{h^2}{k+h}\psi_{2j}^2(x_1,\xi,t)\le C(|\eta_j(x_1,\xi,t)|^2+|\eta_j(x_1,\xi-h,t)|^2)\,.$$

Раставимо $\eta_j=\eta_{j1}+\eta_{j2}+\eta_{j3}+\eta_{j4}$, где је

$$\begin{aligned}
\eta_{j1}&=T_1^2T_2^+T_t^-\Big(a_{2j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)-\Big(T_1^2T_2^+a_{2j}\Big)\Big(T_1^2T_2^+T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\,,\\
\eta_{j2}&=\Big(T_1^2T_2^+a_{2j}-\frac{1}{2}(a_{2j}+a_{2j}^{+2})\Big)\Big(T_1^2T_2^+T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\,,\\
\eta_{j3}&=\frac{1}{2}(a_{2j}+a_{2j}^{+2})\Big(T_1^2T_2^+T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{1}{2}(u_{x_j}+u_{\bar{x}_j}^{+2})\Big),\\
\eta_{j4}&=\frac{1}{4}(a_{2j}-a_{2j}^{+2})(u_{\bar{x}_j}^{+2}-u_{x_j}).
\end{aligned}$$

Израз η_{j1} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{2j},T_t^-u(\cdot,t))\in W_q^1(e_1)\times W_{2q/(q-2)}^2(e_1)\,,\quad q>2\,.$$

Осим тога, $\eta_{j1}=0$ када је a_{2j} константа или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\eta_{j1}(\cdot,t)|\le Ch|a_{2j}|_{W_q^1(e_1)}|T_t^-u(\cdot,t)|_{W_{2q/(q-2)}^2(e_1)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже σ_h, уз примену Леме 1.1 и потапања

$$\begin{aligned}
&W_2^3(\Omega_2)\subset W_q^2(\Omega_2),\\
&W_2^4(\Omega_2)\subset W_{2q/(q-2)}^3(\Omega_2),\quad q>2
\end{aligned}$$

имамо:

$$\begin{aligned}
h\sum_{x\in\sigma_h}|\eta_{j1}(\cdot,t)|^2&\le Ch^3\|a_{2j}\|_{W_q^1(\Omega_2^h)}^2\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W_{2q/(q-2)}^2(\Omega_2^h)}^2\\
&\le Ch^4\|a_{2j}\|_{W_q^2(\Omega_2)}^2\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W_{2q/(q-2)}^3(\Omega_2)}^2\\
&\le Ch^4\|a_{2j}\|_{W_2^3(\Omega_2)}^2\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega_2)}^2.
\end{aligned}$$

Даље, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ добијамо:

$$\text{(3.32)}\qquad \Bigg(\tau h\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\eta_{j1}(x,t)|^2\Bigg)^{1/2}\le Ch^2\|a_{2j}\|_{W_2^3(\Omega_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}.$$

Израз η_{j2} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$\left(a_{2j},\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\in W_2^2(e_1)\times C(\overline{Q}_2)\ .$$

Осим тога, $\eta_{j2} = 0$ када је a_{2j} полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\eta_{j2}(x,t)| \le Ch|a_{2j}|_{W_2^2(e_1)} \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big\|_{C(\overline{Q}_2)}.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$W_2^{3,3/2}(Q_2) \subset C(\overline{Q}_2)$$

имамо:

$$\left(\tau h \sum_{t\in\omega_\tau^+} \sum_{x\in\sigma_h} |\eta_{j2}(x,t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^{3/2} \|a_{2j}\|_{W_2^2(\Omega_2^h)} \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big\|_{C(\overline{Q}_2)} \le Ch^2 \|a_{2j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}. \tag{3.33}$$

Израз η_{j3} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{2j}, u) \in C(\overline{\Omega}_2) \times W_2^{3,3/2}(g_1).$$

Осим тога, $\eta_{j3} = 0$ када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\eta_{j3}(x,t)| \le C\|a_{2j}\|_{C(\overline{\Omega}_2)} |u|_{W_2^{3,3/2}(g_1)}.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$W_2^3(\Omega_2) \subset C(\overline{\Omega}_2)$$

имамо:

$$\left(\tau h \sum_{t\in\omega_\tau^+} \sum_{x\in\sigma_h} |\eta_{j3}(x,t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^{3/2} \|a_{2j}\|_{C(\overline{\Omega}_2)} \|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2^h)} \le Ch^2 \|a_{2j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}. \tag{3.34}$$

Израз η_{j4} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_{2j}, T_t^- u(\cdot,t)) \in W_q^1(e_1) \times W_{2q/(q-2)}^2(e_1).$$

Осим тога, $\eta_{j4} = 0$ када је a_{2j} константа или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\eta_{j4}(\cdot,t)| \le Ch|a_{2j}|_{W_q^1(e_1)} |T_t^- u(\cdot,t)|_{W_{2q/(q-2)}^2(e_1)}.$$

После сумирања по чворовима мреже σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$W_2^3(\Omega_2) \subset W_q^2(\Omega_2),$$
$$W_2^4(\Omega_2) \subset W_{2q/(q-2)}^3(\Omega_2), \quad q > 2$$

имамо:

$$\begin{aligned} h \sum_{x \in \sigma_h} |\eta_{j4}(\cdot, t)|^2 &\le Ch^3 \|a_{2j}\|^2_{W_q^1(\Omega_2^h)} \|T_t^- u(\cdot, t)\|^2_{W^2_{2q/(q-2)}(\Omega_2^h)} \\ &\le Ch^4 \|a_{2j}\|^2_{W_q^2(\Omega_2)} \|T_t^- u(\cdot, t)\|^2_{W^3_{2q/(q-2)}(\Omega_2)} \\ &\le Ch^4 \|a_{2j}\|^2_{W_2^3(\Omega_2)} \|T_t^- u(\cdot, t)\|^2_{W_2^4(\Omega_2)}. \end{aligned}$$

Даље, сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ имамо:

$$\left(\tau h \sum_{t \in \omega_\tau^+} \sum_{x \in \sigma_h} |\eta_{j4}(x, t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^2 \|a_{2j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}. \tag{3.35}$$

На основу оцена оцена (3.32)-(3.35) имамо оцену израза $\eta_j(x_1, \xi, t)$:

$$\left(\tau h \sum_{t \in \omega_\tau^+} \sum_{x \in \sigma_h} |\eta_j(x_1, \xi, t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^2 \|a_{2j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)} . \tag{3.36}$$

Аналогна је оцена израза $\eta_j(x_1, \xi - h, t)$:

$$\left(\tau h \sum_{t \in \omega_\tau^+} \sum_{x \in \sigma_h} |\eta_j(x_1, \xi - h, t)|^2 \right)^{1/2} \le Ch^2 \|a_{2j}\|_{W_2^3(\Omega_1)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} . \tag{3.37}$$

Из (3.21), (3.36) и (3.37) имамо

$$\begin{aligned} \tau \sum_{t \in \omega_\tau^+} \|\psi_{2j}(\cdot, t)\|^2_{B_h^{-1}} \le Ch^2 (&\|a_{2j}\|_{W_2^3(\Omega_1)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} \\ &+ \|a_{2j}\|_{W_2^3(\Omega_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Коначно, из (3.6), (3.12), (3.31) и (3.38) следи оцена (3.4). □

Напомена 1. *Добијена оцена* (3.4) *је сагласна са глаткошћу коефицијената и глаткошћу решења диференцијалног проблема* (3.1).

3.2 Параболички проблем са временски зависним коефицијентима

3.2.1 Поставка проблема и нумеричка апроксимација

Размотримо дводимензиони почетно-гранични проблем за једначину топлоте са концентрисаним капацитетом на правој $x_2 = \xi$ и временски зависним коефицијентима (в.[8]):

$$
\begin{aligned}
&(1 + k\delta(x_2 - \xi))\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f\,, \quad \text{на } Q\,,\\
&u = 0\,, \text{ на } \partial\Omega \times (0,T)\,,\\
&u(x,0) = u_0(x)\,, \text{ на } \Omega\,,
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

где је $\delta(x)$ Диракова делта функција, $k > 0$, $\Omega = (0,1)^2$ и $Q = \Omega \times (0,T)$. Подобласти су дефинисане на исти начин као у поглављу 3.1.

Претпоставимо да су коефицијенти a_i монотоно опадајуће функције по промењивом t које задовољавају услов елиптичности и да

$$
\begin{aligned}
&a_i \in W_2^{3,\,3/2}(Q_1) \cap W_2^{3,\,3/2}(Q_2),\\
&f \in W_2^{2,1}(Q).
\end{aligned}
$$

Тада, уз претходне услове, услове сагласности на граници области Q и услове конјугације на Σ (3.2) потражимо решење проблема (3.39), тако да

$$
u \in W_2^{4,\,2}(Q_1) \cap W_2^{4,\,2}(Q_2) \cap W_2^{4,\,2}(\Sigma \times (0,T)).
$$

Проблем (3.39) се може апроксимирати на мрежи $\overline{Q}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ следећом диференцијском схемом са усредњеном десном страном:

$$
\begin{aligned}
&(1 + k\delta_h(x_2 - \xi))v_{\bar{t}} + L_h v = T_1^2 T_2^2 T_t^- f\,, \text{на } Q_{h\tau}\,,\\
&v = 0\,, \text{ на } \gamma_h \times \omega_\tau^+\,,\\
&v(x,0) = u_0(x)\,, \text{ на } \omega_h\,,
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

где је

$$
L_h v = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}((a_i v_{x_i})_{\bar{x}_i} + (a_i v_{\bar{x}_i})_{x_i}).
$$

3.2.2 Конвергенција у простору $\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})$

У овом делу доказаћемо конвергенцију диференцијске схеме (3.40) у простору $\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})$. Важи следеће тврђење:

Теорема 3.2. *Решење диференцијске схеме* (3.40) *конвергира у простору* $\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})$ *ка решењу почетно-граничног проблема* (3.39) u*, уз услов* $c_1h^2 \leq \tau \leq c_2h^2$*, важи следећа оцена:*

$$\begin{aligned}(3.41)\quad \|u-v\|_{\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \leq Ch^2 &\left(\max_i \|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)} + \max_i \|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)} + 1\right)\\ &\times\left(\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)} + \|u\|_{W_2^{4,2}(\Sigma\times(0,T))}\right).\end{aligned}$$

Доказ. Нека је u решење почетно-граничног проблема (3.39) и v решење диференцијске схеме (3.40). Тада грешка

$$z = u - v$$

задовољава услове:

$$(3.42)\qquad \begin{aligned}&(1+k\delta_h(x_2-\xi))z_{\bar{t}} + L_h z = \varphi + \psi\,,\ \text{на } Q_{h\tau}\,,\\ &z = 0\,,\ \text{на } \gamma_h \times \omega_\tau^+\,,\\ &z(x,0) = 0\,,\ \text{на } \omega_h\,,\end{aligned}$$

где је

$$\varphi = u_{\bar{t}} - T_1^2T_2^2T_t^-\frac{\partial u}{\partial t} + k\delta_h(x_2-\xi)(u_{\bar{t}} - T_1^2u_{\bar{t}})\,,$$

и $\psi = \psi_1 + \psi_2$, где је

$$\psi_i = T_1^2T_2^2T_t^-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) - \frac{1}{2}((a_iu_{x_i})_{\bar{x}_i} + (a_iu_{\bar{x}_i})_{x_i})\,,\ i=1,2\,.$$

Применом Леме 2.5 директно добијамо априорну оцену диференцијске схеме (3.42):

$$(3.43)\qquad \|z\|_{\widetilde{W}_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \leq C\left(\tau\sum_{t\in w_\tau^+}(\|\varphi(\cdot,t)\|^2_{B_h^{-1}} + \|\psi(\cdot,t)\|^2_{B_h^{-1}})\right)^{1/2}.$$

Приметимо да априорна оцена (3.43) није валидна у случају једначине са мешовитим изводима.

На тај начин је проблем оцене диференцијске схеме (3.40), сведен на оцену десне стране неједнакости (3.43).

За израз φ смо већ показали да важи оцена (в.(3.12)):

$$\left(\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|\varphi(\cdot,t)\|^2_{B_h^{-1}}\right)^{1/2} \le Ch^2\Big(\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)} + \|u\|_{W_2^{4,2}(\Sigma\times(0,T))}\Big)\,. \tag{3.44}$$

Зато сада оценимо израз ψ. У тачки $x \notin \sigma_h$ извршимо декомпозицију израза ψ_i на следећи начин (в.[4]):

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{7} \psi_{ik},$$

где је

$$\begin{aligned}
\psi_{i1} &= T_1^2T_2^2T_t^-\Big(a_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\Big) - \Big(T_1^2T_2^2T_t^- a_i\Big)\Big(T_1^2T_2^2T_t^-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\Big)\,,\\
\psi_{i2} &= \Big(T_1^2T_2^2T_t^- a_i - a_i\Big)\Big(T_1^2T_2^2T_t^-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\Big)\,,\\
\psi_{i3} &= a_i\Big(T_1^2T_2^2T_t^-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - u_{x_i\bar{x}_i}\Big)\,,\\
\psi_{i4} &= T_1^2T_2^2T_t^-\Big(\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) - \Big(T_1^2T_2^2T_t^-\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\Big)\Big(T_1^2T_2^2T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\,,\\
\psi_{i5} &= \Big(T_1^2T_2^2T_t^-\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\big(a_{i,x_i} + a_{i,\bar{x}_i}\big)\Big)\Big(T_1^2T_2^2T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\,,\\
\psi_{i6} &= \frac{1}{2}\big(a_{i,x_i} + a_{i,\bar{x}_i}\big)\Big(T_1^2T_2^2T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\big(u_{\bar{x}_i} + u_{x_i}\big)\Big)\,,\\
\psi_{i7} &= \frac{1}{4}\big(a_{i,x_i} - a_{i,\bar{x}_i}\big)\big(u_{\bar{x}_i} - u_{x_i}\big)\,.
\end{aligned}$$

Израз ψ_{i1} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_i, u) \in W_q^{1,\,1/2}(e) \times W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(e),$$

где је $e = (x_1 - h, x_1 + h) \times (x_2 - h, x_2 + h) \times (t - \tau, t)\,, q > 2$. Осим тога, $\psi_{i1} = 0$ када је a_i константа или када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{i1}(x,t)| \le C|a_i|_{W_q^{1,\,1/2}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(e)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h\backslash\sigma_h$ и применом потапања

$$\begin{aligned}
&W_2^{3,\,3/2}(Q_k) \subset W_q^{1,\,1/2}(Q_k),\\
&W_2^{4,\,2}(Q_k) \subset W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(Q_k),\quad k = 1, 2
\end{aligned}$$

имамо:

$$(3.45)\quad \left(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{i1}(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\big(\|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\big)\,.$$

Израз ψ_{i2} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_i,u)\in W_q^{2,\,1}(e)\times W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e),\ \ q>2.$$

Осим тога, $\psi_{i2}=0$ када је a_i полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{i2}(x,t)|\le C|a_i|_{W_q^{2,\,1}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h\setminus\sigma_h$ и применом потапања

$$\begin{aligned}&W_2^{3,\,3/2}(Q_k)\subset W_q^{2,1}(Q_k),\\ &W_2^{4,\,2}(Q_k)\subset W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(Q_k),\ \ k=1,2\end{aligned}$$

имамо:

$$(3.46)\quad \left(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{i2}(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\big(\|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\big)\,.$$

Израз ψ_{i3} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_i,u)\in C(\overline{Q}_k)\times W_2^{4,\,2}(e)\ ,k=1,2.$$

Осим тога, $\psi_{i3}=0$ када је u полином трећег степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{i3}(x,t)|\le C\|a_i\|_{C(\overline{Q}_k)}|u|_{W_2^{4,\,2}(e)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h\setminus\sigma_h$ и применом потапања

$$W_2^{3,\,3/2}(Q_k)\subset C(Q_k),\ \ k=1,2$$

имамо:

$$(3.47)\quad \left(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\setminus\sigma_h}|\psi_{i3}(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\big(\|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\big)\,.$$

Израз ψ_{i4} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_i, u) \in W_q^{2,1} \times W_{2q/(q-2)}^{2,1}(e), \; q > 2.$$

Осим тога, $\psi_{i4} = 0$ када је a_i полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{i4}(x,t)| \le C |a_i|_{W_q^{2,1}(e)} |u|_{W_{2q/(q-2)}^{2,1}(e)} .$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h \backslash \sigma_h$ и применом потапања

$$\begin{aligned} &W_2^{3,3/2}(Q_k) \subset W_q^{2,1}(Q_k), \\ &W_2^{4,2}(Q_k) \subset W_{2q/(q-2)}^{2,1}(Q_k), \; k = 1,2 \end{aligned}$$

имамо:

$$\left(h^2 \tau \sum_{t \in \omega_\tau^+} \sum_{x \in \omega_h \backslash \sigma_h} |\psi_{i4}(x,t)|^2 \right)^{1/2} \le C h^2 \big(\|a_i\|_{W_2^{3,3/2}(Q_1)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_i\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)} \big) . \tag{3.48}$$

Израз ψ_{i5} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$\left(a_i, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in W_2^{3,3/2}(e) \times C(\overline{Q}_k), \; k = 1,2.$$

Осим тога, $\psi_{i5} = 0$ када је a_i полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{i5}(x,t)| \le C |a_i|_{W_2^{3,3/2}(e)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C(\overline{Q}_k)} .$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h \backslash \sigma_h$ и применом потапања

$$W_2^{3,3/2}(Q_k) \subset C(Q_k), \; k = 1,2$$

имамо:

$$\left(h^2 \tau \sum_{t \in \omega_\tau^+} \sum_{x \in \omega_h \backslash \sigma_h} |\psi_{i5}(x,t)|^2 \right)^{1/2} \le C h^2 \big(\|a_i\|_{W_2^{3,3/2}(Q_1)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_i\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)} \big) . \tag{3.49}$$

Израз ψ_{i6} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_i, u) \in W_q^{1,1/2}(e) \times W_{2q/(q-2)}^{3,3/2}(e), \, q > 2.$$

Осим тога, $\psi_{i6} = 0$ када је a_i константа или када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{i6}(x,t)| \le C|a_i|_{W_q^{1,\,1/2}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(e)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h \backslash \sigma_h$ и применом потапања

$$W_2^{4,\,2}(Q_k) \subset W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(Q_k),$$
$$W_2^{3,\,3/2}(Q_k) \subset W_q^{1,\,1/2}(Q_k),\ k=1,2$$

имамо:

$$\left(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\backslash\sigma_h}|\psi_{i6}(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2(\|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)})\,. \tag{3.50}$$

Израз ψ_{i7} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_i,u) \in W_q^{2,1}(e) \times W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e),\ q>2.$$

Осим тога, $\psi_{i7} = 0$ када је a_i полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{i7}(x,t)| \le C|a_i|_{W_q^{2,\,1}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h \backslash \sigma_h$ и применом потапања

$$W_2^{4,\,2}(Q_k) \subset W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(Q_k),$$
$$W_2^{3,\,3/2}(Q_k) \subset W_q^{2,\,1}(Q_k),\ k=1,2$$

имамо:

$$\left(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\backslash\sigma_h}|\psi_{i7}(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2(\|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_i\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)})\,. \tag{3.51}$$

Из оцена (3.45)-(3.51) добијамо оцену

$$\left(h^2\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\omega_h\backslash\sigma_h}|\psi_i(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\Big(\|a_i\|_{W_2^{3,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_i\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\Big)\,. \tag{3.52}$$

У тачки $x \in \sigma_h$ раставимо

$$\psi_1 = \psi_1^+ + \psi_1^-\,,\ \psi_1^\pm = \sum_{k=1}^{7} \psi_{1k}^\pm,$$

где је:

$$\begin{aligned}
\psi_{11}^\pm &= T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- \Big(a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big) - 2\Big(T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- a_1\Big)\Big(T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big)\,,\\
\psi_{12}^\pm &= \Big(2T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- a_1 - a_1\Big)\Big(T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big)\,,\\
\psi_{13}^\pm &= \frac{1}{2} a_1 \Big(2T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - u_{x_1\bar{x}_1}\Big)\,,\\
\psi_{14}^\pm &= T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- \Big(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) - 2\Big(T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\Big)\Big(T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)\,,\\
\psi_{15}^\pm &= \Big(2T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- \frac{\partial a_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\big(a_{1,x_1} + a_{1,\bar{x}_1}\big)\Big)\Big(T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)\,,\\
\psi_{16}^\pm &= \frac{1}{4}\big(a_{1,x_1} + a_{1,\bar{x}_1}\big)\Big(2T_1^2 T_2^{2\pm} T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\big(u_{\bar{x}_1} + u_{x_1}\big)\Big)\,,\\
\psi_{17}^\pm &= \frac{1}{8}\big(a_{1,x_1} - a_{1,\bar{x}_1}\big)\big(u_{\bar{x}_1} - u_{x_1}\big)\,.
\end{aligned}$$

Израз ψ_{11}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in W_q^{1,\,1/2}(e) \times W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(e),$$

где је $e = (x_1 - h, x_1 + h) \times (x_2, x_2 + h) \times (t - \tau, t)\,, q > 2$. Осим тога, $\psi_{11}^+ = 0$ када је a_1 константа или када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{11}^+(x,t)| \le C|a_1|_{W_q^{1,\,1/2}(e)} |u|_{W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(e)}\,.$$

Сумирањем по чворовима мреже σ_h и применом потапања

$$\begin{aligned}
&W_2^{3,\,3/2}(Q_2) \subset W_q^{1,\,1/2}(Q_2),\\
&W_2^{4,\,2}(Q_2) \subset W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(Q_2), \quad q > 2
\end{aligned}$$

имамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t \in \omega_\tau^+} \sum_{x \in \sigma_h} |\psi_{11}^+(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2 \|a_1\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,. \tag{3.53}$$

Израз ψ_{12}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in W_q^{1,\,1/2}(e) \times W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e)\,, q > 2.$$

Осим тога, $\psi_{12}^+ = 0$ када је a_1 константа или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{12}^+(x,t)| \le \frac{C}{h} |a_1|_{W_q^{1,\,1/2}(e)} |u|_{W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e)} \,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$\begin{aligned} &W_2^{3,\,3/2}(Q_2) \subset W_q^{2,\,1}(Q_2), \\ &W_2^{4,\,2}(Q_2) \subset W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(Q_2), \end{aligned}$$

имамо:

$$\begin{aligned} (3.54) \quad \left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t\in\omega_\tau^+} \sum_{x\in\sigma_h} |\psi_{12}^+(x,t)|^2 \right)^{1/2} &\le C h^{3/2} \|a_1\|_{W_q^{1,\,1/2}(Q_2^h)} \|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(Q_2^h)} \\ &\le C h^2 \|a_1\|_{W_q^{2,\,1}(Q_2)} \|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(Q_2)} \\ &\le C h^2 \|a_1\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)} \|u\|_{W_2^{4,\,2}(Q_2)}, \end{aligned}$$

где је $Q_2^h = (0,1) \times (\xi, \xi+h) \times (0,T)$.

Израз ψ_{13}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_2) \times W_2^{3,\,3/2}(e)\,.$$

Осим тога, $\psi_{13}^+ = 0$ када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{13}^+(x,t)| \le \frac{C}{h} \|a_1\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_2)} |u|_{W_2^{3,\,3/2}(e)} \,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$W_2^{3,\,3/2}(Q_2) \subset \mathbb{C}(\overline{Q}_2)$$

имамо:

$$\begin{aligned} (3.55) \quad \left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t\in\omega_\tau^+} \sum_{x\in\sigma_h} |\psi_{13}^+(x,t)|^2 \right)^{1/2} &\le C h^{3/2} \|a_1\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_2)} \|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2^h)} \\ &\le C h^2 \|a_1\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)} \,. \end{aligned}$$

Израз ψ_{14}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in W_q^{2,\,1}(e) \times W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e)\,,\ q > 2\,.$$

Осим тога, $\psi_{14}^+ = 0$ када је a_1 полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{14}^+(x,t)| \le C|a_1|_{W_q^{2,1}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{2,1}(e)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$\begin{aligned} &W_2^{4,2}(Q_2) \subset W_{2q/(q-2)}^{2,1}(Q_2),\\ &W_2^{3,3/2}(Q_2) \subset W_q^{2,1}(Q_2), \quad q > 2 \end{aligned}$$

имамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\psi_{14}^+(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\|a_1\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}. \tag{3.56}$$

Израз ψ_{15}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$\left(a_1, \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \in W_2^{2,1}(e)\times \mathbb{C}(\overline{Q}_2)\,.$$

Осим тога, $\psi_{15}^+ = 0$ када је a_1 полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{15}^+(x,t)| \le \frac{C}{h}|a_1|_{W_2^{2,1}(e)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_2)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$W_2^{3,3/2}(Q_2) \subset \mathbb{C}(\overline{Q}_2)$$

имамо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\psi_{15}^+(x,t)|^2\right)^{1/2} &\le Ch^{3/2}\|a_1\|_{W_2^{2,1}(Q_2^h)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_2)}\\ &\le Ch^2\|a_1\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Израз ψ_{16}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_2)\times W_2^{3,3/2}(e).$$

Осим тога, $\psi_{16}^+ = 0$ када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{16}^+(x,t)| \le \frac{C}{h}\|a_1\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_2)}|u|_{W_2^{3,3/2}(e)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$W_2^{3,3/2}(Q_2) \subset \mathbb{C}(\overline{Q}_2)$$

имамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\psi_{16}^+(x,t)|^2\right)^{1/2} \leq Ch^{3/2}\|a_1\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_2)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2^h)} \leq Ch^2\|a_1\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,\,2}(Q_2)}\,. \tag{3.58}$$

Израз ψ_{17}^+ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in W_q^{2,\,1}(e) \times W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e),\ q > 2\,.$$

Осим тога, $\psi_{17}^+ = 0$ када је a_1 полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\psi_{17}^+(x,t)| \leq C|a_1|_{W_q^{2,\,1}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом потапања

$$W_2^{4,\,2}(Q_2) \subset W_{2q/(q-2)}^{2,1}(Q_2),$$
$$W_2^{3,\,3/2}(Q_2) \subset W_q^{2,1}(Q_2),$$

имамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\psi_{17}^+(x,t)|^2\right)^{1/2} \leq Ch^2\|a_1\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,\,2}(Q_2)}. \tag{3.59}$$

Из (3.53)-(3.59) имамо:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\psi_1^+(x,t)|^2\right)^{1/2} \leq Ch^2\|a_1\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,. \tag{3.60}$$

Аналогна оцена важи за израз ψ_1^-:

$$\left(\frac{\tau h^3}{k+h}\sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\psi_1^-(x,t)|^2\right)^{1/2} \leq Ch^2\|a_1\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)}\,. \tag{3.61}$$

Из (3.52), (3.60) и (3.61) даље имамо:

$$(3.62)\qquad \Big(\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}\|\psi_1(\cdot,t)\|^2_{B_h^{-1}}\Big)^{1/2} \le Ch^2\big(\|a_1\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_1\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\big).$$

Остаје нам још да оценимо израз ψ_2 у тачки $x\in\sigma_h$. Имамо да је $\psi_2=\eta_{\bar x_2}$, где је

$$\eta = T_1^2T_2^+T_t^-\Big(a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) - \frac12\Big(a_2+a_2^{+2}\Big)u_{x_2}.$$

Важи елементарна неједнакост:

$$\frac{h^2}{k+h}\psi_2^2(x_1,\xi,t)\le C\Big(|\eta(x_1,\xi,t)|^2+|\eta(x_1,\xi-h,t)|^2\Big)\,.$$

Раставимо $\eta=\eta_1+\eta_2+\eta_3$, где је

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= T_1^2T_2^+T_t^-\Big(a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) - \Big(T_1^2T_2^+T_t^-a_2\Big)\Big(T_1^2T_2^+T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)\,,\\
\eta_2 &= \Big(T_1^2T_2^+T_t^-a_2-\frac12(a_2+a_2^{+2})\Big)\Big(T_1^2T_2^+T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big)\,,\\
\eta_3 &= \frac12(a_2+a_2^{+2})\Big(T_1^2T_2^+T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_2}-u_{x_2}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Израз η_1 је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_2,u)\in W_q^{1,\,1/2}(e)\times W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e)\,,\ q>2\,,$$

где је $e=(x_1-h,x_1+h)\times(x_2,x_2+h)\times(t-\tau,t)$. Осим тога, $\eta_1=0$ када је a_2 константа или када је u полином првог степена по x_1 и x_2 . Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\eta_1(x,t)|\le C|a_2|_{W_q^{1,\,1/2}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(e)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$\begin{aligned}
&W_2^{4,\,2}(Q_2)\subset W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(Q_2),\\
&W_2^{3,\,3/2}(Q_2)\subset W_q^{2,\,1}(Q_2),
\end{aligned}$$

имамо:

$$\left(\tau h \sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\eta_1(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^{3/2}\|a_2\|_{W_q^{1,\,1/2}(Q_2^h)}\|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{2,\,1}(Q_2^h)}$$
$$\le Ch^2\|a_2\|_{W_q^{2,\,1}(Q_2)}\|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{3,\,3/2}(Q_2)}$$
$$\le Ch^2\|a_2\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,\,2}(Q_2)}. \tag{3.63}$$

Израз η_2 је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$\left(a_2, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \in W_2^{2,\,1}(e)\times \mathbb{C}(\overline{Q}_2)\,.$$

Осим тога, $\eta_2 = 0$ када је a_2 полином првог степена по x_1 и x_2 . Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\eta_2(x,t)| \le C|a_2|_{W_2^{2,1}(e)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_2)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$W_2^{3,3/2}(Q_2)\subset \mathbb{C}(\overline{Q}_2)$$

имамо:

$$\left(\tau h \sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h}|\eta_2(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^{3/2}\|a_2\|_{W_2^{2,1}(Q_2^h)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_2)}$$
$$\le Ch^2\|a_2\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,\,2}(Q_2)}. \tag{3.64}$$

Израз η_3 је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_2, u) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_2)\times W_2^{3,3/2}(e)\,.$$

Осим тога, $\eta_3 = 0$ када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 добијамо:

$$|\eta_3(x,t)| \le C\|a_2\|_{C(\overline{Q}_2)}|u|_{W_2^{3,3/2}(e)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и σ_h, применом Леме 1.1 и потапања

$$W_2^{3,\,3/2}(Q_2)\subset \mathbb{C}(\overline{Q}_2)$$

имамо:

$$(3.65)\qquad \left(\tau h \sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h} |\eta_3(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^{3/2}\|a_2\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_2)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2^h)} \le Ch^2\|a_2\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,\,2}(Q_2)}.$$

Из (3.63)-(3.65) даље имамо:

$$(3.66)\qquad \left(\tau h \sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h} |\eta(x_1,\xi,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\|a_2\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\,.$$

Аналогна оцена израза $\eta(x_1,\xi-h,t)$ је задовољена:

$$(3.67)\qquad \left(\tau h \sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h} |\eta(x_1,\xi-h,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\|a_2\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)}\,.$$

Даље, из оцена (3.66) и (3.67) следи оцена:

$$(3.68)\qquad \left(\frac{\tau h^3}{k+h} \sum_{t\in\omega_\tau^+}\sum_{x\in\sigma_h} |\psi_2(x,t)|^2\right)^{1/2} \le Ch^2\Big(\|a_2\|_{W_2^{3,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_2\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}\Big)\,.$$

Из (3.52) и (3.68) имамо:

$$(3.69)\qquad \left(\tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|\psi_2(\cdot,t)\|^2_{B_h^{-1}}\right)^{1/2} \le Ch^2\,(\|a_2\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_1)} + \|a_2\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q_2)}).$$

Коначно, из (3.43), (3.44), (3.62) и (3.69) следи оцена (3.41). □

Напомена 2. *Добијена оцена* (3.41) *је сагласна са глаткошћу коефицијената и глаткошћу решења диференцијског проблема* (3.39).

Напомена 3. *Аналогна оцена конвергенције важи и у случају када у једначини* (3.39) *оператор* Lu *заменимо оператором* $L_1u = Lu + au$, $a = a(x,t)$ *(в.*[46]*).*

4 Конвергенција диференцијске схеме у дискретној $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{1,1/2}}$ норми

У четвртој глави је такође разматран дводимензионални параболички проблем са концентрисаним капацитетом и временски зависним коефицијентима, али уз претпоставку да коефицијенти и решење припадају просторима мање глаткости него у претходном случају. Доказана је оцена брзине конвергенције диференцијске схеме у простору $\widetilde{W}_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})$ сагласна са глаткошћу коефицијената и решењем почетног проблема.

4.1 Поставка проблема

Размотримо дводимензиони почетно-гранични проблем за једначину топлоте са концентрисаним капацитетом на правој $x_2 = \xi$ и временски зависним коефицијентима (в.[45]):

$$
\begin{aligned}
&(1 + k\delta_\Sigma(x))\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f\,, \quad \text{на } Q\,,\\
&u = 0\,, \text{ на } \partial\Omega \times (0,T)\,,\\
&u(x,0) = u_0(x)\,, \text{ на } \Omega\,,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где је $\delta_\Sigma(x) = \delta(x_2 - \xi)$ Диракова делта функција, $k > 0$, $\Omega = (0,1)^2$ и $Q = \Omega \times (0,T)$. Подобласти су дефинисане на исти начин као у поглављу 3.1.

Претпоставимо да коефицијенти a_i задовољавају услов елиптичности и да

$$
\begin{aligned}
&a_i \in W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_1) \cap W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_2),\\
&f \in W_2^{1+\varepsilon,1/2+\varepsilon/2}(Q),
\end{aligned}
$$

где је $\varepsilon > 0$. Тада, уз претходне услове, услове сагласности на граници области Q и услове конјугације на Σ (3.2) потражимо решење проблема (4.1), тако да

$$u \in W_2^{3,\,3/2}(Q_1) \cap W_2^{3,\,3/2}(Q_2) \cap W_2^{3,\,3/2}(\Sigma \times (0,T)).$$

4.2 Диференцијска схема

Проблем (4.1) се може апроксимирати на мрежи $\overline{Q}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ следећом диференцијском схемом са усредњеном десном страном:

$$\begin{aligned}
&(1 + k\delta_{\sigma_h}) v_{\bar{t}} + L_h v = T_1^2 T_2^2 T_t^- f\,, \text{ на } Q_{h\tau}\,,\\
&v = 0\,, \text{ на } \gamma_h \times \omega_\tau^+\,,\\
&v(x,0) = u_0(x)\,, \text{ на } \omega_h\,.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Даље уводимо следеће дискретне норме и полунорме:

$$\|v\|^2_{L_2(Q_{h\tau})} = \tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|v(\cdot,t)\|^2_{L_2(\omega_h)},$$

$$\|v\|^2_{L_2(\sigma_h\times\omega_\tau)} = \tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|v(\cdot,t)\|^2_{L_2(\sigma_h)},$$

$$|v|^2_{L_2(\omega_\tau;\, W_2^{1/2}(\sigma_h))} = \tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|v(\cdot,t)\|^2_{W_2^{1/2}(\sigma_h)},$$

$$|v|^2_{W_2^{1/2}(\omega_\tau;\, L_2(\omega_h))} = \tau \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \tau \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau,\, t'\neq t} \frac{\|v(\cdot,t) - v(\cdot,t')\|^2_{L_2(\omega_h)}}{|t-t'|^2},$$

$$|v|^2_{W_2^{1/2}(\omega_\tau;\, L_2(\sigma_h))} = \tau \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \tau \sum_{t'\in\overline{\omega}_\tau,\, t'\neq t} \frac{\|v(\cdot,t) - v(\cdot,t')\|^2_{L_2(\sigma_h)}}{|t-t'|^2},$$

$$\|v\|^2_{\widetilde{W}_2^{1/2}(\omega_\tau;\, L_2(\omega_h))} = |v|^2_{W_2^{1/2}(\omega_\tau;\, L_2(\omega_h))} + \tau \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \left(\frac{1}{t+\tau} + \frac{1}{T-t+\tau} \right) \|v(\cdot,t)\|^2_{L_2(\omega_h)},$$

$$\|v\|^2_{\widetilde{W}_2^{1/2}(\omega_\tau;\, L_2(\sigma_h))} = |v|^2_{W_2^{1/2}(\omega_\tau;\, L_2(\sigma_h))} + \tau \sum_{t\in\overline{\omega}_\tau} \left(\frac{1}{t+\tau} + \frac{1}{T-t+\tau} \right) \|v(\cdot,t)\|^2_{L_2(\sigma_h)},$$

$$\|v\|^2_{\widetilde{W}_2^{1,\,1/2}(Q_{h\tau})} = \tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} \|v(\cdot,t)\|^2_{W_2^{1/2}(\omega_h)} + |v|^2_{W_2^{1/2}(\omega_\tau;\, L_2(\omega_h))} + |v|^2_{W_2^{1/2}(\omega_\tau;\, L_2(\sigma_h))}.$$

4.3 Конвергенција диференцијске схеме

У овом одељку ћемо доказати конвергенцију диференцијске схеме (4.2) у простору $\widetilde{W}_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})$. Важи следеће тврђење:

Теорема 4.1. *Решење диференцијске схеме* (4.2) *конвергира у простору* $\widetilde{W}_2^{1,\,1/2}(Q_{h\tau})$ *ка решењу диференцијског проблема* (4.1) *и, уз услов* $c_1h^2 \leq \tau \leq c_2h^2$, *важи следећа оцена:*

$$\begin{aligned}(4.3)\quad \|u-v\|_{\widetilde{W}_2^{1,\,1/2}(Q_{h\tau})} \leq Ch^2\Big(&\max_i\|a_i\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_1)} + \max_i\|a_i\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_2)}\\ &+l(h)\Big)\times\Big(\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_1)} + \|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2)} + \|u\|_{W_2^{3,3/2}(\Sigma\times(0,T))}\Big)\,,\end{aligned}$$

где је $l(h) = \sqrt{\log 1/h}$.

Доказ. Нека је u решење почетно-граничног проблема (4.1) и v решење диференцијског проблема (4.2). Грешка

$$z = u - v$$

задовољава диференцијску схему

$$(4.4)\qquad \begin{aligned}&(1+k\delta_{\sigma_h})z_{\bar t} + L_h z = \varphi\,,\ \text{на}\ \omega_h\times\omega_\tau^+\,,\\ &z = 0\,,\ \text{на}\ \gamma_h\times\omega_\tau^+\,,\\ &z(x,0) = 0\,,\ \text{на}\ \omega_h\,,\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}&\varphi = \sum_{i=1}^{2}\eta_{i,\bar x_i} + \chi_{\bar t} + \delta_{\sigma_h}\mu_{\bar t}\\ &\eta_i = T_i^+T_{3-i}^2T_t^-\left(a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}(a_i + a_i^{+i})u_{x_i}\\ &\chi = u - T_1^2T_2^2u,\\ &\mu = ku - T_1^2(ku).\end{aligned}$$

Означимо са

$$\begin{aligned}&\eta_1 = \widetilde{\eta}_1 + \delta_{\sigma_h}\widehat{\eta}_1,\\ &\chi = \widetilde{\chi} + \delta_{\sigma_h}\widehat{\chi},\end{aligned}$$

где је

$$\widehat{\eta}_1 = \frac{h^2}{6} T_1^+ T_t^- \left(\left[a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right]_\Sigma \right),$$
$$\widehat{\chi} = \frac{h^2}{6} \left[T_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right]_\Sigma .$$

Применом Леме 2.3 и Леме 2.4 , директно добијамо следећу априорну оцену за решење диференцијске схеме (4.4):

$$\|z\|_{\widetilde{W}_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})} \le C \Big[\|\eta_2\|_{L_2(Q_{h\tau})} + \|\widetilde{\eta}_1\|_{L_2(Q_{h\tau})} + |\widehat{\eta}_1|_{L_2(\omega_\tau;\, W_2^{1/2}(\sigma_h))} + $$
$$+ \|\widetilde{\chi}\|_{\widetilde{W}_2^{1/2}(\omega_\tau, L_2(\omega_h))} + \|\widehat{\chi}\|_{\widetilde{W}_2^{1/2}(\omega_\tau, L_2(\sigma_h))} + \|\mu\|_{\widetilde{W}_2^{1/2}(\omega_\tau, L_2(\sigma_h))} \Big]. \tag{4.5}$$

Стога, у циљу оцене брзине конвергенције диференцијске схеме (4.2), довољно је оценити десну страну неједнакости (4.5).

Прво оценимо израз η_2. Извршимо декомпозицију израза

$$\eta_2 = \eta_{21} + \eta_{22} + \eta_{23} ,$$

где је

$$\eta_{21} = T_1^2 T_2^+ T_t^- (a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}) - (T_1^2 T_2^+ T_t^- a_2) \Big(T_1^2 T_2^+ T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big),$$
$$\eta_{22} = [T_1^2 T_2^+ T_t^- a_2 - 0,5(a_2 + a_2^{+2})] \Big(T_1^2 T_2^+ T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big),$$
$$\eta_{23} = -0,5(a_2 + a_2^{+2}) \Big(T_1^2 T_2^+ T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_2} - u_{x_2} \Big).$$

Израз η_{21} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_2, u) \in W_4^{1,\,1/2}(e) \times W_4^{2,\,1}(e) ,$$

где је

$$e = (x_1 - h, x_1 + h) \times (x_2, x_2 + h) \times (t - \tau, t).$$

Даље, $\eta_{21} = 0$ када је a_2 константа или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\eta_{21}(x,t)| \le C |a_2|_{W_4^{1,\,1/2}(e)} |u|_{W_4^{2,\,1}(e)} .$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h \setminus \sigma_h$ и примене потапања

$$W_2^{2+\varepsilon, 1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_4^{1,1/2}(Q_k),$$
$$W_2^{3,3/2}(Q_k) \subset W_4^{2,1}(Q_k), \ k = 1, 2$$

добијамо

$$\|\eta_{21}\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le Ch^2(\|a_2\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)} + \|a_2\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)})\,. \tag{4.6}$$

Израз η_{22} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_2, u) \in W_q^{2,\,1}(e) \times W_{2q/(q-2)}^{1,\,1/2}(e)\,,$$

где је $q = 2+\varepsilon$. Даље, $\eta_{22} = 0$ када је a_2 полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u константа . Применом Леме 1.5 добијамо следећу оцену:

$$|\eta_{22}(x,t)| \le C|a_2|_{W_q^{2,\,1}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{1,\,1/2}(e)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h \setminus \sigma_h$ и примене потапања

$$W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_q^{2,1}(Q_k),$$
$$W_2^{3,\,3/2}(Q_k) \subset W_{2q/(q-2)}^{1,\,1/2}(Q_k)\,, \text{за } q = 2+\varepsilon\,,\ k = 1,2$$

добијамо

$$\|\eta_{22}\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le Ch^2(\|a_2\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)} + \|a_2\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)})\,. \tag{4.7}$$

Израз η_{23} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_2, u) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_k) \times W_2^{3,\,3/2}(e)\,, k = 1,2\,.$$

Даље, $\eta_{23} = 0$ када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 добијамо оцену:

$$|\eta_{23}(x,t)| \le C\|a_2\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_k)}|u|_{W_2^{3,\,3/2}(e)}\,.$$

После сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h \setminus \sigma_h$ и примене потапања

$$W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset \mathbb{C}(\overline{Q}_k),\ k = 1,2$$

добијамо

$$\|\eta_{23}\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le Ch^2(\|a_2\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)} + \|a_2\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)})\,. \tag{4.8}$$

Из оцена (4.6)-(4.8) имамо оцену:

$$\|\eta_{2}\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le Ch^2(\|a_2\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)} + \|a_2\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)})\,. \tag{4.9}$$

Сада оценимо израз $\widetilde{\eta}_1$. У тачки $x \notin \sigma_h$ важи $\widetilde{\eta}_1 = \eta_1$. Извршимо декомпозицију израза η_1 на следећи начин: $\eta_1 = \eta_{11} + \eta_{12} + \eta_{13}$, где је

$$\eta_{11} = T_1^+ T_2^2 T_t^-(a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}) - (T_1^+ T_2^2 T_t^- a_1)\Big(T_1^+ T_2^2 T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big),$$
$$\eta_{12} = [T_1^+ T_2^2 T_t^- a_1 - 0,5(a_1 + a_1^{+1})]\Big(T_1^+ T_2^2 T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big),$$
$$\eta_{13} = -0,5(a_1 + a_1^{+1})\Big(T_1^+ T_2^2 T_t^- \frac{\partial u}{\partial x_1} - u_{x_1}\Big).$$

Израз η_{11} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in W_4^{1,\,1/2}(e) \times W_4^{2,\,1}(e),$$

где је

$$e = e(x,t) = (x_1, x_1 + h) \times (x_2 - h, x_2 + h) \times (t - \tau, t).$$

Даље, $\eta_{11} = 0$ када је a_1 константа или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\eta_{11}(x,t)| \le C|a_1|_{W_4^{1,\,1/2}(e)} |u|_{W_4^{2,\,1}(e)}. \tag{4.10}$$

Израз η_{12} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in W_q^{2,\,1}(e) \times W_{2q/(q-2)}^{1,\,1/2}(e),$$

где је $q = 2 + \varepsilon$. Даље, $\eta_{12} = 0$ када је a_1 полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u константа . Применом Леме 1.5 добијамо следећу оцену:

$$|\eta_{12}(x,t)| \le C|a_1|_{W_q^{2,\,1}(e)} |u|_{W_{2q/(q-2)}^{1,\,1/2}(e)}. \tag{4.11}$$

Израз η_{13} је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_k) \times W_2^{3,\,3/2}(e),\, k = 1,2.$$

Даље, $\eta_{13} = 0$ када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 добијамо оцену:

$$|\eta_{13}(x,t)| \le C\|a_1\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_k)} |u|_{W_2^{3,\,3/2}(e)}. \tag{4.12}$$

Остаје још да оценимо израз $\widetilde{\eta}_1$ за $x \in \sigma_h$. У тачки $x \in \sigma_h$ извршимо декомпозицију:

$$\widetilde{\eta}_1 = \sum_{k=1}^{3} (\eta_{1,k}^- + \eta_{1,k}^+),$$

где је

$$\eta_{1,1}^{\pm} = T_1^+T_2^{2\pm}T_t^-\left(a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - 2\left(T_1^+T_2^{2\pm}T_t^-a_1\right)\left(T_1^+T_2^{2\pm}T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$$
$$\pm\frac{h}{6}\left(T_1^+T_t^-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\left[2\left(T_1^+T_2^{2\pm}T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \left(T_1^+T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right]\Bigg|_{x_2=\xi\pm 0}$$
$$\pm\frac{h}{6}\left[\frac{a_1+a_1^{+1}}{2}\left(T_1^+T_t^-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right) - \left(T_1^+T_t^-a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right]\Bigg|_{x_2=\xi\pm 0}$$
$$\pm\frac{h}{6}\left[\left(T_1^+T_t^-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\left(T_1^+T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \left(T_1^+T_t^-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right]\Bigg|_{x_2=\xi\pm 0},$$
$$\eta_{1,2}^{\pm} = \left[2\left(T_1^+T_2^{2\pm}T_t^-a_1\right) - \frac{a_1+a_1^{+1}}{2} \mp \frac{h}{3}\left(T_1^+T_t^-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\right]\times\left(T_1^+T_2^{2\pm}T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_2=\xi\pm 0},$$
$$\eta_{1,3}^{\pm} = \frac{a_1+a_1^{+1}}{4}\left[2\left(T_1^+T_2^{2\pm}T_t^-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - u_{x_1} \mp \frac{h}{3}\left(T_1^+T_t^-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right]\Bigg|_{x_2=\xi\pm 0}.$$

Израз $\eta_{1,1}^{\pm}$ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in W_4^{1,\,1/2}(e_1^{\pm}) \times W_4^{2,\,1}(e_1^{\pm}),$$

где је

$$e_1^+ = (x_1, x_1+h)\times(\xi, \xi+h)\times(t-\tau, t),$$
$$e_1^- = (x_1, x_1+h)\times(\xi-h, \xi)\times(t-\tau, t).$$

Даље, $\eta_{1,1}^{\pm} = 0$ када је a_1 константа или када је u полином првог степена по x_1 и x_2. Применом Леме 1.5 добијамо

$$|\eta_{1,1}^{\pm}(x,t)| \le C|a_1|_{W_4^{1,\,1/2}(e_1^{\pm})}|u|_{W_4^{2,\,1}(e_1^{\pm})}. \tag{4.13}$$

Израз $\eta_{1,2}^{\pm}$ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in W_q^{2,\,1}(e_1^{\pm}) \times W_{2q/(q-2)}^{1,\,1/2}(e_1^{\pm}),$$

где је $q = 2+\varepsilon$. Даље, $\eta_{1,2}^{\pm} = 0$ када је a_1 полином првог степена по x_1 и x_2 или када је u константа . Применом Леме 1.5 добијамо оцену:

$$|\eta_{1,2}^{\pm}(x,t)| \le C|a_1|_{W_q^{2,\,1}(e_1^{\pm})}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{1,\,1/2}(e_1^{\pm})}. \tag{4.14}$$

Израз $\eta_{1,3}^{\pm}$ је ограничен билинеаран функционал аргумента

$$(a_1, u) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_k) \times W_2^{3,\,3/2}(e_1^{\pm}),\, k=1,2.$$

Даље, $\eta_{1,3}^{\pm} = 0$ када је u полином другог степена по x_1 и x_2 или првог степена по t. Применом Леме 1.5 имамо:

$$|\eta_{1,3}^{\pm}(x,t)| \le C\|a_1\|_{\mathbb{C}(\overline{Q}_k)}|u|_{W_2^{3,\,3/2}(e_1^{\pm})}\,. \tag{4.15}$$

Из оцена (4.10)-(4.12) и (4.13)-(4.15), после сумирања по чворовима мреже ω_τ^+ и $\omega_h \setminus \sigma_h$, односно ω_τ^+ и σ_h, и примене потапања

$$\begin{aligned}
&W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_4^{1,1/2}(Q_k)\,,\\
&W_2^{3,3/2}(Q_k) \subset W_4^{2,1}(Q_k)\,,\\
&W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_q^{2,1}(Q_k)\,,\\
&W_2^{3,\,3/2}(Q_k) \subset W_{2q/(q-2)}^{1,\,1/2}(Q_k), \text{ за } \quad q = 2+\varepsilon\,,\\
&W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset \mathbb{C}(\overline{Q}_k),
\end{aligned}$$

где је $k = 1, 2$, добијамо оцену:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\eta}_1\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le Ch^2(&\|a_1\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_1)}\\
&+\|a_1\|_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{3,\,3/2}(Q_2)})\,.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

За $\phi \in W_2^{1/2}(\Sigma)$ важи следећа оцена:

$$|T_1^+\phi|_{W_2^{1/2}(\sigma_h)} \le C|\phi|_{W_2^{1/2}(\Sigma)} \le C\|\phi\|_{W_2^1(\Omega_k)}\,, \quad k = 1, 2\,,$$

одакле следи:

$$|\widehat{\eta}_1(\cdot,t)|_{W_2^{1/2}(\sigma_h)} \le Ch^2(\|T_t^-\nu(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Omega_1)} + \|T_t^-\nu(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Omega_2)})\,,$$

где је $\nu = \nu_1 + \nu_2$, при чему је

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\,,\\
\nu_2 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,.
\end{aligned}$$

После сумирања имамо:

$$|\widehat{\eta}_1|_{L_2(\omega_\tau, W_2^{1/2}(\sigma_h))} \le Ch^2(\|\nu\|_{W_2^{1,0}(Q_1)} + \|\nu\|_{W_2^{1,0}(Q_2)})\,. \tag{4.17}$$

Остаје да оценимо изразе на десној страни. Оценимо прво израз ν_1. По дефиницији

$$\|\nu_1\|^2_{W_2^{1,\,0}(Q_k)} = \iint\limits_{Q_k} \Big(|\nu_1(x,t)|^2 + \Big|\frac{\partial \nu_1(x,t)}{\partial x_1}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial \nu_1(x,t)}{\partial x_2}\Big|^2\Big) dx\,dt.$$

Оценимо сва три члана на десној страни.

Прво,

$$\iint\limits_{Q_k} |\nu_1(x,t)|^2 dx\,dt = \iint\limits_{Q_k} \Big|a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|^2 dx\,dt \le C\big\|a_1\big\|^2_{C(\overline{Q}_k)} \big\|u\big\|^2_{W_2^{2,\,1}(Q_k)}.$$

Применом потапања

$$\begin{aligned} &W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset \mathbb{C}(\overline{Q}_k),\\ &W_2^{3,3/2}(Q_k) \subset W_2^{2,1}(Q_k),\ k=1,2 \end{aligned}$$

добијамо

$$\iint\limits_{Q_k} |\nu_1(x,t)|^2 dx\,dt \le C\big\|a_1\big\|^2_{W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_k)} \big\|u\big\|^2_{W_2^{3,3/2}(Q_k)}. \tag{4.18}$$

Даље је,

$$\begin{aligned} \iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial \nu_1(x,t)}{\partial x_1}\Big|^2 dx\,dt &= \iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2}\Big|^2 dx\,dt \\ &\le C\Big(\big\|a_1\big\|^2_{W_4^{1,1/2}(Q_k)} \big\|u\big\|^2_{W_4^{2,\,1}(Q_k)} + \big\|a_1\big\|^2_{C(\overline{Q}_k)} \big\|u\big\|^2_{W_2^{3,3/2}(Q_k)}\Big). \end{aligned}$$

Применом потапања

$$\begin{aligned} &W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_4^{1,1/2}(Q_k),\\ &W_2^{3,3/2}(Q_k) \subset W_4^{2,1}(Q_k),\\ &W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset \mathbb{C}(\overline{Q}_k),\ k=1,2 \end{aligned}$$

имамо

$$\iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial \nu_1(x,t)}{\partial x_1}\Big|^2 dx\,dt \le C\big\|a_1\big\|^2_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k)} \big\|u\big\|^2_{W_2^{3,3/2}(Q_k)}. \tag{4.19}$$

Оценимо још трећи члан.

$$\begin{aligned} \iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial \nu_1(x,t)}{\partial x_2}\Big|^2 dx\,dt &= \iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}\Big|^2 dx\,dt \\ &\le C\Big(\big\|a_1\big\|^2_{W_4^{1,1/2}(Q_k)} \big\|u\big\|^2_{W_4^{2,\,1}(Q_k)} + \big\|a_1\big\|^2_{C(\overline{Q}_k)} \big\|u\big\|^2_{W_2^{3,3/2}(Q_k)}\Big). \end{aligned}$$

Применом потапања

$$W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_4^{1,1/2}(Q_k),$$
$$W_2^{3,3/2}(Q_k) \subset W_4^{2,1}(Q_k),$$
$$W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset \mathbb{C}(\overline{Q}_k),\ k=1,2$$

имамо

$$\iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial \nu_1(x,t)}{\partial x_2}\Big|^2 dx\,dt \le C\big\|a_1\big\|^2_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k)}\big\|u\big\|^2_{W_2^{3,3/2}(Q_k)}. \tag{4.20}$$

Коначно из оцена (4.18)-(4.20) следи оцена

$$\|\nu_1\|_{W_2^{1,0}(Q_k)} \le C\|a_1\|_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_k)}\,. \tag{4.21}$$

Размотримо сада функционал ν_2 и оценимо норму $\|\nu_2\|_{W_2^{1,0}(Q_k)}$. Важи

$$\iint\limits_{Q_k} |\nu_2(x,t)|^2 dx\,dt = \iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|^2 dx\,dt \le C\big\|a_1\big\|^2_{W_4^{1,1/2}(Q_k)}\big\|u\big\|^2_{W_4^{2,\,1}(Q_k)}.$$

Применом потапања

$$W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_4^{1,1/2}(Q_k),$$
$$W_2^{3,3/2}(Q_k) \subset W_4^{2,\,1}(Q_k),\ k=1,2$$

имамо

$$\iint\limits_{Q_k} |\nu_2(x,t)|^2 dx\,dt \le C\big\|a_1\big\|^2_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k)}\big\|u\big\|^2_{W_2^{3,3/2}(Q_k)}. \tag{4.22}$$

Даље је,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial \nu_2(x,t)}{\partial x_1}\Big|^2 dx\,dt &= \iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big|^2 dx\,dt \\ &\le C\Big(\big\|a_1\big\|^2_{W_q^{2,\,1}(Q_k)}\big\|u\big\|^2_{W^{1,\,1/2}_{2q/(q-2)(Q_k)}} + \big\|a_1\big\|^2_{W_4^{1,1/2}(Q_k)}\big\|u\big\|^2_{W_4^{2,\,1}(Q_k)}\Big).\end{aligned}$$

Применом потапања

$$W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_q^{2,1}(Q_k),$$
$$W_2^{3,\,3/2}(Q_k) \subset W^{1,\,1/2}_{2q/(q-2)}(Q_k),$$
$$W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_4^{1,1/2}(Q_k),$$
$$W_2^{3,3/2}(Q_k) \subset W_4^{2,\,1}(Q_k),\ k=1,2$$

добијамо

$$\iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial \nu_2(x,t)}{\partial x_1}\Big|^2 dx\,dt \le C\big\|a_1\big\|^2_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k)}\big\|u\big\|^2_{W_2^{3,3/2}(Q_k)}. \tag{4.23}$$

Оценимо још трећи члан.

$$\iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial \nu_2(x,t)}{\partial x_2}\Big|^2 dx\,dt = \iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|^2 dx\,dt$$
$$\le C\Big(\big\|a_1\big\|^2_{W_q^{2,\,1}(Q_k)}\big\|u\big\|^2_{W^{1,\,1/2}_{2q/(q-2)(Q_k)}} + \big\|a_1\big\|^2_{W_4^{1,1/2}(Q_k)}\big\|u\big\|^2_{W_4^{2,\,1}(Q_k)}\Big).$$

Применом потапања

$$\begin{aligned}
&W_2^{2+\varepsilon,\,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_q^{2,1}(Q_k),\\
&W_2^{3,\,3/2}(Q_k) \subset W^{1,\,1/2}_{2q/(q-2)}(Q_k),\\
&W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k) \subset W_4^{1,1/2}(Q_k),\\
&W_2^{3,3/2}(Q_k) \subset W_4^{2,\,1}(Q_k),\ k=1,2
\end{aligned}$$

добијамо

$$\iint\limits_{Q_k} \Big|\frac{\partial \nu_2(x,t)}{\partial x_2}\Big|^2 dx\,dt \le C\big\|a_1\big\|^2_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k)}\big\|u\big\|^2_{W_2^{3,3/2}(Q_k)}. \tag{4.24}$$

Из оцена (4.22)-(4.24) добијамо оцену

$$\|\nu_2\|_{W_2^{1,0}(Q_k)} \le C\|a_1\|_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_k)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_k)},\ k=1,2\,. \tag{4.25}$$

Даље, из оцена (4.17), (4.21) и (4.25) добијамо оцену

$$\begin{aligned}
|\widehat{\eta}_1|_{L_2(\omega_\tau, W_2^{1/2}(\sigma_h))} \le Ch^2(&\|a_1\|_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_1)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_1)}\\
&+\|a_1\|_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q_2)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2)}).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Оцене израза $\widetilde{\chi}, \mu$ и $\widehat{\chi}$ су доказане у [24]:

$$\|\widetilde{\chi}\|_{\widetilde{W}_2^{1/2}(\omega_\tau, L_2(\omega_h))} \le Ch^2\sqrt{\log\frac{1}{h}}(\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_1)} + \|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q_2)}), \tag{4.27}$$

$$\|\mu\|_{\widetilde{W}_2^{1/2}(\omega_\tau, L_2(\sigma_h))} \le Ch^2\sqrt{\log\frac{1}{h}}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(\Sigma\times(0,T))}, \tag{4.28}$$

$$\|\widehat{\chi}\|_{\widetilde{W}_2^{1/2}(\omega_\tau, L_2(\sigma_h))} \le Ch^2\sqrt{\log\frac{1}{h}}\|u\|_{W_2^{2,1}(\Sigma\times(0,T))}. \tag{4.29}$$

Коначно из оцена (4.5)-(4.29) следи оцена (4.3). □

Напомена 4. *Добијена оцена* (4.3) *је сагласна са глаткошћу коефицијената и глаткошћу решења диференцијског проблема* (4.1).

Напомена 5. *Аналогна оцена конвергенције важи и у случају када у једначини* (4.1) *оператор* Lu *заменимо оператором* $L_1 u = Lu + au$, $a = a(x,t)$.*(в.*[46]*).*

Литература

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York 1975.

[2] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces*, An Introduction, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 228, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[3] O. V. Besov, V. P. Ilin, S. M. Nikolskii, *Integral representations and imbedding theorems*, Nauka, Moskow 1975. (Russian)

[4] D.R. Bojović, *Convergence of finite difference method for parabolic problem with variable operator*, Lecture Notes in Comput. Sci. 1988 (2001) 110-116.

[5] D.R. Bojović, B.S. Jovanović, *Convergence of finite difference method for the parabolic problem with concentraced capacity and variable operator*, Journal of Computational and Applied Mathematics 189 (2006) 286-303.

[6] D.R. Bojović, B.S. Jovanović, *Finite difference method for a parabolic problem with concentrated capacity and time-dependent operator*, Approximation and Computation, Series: Springer Optimization and its Applications, (2011) 286-296.

[7] D.R. Bojović, B.S. Jovanović, *Convergence of finite difference method for solving 2D parabolic interface problem*, Journal of Computational and Applied Mathematics 236 (2012) 3605-3612.

[8] D.R. Bojović, B.V. Sredojević, B.S. Jovanović, *Numerical approximation of a two-dimensional parabolic time-dependent problem containing a delta function*, J. Comp. Appl. Math. vol. 259 (2014) 129-137 [DOl 10.1016/j.cam.2013.04.012, ISSN 0377-0427, IF=1.365]

[9] I. Braianov, *Convergence of a Crank-Nicolson difference scheme for heat equation with interface in the heat flow and concentrated heat capacity*, Lecture Notes in Comput. Sci. 1196 (1997) 58-65.

[10] J.H. Bramble, S.R. Hilbert, *Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transform and spline interpolation*, SIAM J. Numer. Anal. 7 (1970), 112-124.

[11] J.H. Bramble, S.R. Hilbert, *Bounds for a class of linear functionals with application to Hermite interpolation*, Numer. Math. 16 (1971), 362-369.

[12] P. Grisvard, *Singularities in Boundary Value Problems*, Research Notes in Applied Mathematics, vol. 22, Masson, Paris, 1992.

[13] J. Douglas, H. Rachford, *On the numerical solution of heat conduction problem in two and three space variable*, Trans. Amer. Math. Soc., 82:2 (1956), 421-439.

[14] T. Dupont, R. Scott, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*, Math. Comput. 34 (1980), 441-463.

[15] M. Dražić, *Convergence rates of difference approximation to weak solution of heat transfer equation*, Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group, Report No 86/22, Oxford 1986.

[16] R.D. Lazarov, V.L. Makarov, A.A. Samarskii, *Applications of exact difference schemes for construction and studies of difference schemes on generalized solutions*, Math. Sbornik, 117 (1982) 469-480 (Russian).

[17] R. D. Lazarov, *Convergence of difference method for parabolic equations with generalized solutions*, Pliska Stud. Math. Bulgar. 5 (1982), 51-59. (Russian).

[18] L. D. Ivanović, B. S. Jovanović, and E. Süli, *On the rate of convergence of difference schemes for the heat transfer equation on the solutions from* $W_2^{s,s/2}$, Mat. Vesnik 36 (1984), 206-212.

[19] B. S. Jovanović, *On the convergence of finite-difference schemes for parabolic equations with variable coefficients*, Numer. Math. 54 (1989) 395-404.

[20] B. S. Jovanović, *Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina*, Matematički institut, Beograd (1989)

[21] B.S. Jovanović, *Finite difference method for boundary value problems with weak solutions*, Posebna izdanja Matematičkog Instituta 16, Beograd (1993)

[22] B. S. Jovanović and L. G. Vulkov, *Operator approach to the problems with concentrated factors*, Numerical analysis and its applications (Rousse, 2000), Lecture Notes in Comput. Sci., 1988, Springer, Berlin, 2001, 439-450.

[23] B. S. Jovanović and L. G. Vulkov, *On the convergence of difference schemes for hyperbolic problems with concentrated data*, SIAM J. Numer. Anal. 41(2) (2003), 516-538.

[24] B.S. Jovanović, L.G. Vulkov, *Finite difference approximation for some interface problems with variable coefficients*, Applied Numerical Mathematics 59 (2009), 349-372.

[25] B.S. Jovanović, E. Süli, *Analysis of Finite Difference Schemes*, Springer Series in Computational Mathematics, 2014.

[26] B.S. Jovanović, L.G. Vulkov, *On the convergence of finite difference schemes for the heat equation with concentrated capacity*, Numer. Math. 89, No 4 (2001), 715-734.

[27] B.S. Jovanović, *Jedno uopštenje leme Brambla-Hilberta*, Zbornik radova PMF u Kragujevcu 8 (1987), 81-87.

[28] B.S. Jovanović, *On the strong stability of operator-difference schemes in time-integral norms*, Comput. Methods in Applied Mathematics, Vol.1 (2011), No.1, pp. 72-85.

[29] B.S. Jovanović, P.P. Matus, *On the strong stability of operator-difference schemes in time-integral norms*, Comput. Methods Appl. Math., bf1 (2001) 72-85.

[30] J.L. Lions, E. Magenes, *Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Springer-Verlag, Berlin and New Jork (1972).

[31] J.L. Lions, E. Magenes, *Problemes aux limites non homogenes et applications*, Dunod, Paris 1968.

[32] A.V. Lukov, *Heat and Mass Transfer*, Nauka, Moscow (1989) (Russian)

[33] V. G. Maz'ya and T. O. Shaposhnikova, *Theory of Multipliers in Spaces of Differentiable Functions*, Monographs and Studies in Mathematics 23, Pitman, Boston, Mass. 1985

[34] S. M. Nikol'ski, *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*, Nauka, Moscow, 1977 (Russian).

[35] L.A. Oganesyan, L.A. Rukhovets, *Variational-Difference Method for Solving Eliptic Equations*, AN Arm. SSR (1979) (Russian).

[36] P.W. Peaceman, H.H. Rachford, *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, J. Soc. Industr. Appl. Math. 3, No.1 (1955), 28-42.

[37] M. Renardy, R.C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin and New York (1993)

[38] A.A. Samarskii, R.D. Lazarov, V.L. Makarov, *Difference Schemes for Differential Equations with Generalized Solutions*, Vysshaya Shkola, Moscow (1987) (Russian).

[39] A.A. Samarskii, *Theory of Difference Schemes*, Nauka, Moscow (1989) (Russian; English edition: Pure and Appl. Math,. Vol. 240, Marcel Dekker, New York 2001).

[40] A. A. Samarski, B. S. Iovanovich, P. P. Matus, and V. S. Shcheglik, *Finite difference schemes on adaptive time grids for parabolic equations with generalized solutions*, Differ. Equ. 33 (1997), 981-990.

[41] J. A. Scott and W. L. Seward, *Finite difference methods for parabolic problems with nonsmooth initial data*, Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group, Technical Report 86/22, Oxford, 1987.

[42] L. Schwartz, *Théorie des distributions I,II*, Paris 1950.

[43] E. Süli, B. S. Jovanović, and L. D. Ivanović, *Finite difference approximations of generalized solutions*, Math. Comput. 45 (1985), 319-327.

[44] E. Süli, B. S. Jovanović, and L. D. Ivanović, *On the construction of finite difference schemes approximating generalized solutions*, Publ. Inst. Math. 37(51) (1985), 123-128.

[45] B.V. Sredojević, D.R. Bojović, *Finite difference approximation for parabolic interface problem with time-dependent coefficients*, Publ. Inst. Math. 99(113) (2016), 67-76,[DOI 10.2298/PIM1613067S, ISSN 0350-1302, IF=0.270]

[46] B. V. Sredojević, *Finite difference method for the 2D heat equation with concentrated capacity*, Krag. J. Math. (u pripremi)

[47] H. Triebel, *Interpolation theory, function space, differential operators*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (DDR) 1978.

[48] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Monographs in Mathematics, vol. 78, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1983.

[49] V. S. Vladimirov, *Generalized Functions in Mathematical Physics*, (English ed.), Mir Publishers, Moscow, 1979.

[50] V.S. Vladimirov, *Equations of the Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1988 (Russian)

[51] J. Wloka, *Partial Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1987)

Биографија

Братислав Средојевић рођен је 30.03.1984. године у Горњем Милановцу, од оца Владимира и мајке Зоре. Основну школу и Гимназију завршио је у Горњем Милановцу. Добитник је више награда на такмичењима из математике, физике и хемије.

Дипломирао је на Природно-математичком факултету у Крагујевцу, група: Математика, смер: Теоријска математика са применама, дана 28. 11.2007. године са просечном оценом у току студија 9.12(девет и 12/100). Дипломски испит са темом "Спектар линеарног оператора"из предмета Функционална анализа код проф. др Дејана Бојовића одбранио је са оценом 10(десет). Од 2007. године студент је докторских студија математике (Нумеричка математика) на Природно-математичком факултету у Крагујевцу. Током студија био је добитник школарине у оквиру једног пројекта EFG банке и Националне штедионице, стипендиста Министарства просвете и Министарства науке и технолошког развоја Републике Србије и добитник стипендије Универзитета у Крагујевцу за 2007. годину као најбољи студент Природно-математичког факултета.

Након завршених основних студија био је запослен у Техничкој школи „Сава Мунћан" у Белој Цркви. Од септембра 2010. године ради у ОШ „Иво Андрић" у Прањанима.

Референце

1. D.R. Bojović, B.V. Sredojević, B.S. Jovanović, *Numerical approximation of a two-dimensional parabolic time-dependent problem containg a delta function*, J. Comp. Appl. Math. (2014), vol. 259, 129-137 [DOl 10.1016/j.cam.2013. 04.012, ISSN 0377-0427, IF=1.365] (M21)

2. B.V. Sredojević, D.R. Bojović, *Finite difference approximation for parabolic interface problem with time-dependent coefficients*, Publ. Inst. Math.

99(113) (2016), 67-76, [DOI 10.2298/PIM1613067S, ISSN 0350-1302, IF=0.270] (M23)

3. B.V. Sredojević, *Finite difference method for the 2D heat equation with concentrated capacity*, Krag. J. Math. (u pripremi)

4. D.R. Bojović, B.V. Sredojević, *Numerical approximation of 2D parabolic interface problem with variable coefficients*, Methods of numerical and nonlinear analysis with applications, (2012), Beograd, Srbija, Abst. p. 7 (M64)

5. D.R. Bojović, B.V. Sredojević, B.S. Jovanović, *Numerical approximation of a 2D parabolic time-dependent problem with delta function*, International Congress on Computational and Applied mahtematics ICCAM 2012, (2012), Gent, Belgija, Abst. p.15 (M34)

Journal of Computational and Applied Mathematics 259 (2014) 129–137

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Computational and Applied Mathematics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cam

Numerical approximation of a two-dimensional parabolic time-dependent problem containing a delta function[☆]

Dejan R. Bojović[a,*], Bratislav V. Sredojević[a], Boško S. Jovanović[b]

[a] University of Kragujevac, Faculty of Science, R. Domanovića 12, 34000 Kragujevac, Serbia

[b] University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia

ARTICLE INFO

Article history:
Received 17 September 2012
Received in revised form 4 April 2013

MSC:
65M12
65M15

Keywords:
Interface problem
Convergence
Sobolev norm

ABSTRACT

The convergence of a difference scheme for a two-dimensional initial-boundary value problem for the heat equation with concentrated capacity and time-dependent coefficients of the space derivatives is considered. An estimate of the rate of convergence in a special discrete $\widetilde{W}_2^{2,1}$ Sobolev norm, compatible with the smoothness of the coefficients and the solution, is proved.

1. Introduction

The finite-difference method is one of the basic tools for the numerical solution of partial differential equations. In the case of problems with discontinuous coefficients and concentrated factors (Dirac delta functions, free boundaries, etc.), the solution has weak global regularity, and it is impossible to establish convergence of finite-difference schemes using the classical Taylor series expansion. Often, the Bramble–Hilbert lemma takes the role of the Taylor formula for functions from the Sobolev spaces [1–3].

Following Lazarov et al. [3], a convergence rate estimate of the form

$$\|u - v\|_{W_{2,h}^k} \le Ch^{s-k}\|u\|_{W_2^s}, \quad s > k,$$

is called *compatible* with the smoothness (regularity) of the solution u of the boundary value problem. Here, v is the solution of the discrete problem, h is the spatial mesh step, W_2^s and $W_{2,h}^k$ are Sobolev spaces of functions with continuous and discrete argument, respectively, and C is a constant which does not depend on u and h. For parabolic problems, typical estimates are of the form

$$\|u - v\|_{W_{2,h\tau}^{k,k/2}} \le C(h + \sqrt{\tau})^{s-k}\|u\|_{W_2^{s,s/2}}, \quad s > k,$$

where τ is the time step. In the case of equations with variable coefficients, the constant C in the error bounds depends on the norms of the coefficients (see, for example, [2,4,5]).

☆ This work was supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development (Projects #174002 and #174015).

* Corresponding author. Tel.: +381 66453172.
E-mail addresses: bojovicd@ptt.rs (D.R. Bojović), bratislav30@open.telekom.rs (B.V. Sredojević), bosko@matf.bg.ac.rs (B.S. Jovanović).

0377-0427/$ – see front matter © 2013 Elsevier B.V. All rights reserved.
http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.04.012

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 99(113) (2016), 67–76 DOI: 10.2298/PIM1613067S

FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION FOR PARABOLIC INTERFACE PROBLEM WITH TIME-DEPENDENT COEFFICIENTS

Bratislav V. Sredojević and Dejan R. Bojović

Abstract. The convergence of difference scheme for two-dimensional initial-boundary value problem for the heat equation with concentrated capacity and time-dependent coefficients of the space derivatives, is considered. An estimate of the rate of convergence in a special discrete $\widetilde{W}_2^{1,1/2}$ Sobolev norm, compatible with the smoothness of the coefficients and solution, is proved.

1. Introduction

The finite-difference method is one of the basic tools for the numerical solution of partial differential equations. In the case of problems with discontinuous coefficients and concentrated factors (Dirac delta functions, free boundaries, etc.) the solution has a weak global regularity and it is impossible to establish convergence of finite difference schemes using the classical Taylor series expansion. Often, the Bramble–Hilbert lemma takes the role of the Taylor formula for functions from the Sobolev spaces [**6**, **8**, **12**].

Following Lazarov et al. [**12**], a convergence rate estimate of the form

$$\|u - v\|_{W_{2,h}^k} \leqslant Ch^{s-k}\|u\|_{W_2^s}, \quad s > k,$$

is called *compatible* with the smoothness (regularity) of the solution u of the boundary-value problem. Here v is the solution of the discrete problem, h is the spatial mesh step, W_2^s and $W_{2,h}^k$ are Sobolev spaces of functions with continuous and discrete argument, respectively, C is a constant which doesn't depend on u and h. For the parabolic case typical estimates are of the form

$$\|u - v\|_{W_{2,h\tau}^{k,k/2}} \leqslant C(h + \sqrt{\tau})^{s-k}\|u\|_{W_2^{s,s/2}}, \quad s > k,$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 65M12, 65M15.

Key words and phrases: interface problem, convergence, Sobolev norm.

Partially supported the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development (Project 174002).

Communicated by Boško Jovanović.

ОБРАЗАЦ 1.

Изјава о ауторству

Потписани-~~а~~ Братислав Средојевић

Број уписа 30/07

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Нумеричка апроксимација дводимензионалних параболичких проблема са делта функцијом

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Крагујевцу, 17.05.2016.

Потпис аутора

Б. Средојевић

ОБРАЗАЦ 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Братислав Средојевић

Број уписа 30/07

Студијски програм Нумеричка математика

Наслов рада Нумеричка апроксимација дводимензионалних параболичких проблема са делта функцијом

Ментор проф. др Дејан Бојовић

Потписани Братислав Средојевић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Крагујевцу.

У Крагујевцу, 17. 05. 2016.

Потпис аутора

Б. Средојевић

ОБРАЗАЦ 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Крагујевцу унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Нумеричка апроксимација дводимензионалних параболичких проблема са делта функцијом

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Крагујевцу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство-некомерцијално
3. Ауторство-некомерцијално-без прераде
4. Ауторство-некомерцијално-делити под истим условима
5. Ауторство-без прераде
6. Ауторство-делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, чији је кратки опис дат на обрасцу број 4.).

У Крагујевцу, 17. 05. 2016.

Потпис аутора

Б. Средојевић

ОБРАЗАЦ 4.

1. **Ауторство -**
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. **Ауторство - некомерцијално.**
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. **Ауторство - некомерцијално - без прераде.**
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. **Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима.**
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. **Ауторство - без прераде.**
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. **Ауторство - делити под истим условима.**
   Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ

Докторска дисертација по називом:

Нумеричка апроксимација дводимензионалних параболичких проблема са делта функцијом

одбрањена је _________________.

МЕНТОР:

____

др Дејан Бојовић, ванредни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

____

др Миодраг Спалевић, редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду

____

др Бранислав Поповић, ванредни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу

____

др Марија Станић, ванредни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу

Докторска дисертација је оцењена оценом ________________________.