



НАСТАВНО-НАУЧНОМ ВЕЋУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА
И ВЕЋУ ЗА ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ
УНИВЕРЗИТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

На седници Наставно-научног већа Природно-математичког факултета у Крагујевцу одржаној 29.12.2021. године (број одлуке: 650/XVI-2), предложени смо, а на седници Већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу одржаној 19.01.2022. године (број одлуке: IV-01-9/17) изабрани смо за чланове Комисије за подношење извештаја о оцени научне заснованости теме докторске дисертације под насловом „**Коспектралност Смитових графова**“ и испуњености услова кандидата **Марије Јеротијевић** и предложеног ментора, за израду докторске дисертације под наведеним насловом.

На основу приложене документације, као и личног увида у рад кандидата, Комисија подноси следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Научни приступ проблему предложеног нацрта докторске дисертације и процена научног доприноса крајњег исхода рада

Спектрална теорија графова је математичка дисциплина у којој се особине графа изучавају коришћењем сопствених вредности и сопствених вектора различитих матрица придружених графу. Ова грана математике последњих деценија бележи интензиван развој, захваљујући бројним и различитим применама, пре свега у домену рачунарства, али и у области хемије, теорији електричних кола, теорији коначних аутомата, у економским наукама, социологији, биологији, итд.

У дисертацији ће бити разматрани тзв. прости графови, тј. коначни, неоријентисани графови без петљи и вишеструких грана. Простом графу $G = (V(G), E(G))$ са скупом чворова $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и скупом грана $E(G)$ може се придружити више матрица. Нека је $M = M(G)$ квадратна матрица реда n придружена графу G . M - карактеристични полином графа G дефинише се са $\phi_M(G, \lambda) = \det(\lambda I - M)$, где је I одговарајућа јединична матрица. Сопствене вредности матрице M називају се M - сопствене вредности графа G , а одговарајући спектар назива се M - спектар графа G . M - индекс (или M - спектрални радијус) графа G је његова највећа M - сопствена вредност. Улогу матрице M , придружене графу G , могу имати различите матрице.

Најстарија и најразвијенија теорија изграђена је полазећи од матрице суседства графа која се дефинише као квадратна $(0,1)$ – матрица реда n , при чему се на позицији (i, j) ове матрице налази 1, ако су чворови v_i и v_j суседни, односно 0, у супротном. Матрица суседства графа G означава се са $A = A(G)$. Означимо даље са $D = D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ дијагоналну матрицу графа G , где је $d_i = d(v_i)$ степен чвора $v_i \in V(G)$. Поред матрице суседства графа, у литератури постоји велики број резултата који се односе на Лапласову

матрицу графа G дефинисану са $L(G) = D(G) - A(G)$, као и на ненегативну Лапласову матрицу $Q(G) = D(G) + A(G)$.

Nikiforov је у раду из 2018. године дефинисао нову матрицу $A_\alpha(G)$ придружену графу G , која представља конвексну линеарну комбинацију матрица $D(G)$ и $A(G)$, тј. $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G)$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Уочавамо да је $A(G) = A_0(G)$, $D(G) = A_1(G)$, $Q(G) = 2A_{\frac{1}{2}}(G)$, као и да је $L(G) = \frac{A_\alpha(G) - A_\beta(G)}{\alpha - \beta}$. На овај начин генерализан је приступ проучавању матрица $A(G)$, $D(G)$ и $Q(G)$, а неке нове интересантне особине уведене матрице су доказане.

За два неизоморфна графа кажемо да су M -коспектрални ако имају исти спектар у односу на произвољну матрицу M која им је придружена. Граф H који је M -коспектралан са графом G , али не и изоморфан графу G , назива се M -коспектрални парњак графа G . M -коспектрална класа еквиваленције графа G представља скуп свих графова M -коспектралних са графом G (укључујући и сам граф G).

Кажемо да је граф G одређен одговарајућим M -спектром ако не постоји ниједан граф (неизоморфан са G) са истим M -спектром. Карактеризација графова одређених спектром је у општем случају веома тежак проблем, који се први пут појављује у раду из 1956. године чији су аутори Нс. Н. Günthard и Н. Primas, а који је мотивисан проблемом из хемије. У раду из 2003. године Е. R. van Dam и W. H. Haemers су изложили преглед познатих резултата о графовима одређеним спектрима различитих матрица придружених графу, након чега је интензивирано проучавање ове врсте проблема у спектралној теорији графова.

Предмет дисертације биће коспектралност, као и одређеност спектром, графова са особином да им је A -спектрални радијус мањи или једнак 2, тј. да њихов цео A -спектар припада интервалу $[-2, 2]$. Графове са овом особином је 1970. године одредио J. H. Smith, па су по њему у каснијим радовима они названи Смитовим графовима. Нека су са P_n , C_n и W_n означени пут, контура и стабло познато као „двострука змија“, са n чворова, респективно. Нека је са $T_{a,b,c}$ означено стабло које садржи тачно један чвор u степена 3, такво да је $T_{a,b,c} - u = P_a \cup P_b \cup P_c$, $a \leq b \leq c$. Стабло $T_{1,1,n-3}$ се у литератури често означава са Z_n и назива се „змија“. Скуп повезаних Смитових графова чине графови $P_n, C_n, W_n, Z_n, T_{1,2,2}, T_{1,2,3}, T_{1,2,4}, T_{1,2,5}, T_{1,3,3}$ и $T_{2,2,2}$.

Неке спектралне карактеризације Смитових графова, као и спектар свих Смитових графова одредили су И. Гутман и Д. Цветковић у раду из 1975. године. Наиме, доказано је да се A -спектар Смитових графова састоји од бројева облика $2 \cos \frac{p}{q}\pi$, где су p и q цели бројеви и $q \neq 0$.

Проблем карактеризације графова са малим спектралним радијусом, којима припадају Смитови графови, у односу на различите матрице придружене графу, привукао је пажњу многих математичара. Најпре је Smith у раду из 1970. године проблем проучавао у односу на спектар матрице суседства, а затим су разматрања у односу на поменути спектар настављена у радовима Цветковића, Doob-а и Гутмана из 1982. године, затим Brouwer-а и Neumaier-а из 1989. године, Ghareghani-нија и коаутора из 2007. године и Guo-а из 2008. године. У радовима из 2009., 2012. и 2013. године Wang и Belardo са коауторима су овај проблем разматрали у односу на спектар Лапласове и ненегативне Лапласове матрице, а у раду из 2020. године исти аутори проблем разматрају у односу на спектар матрице A_α .

Специјално, проблем спектралне карактеризације класе Смитових графова чије су компоненте само путеви и/или контуре, у односу на спектре различитих матрица придружених графу, разматран је у радовима из 2010., 2011. и 2019. године.

У дисертацији ће различитим методама спектралне теорије графова бити проучавана класа Смитових графова или неке њене подкласе у свим наведеним спектрима. Прецизније, разматраће се проблем одређивања коспектралних класа еквиваленције графова чије су све компоненте Смитови графови или припадају одређеном подскупу скупа Смитових графова. У случају A -спектра, при конструкцији коспектралних класа еквиваленције,

као и решавању проблема одређености спектром, биће разmotрена два приступа. Први приступ подразумева примену система линеарних Диофантових једначина, док је други приступ алгоритамски. Осим тога, у случају графова који нису одређени спектром неке од придружених матрица, биће одређени минимални такви графови, односно графови који постају одређени спектром ако се из њих удаљи било која компонента (или подскуп скупа компоненти).

У дисертацији ће проблем коспектралности Смитових графова бити разматран у односу на спектре различитих матрица придружених графу: матрице суседства, Лапласове матрице, ненегативне Лапласове матрице, као и матрице A_α . Биће извршена анализа и поређење добијених резултата који се односе на различите спектре на примеру класе Смитових графова.

2. Образложење предмета, метода и циља који уверљиво упућују да је предложена тема од значаја за развој науке

Предмет истраживања у дисертацији је проблем коспектралности и одређености спектром класе Смитових графова, односно графова чији је спектрални радијус матрице суседства мањи или једнак 2. У дисертацији ће применом различитих метода и техника спектралне теорије графова бити проучавана класа Смитових графова или неке њене подкласе у односу на спектре различитих матрица придружених графу (матрице суседства, Лапласове матрице, ненегативне Лапласове матрице, као и матрице A_α). Осим тога, биће разматран проблем одређивања коспектралних класа еквиваленције графова чије су све компоненте Смитови графови или пак припадају неком подскупу скупа Смитових графова. У случају спектра матрице суседства, при конструкцији коспектралних класа еквиваленције, као и решавању проблема одређености спектром, биће разmotрена два приступа. Наиме, биће разmotрена примена система линеарних Диофантових једначина, као и алгоритамски приступ. У случају графова који нису одређени спектром неке од придружених матрица, биће одређени минимални такви графови, односно графови који постају одређени спектром ако се из њих удаљи било која компонента (или подскуп скупа компоненти).

Циљ дисертације је и поређење добијених и познатих резултата у класи Смитових графова који се односе на различите спектре. Наведена проблематика је веома актуелна и значајна у области спектралне теорије графова, о чему сведоче бројни радови објављивани током година.

Предмет, циљеви и хипотезе ове дисертације обухватају следеће:

- Структурно-спектралне карактеризације Смитових графова засноване на спектрима различитих матрица придружених графу (матрица суседства, Лапласова матрица, ненегативна Лапласова матрица, матрица A_α);
- Одређивање коспектралних класа еквиваленције разматраних класа Смитових графова;
- Одређивање минималних графова који нису одређени спектром у оквиру дате класе Смитових графова;
- Упоредивање добијених резултата који се односе на различите спектре на примеру класе Смитових графова.

Методе које ће се примењивати:

- Примена особина спектра различитих матрица придружених графу;

- Коришћење познатих веза између структурних карактеристика и спектра графа полазећи од матрице суседства, Лапласове, ненегативне Лапласове матрице и матрице A_α , $\alpha \in [0, 1]$;
- Примена апарата линеарне алгебре при одређивању коспектралних класа еквиваленције;
- Примена одговарајућих компјутерских програма за одређивање спектра графа и испитивање коспектралности.

Оквирни садржај дисертације:

1. Прво поглавље ће садржати дефиниције и основне резултате спектралне теорије графова који ће бити коришћени у даљем раду. Посебно, биће описана класа Смитових графова, њене особине, као и мотивација за даље истраживање проблема коспектралности ових графова.
2. Друго поглавље садржаће два приступа испитивању коспектралности Смитових графова у случају A - спектра. Први приступ је примена система линеарних Диофантових једначина при одређивању коспектралних класа еквиваленције, односно утврђивању да је дати граф одређен спектром. Други приступ решавању истих проблема је алгоритамски.
3. У трећем поглављу ће бити проучаване неке особине основног спектра, тј. спектра матрице суседства Смитових графова. Разматраће се засебно услови за одређеност спектром матрице суседства, а у случају неодређености бити одређени минимални одговарајући графови.
4. У четвртном поглављу биће разматрани други спектри придружени графу, односно спектар Лапласове матрице, ненегативне Лапласове матрице, као и матрице A_α . Биће наведене особине засебно свих спектара, као и сличности, разлике и везе између њих, а које се тичу даљег проучавања Смитових графова. Биће представљени резултати из области коспектралности, односно одређености спектром појединих Смитових графова у односу на ове спектре.
5. На крају дисертације биће дат приказ коришћене литературе.

3. Образложење теме за израду докторске дисертације које омогућава закључак да је у питању оригинална идеја или оригиналан начин анализирања проблема

У дисертацији ће бити извршено детаљно проучавање проблема коспектралности у класи Смитових графова, односно графова са особином да им је спектрални радијус матрице суседства мањи или једнак 2. Проблем коспектралности Смитових графова ће бити разматран у односу на спектре различитих матрица придружених графу (матрице суседства, Лапласове матрице, ненегативне Лапласове матрица, као и матрице A_α). Биће извршена свеобухватна анализа проблема одређености спектром свих наведених матрица, одређени минимални графови који нису одређени спектром и извршена конструкција одговарајућих коспектралних класа еквиваленције. Комисија закључује да је предложена тема дисертације „Коспектралност Смитових графова“ кандидата Марије Јеротијевић оригинална идеја.

4. Усклађеност дефиниције предмета истраживања, основних појмова, предложене хипотезе, извора података, метода анализе са критеријумима науке уз поштовање научних принципа у изради коначне верзије докторске дисертације

Кандидат Марија Јеротијевић ће у својој дисертацији обухватити све елементе савременог научно-истраживачког рада поштујући основне критеријуме математичке науке и научних принципа, почев од уводних напомена, основних појмова, предмета истраживања, хипотеза, циљева и метода истраживања, уз имплементацију постојећих и развијањем оригиналних идеја научног истраживања. Полазне хипотезе биће детаљно проверене и образложене кроз анализу обимне литературе. Усклађеност свих сегмената истраживања, у оквиру математике као егзактне науке се подразумева, јер ће само на тај начин истраживање водити ка валидним резултатима. Добијени резултати ће бити верификовани у познатим међународним часописима из области спектралне теорије графова и изложени на неколико научних скупова.

5. Предложени ментор израде докторске дисертације

Институт за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу је за ментора ове дисертације предложио др Бојану Боровићанин, ванредног професора Природно-математичког факултета у Крагујевцу. Др Бојана Боровићанин се активно бави истраживањима у ужој научној области Дискретна математика, посебно у области спектралне и хемијске теорије графова, има публиковане радове у реномираним научним часописима, као и већи број саопштења на међународним и националним научним скуповима.

6. Научна област дисертације

Предложена дисертација припада научној области Математика, ужој научној области Дискретна математика, прецизније, области Теорије графова, и то спектралној теорији графова.

7. Научна област чланова Комисије

Чланови Комисије се активно баве истраживањима у области спектралне и хемијске теорије графова и имају велики број публикованих радова у реномираним међународним и домаћим научним часописима из ових области, као и велики број саопштења на међународним и националним научним скуповима. Др Игор Миловановић је редовни професор Електронског факултета Универзитета у Нишу, ужа научна област Математика. Др Марјан Матејић је доцент Електронског факултета Универзитета у Нишу, ужа научна област Математика.

8. Кратка биографија кандидата

Марија Јеротијевић је рођена 29. новембра 1990. године у Краљеву. Основну школу и Гимназију, природно-математички смер, завршила је у Краљеву. Након тога уписује основне академске студије математике на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу које завршава 2013. године. Исте године уписује мастер академске студије математике на поменутом факултету, које завршава 2015. године, са укупном просечном оценом 9,34 на основним и мастер академским студијама.

Докторске академске студије математике уписала је 2015. године на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, где је положила све испите предвиђене

планом и програмом са просечном оценом 10,00. На докторским студијама бави се теоријом графова и оптимизацијом. Објавила је један научни рад из области спектралне теорије графова.

Запослена је као асистент на Рачунарском факултету Универзитета Унион у Београду. До сада је држала вежбе из предмета Математичка анализа, Напредна математичка анализа, Дискретне структуре, Алгебра, Линеарна алгебра са аналитичком геометријом и Вероватноћа и статистика.

У претходном периоду била је учесник пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије бр. 174033 - Теорија графова и математико програмирање са применама у хемији и рачунарству.

9. Преглед научно-истраживачког рада кандидата

Кандидат Марија Јеротијевић је у досадашњем раду показала интересовање, самосталност и способност за научно-истраживачки рад у области спектралне, али и хемијске теорије графова. До сада има објављен један рад у националном часопису категорије М24, из области докторске дисертације. Осим тога, са коауторима, припремила је и послала на рецензију и један рад из области хемијске теорије графова. Такође, у току јуна 2022. године учествоваће са саопштењем из области докторске дисертације на међународном научном скупу.

Остварени резултати

Научни радови објављени у истакнутом научном часопису националног значаја (М24)

1. D. Cvetković, M. Jerotijević, *Compositions of cospectrality graphs of Smith graphs*, Kragujevac J. Math., 47(2) (2023), 271–279, (ISSN 2406-3045), **M24**

З А К Л Ј У Ч А К

Кандидат Марија Јеротијевић, студент докторских академских студија математике на Природно-математичком факултету у Крагујевцу, је у досадашњем раду показала интересовање за научно-истраживачки рад, као и висок степен одговорности и способности решавања постављених научних задатака. Досадашњи резултати научно-истраживачког рада кандидата везани за предложену тему докторске дисертације објављени су у оквиру једног рада у часопису категорије М24, на основу чега се закључује да је кандидат остварио почетне резултате у раду на предложеној теми дисертације, што обећава њену успешну реализацију.

Комисија сматра да кандидат Марија Јеротијевић испуњава све услове који су неопходни за пријаву теме докторске дисертације, као и да је предложена тема докторске дисертације оригинална и значајна са научне тачке гледишта.

Комисија са задовољством предлаже Наставно-научном већу Природно-математичког факултета у Крагујевцу и Већу за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу, да се тема под називом „**Коспектралност Смитових графова**“ прихвати као тема докторске дисертације и одобри кандидату **Марији Јеротијевић** рад на њеној изради, и да се за **ментора** докторске дисертације именује **др Војана Боровићанин**, ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу.

У Нишу и Крагујевцу, 20.01.2022.

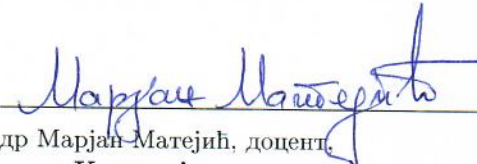
КОМИСИЈА



др Игор Миловановић, редовни професор,
председник Комисије
Електронски факултет
Универзитет у Нишу
Ужа научна област: Математика



др Бојана Боровићанин, ванредни професор,
члан Комисије (предложени ментор)
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу
Ужа научна област: Дискретна математика



др Марјан Матејић, доцент,
члан Комисије
Електронски факултет
Универзитет у Нишу
Ужа научна област: Математика

Већу катедре Института за математику и информатику

**Наставно-научном већу Природно-математичког факултета у
Крагујевцу**

Предмет: Мишљење руководиоца ДАС Математике о Извештају за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата и предложеног ментора за израду докторске дисертације

На основу увида у садржај Извештаја о оцени научне заснованости теме и испуњености услова кандидата **Марије Јеротијевић** за израду докторске дисертације под радним насловом „**Коспектралност Смитових графова**” и предложеног ментора **проф. др Бојане Боровићанин**, дајем **позитивно мишљење** на садржај Извештаја.

У Крагујевцу,

24.01.2022. године

Руководилац ДАС Математике

Емилија Нешовић
проф. др Емилија Нешовић