



III разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете  
науке и технолошког развоја Републике Србије  
ЗАДАЦИ- БЕТА КАТЕГОРИЈА\*

ОКРУЖНИ НИВО  
20. фебруар 2021.

1. За мерење активне снаге индуктивног пријемника користи се струјно коло чија је схема приказана на слици 1. Амперметар и волтметар сматрати идеалним. Капацитет кондензатора  $C$  се подеси тако да ефективна вредност струје кроз грану са генератором наизменичног напона буде минимална ( $I_{\min}$ ). Доказати да је активна снага индуктивног пријемника дата формулом  $P_a = UI_{\min}$ . [20 поена]

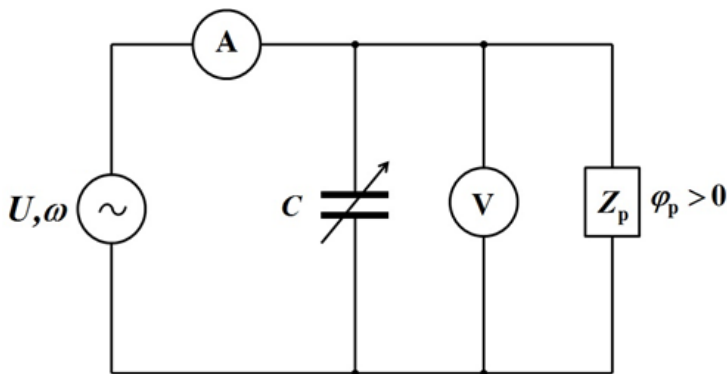
2. Бесконачан проводник који се налази у ваздуху, савијен је као на слици 2.а. Делови проводника датих у виду полуправа, леже дуж правца  $x$  и  $y$ -оса, слика 2.а. Кружни прстен формиран увијањем проводника је полупречника  $R = 10\text{ cm}$  и лежи у равни  $\alpha$ . Раван  $\alpha$  садржи  $y$ -осу и са  $z$  и  $x$ -осама заклапа угао  $\theta = 45^\circ$  (слика 2.а). У координатном почетку  $O$ , на слици 2.а, жице проводници су изоловани и не долази до формирања чвора, већ струје теку као на слици 2.а. Оса симетрије која пролази кроз центар кружног прстена  $C$  и нормална је на раван  $\alpha$ , у којем лежи кружни прстен, сече  $x$ -осу у тачки  $M$ . Уколико кроз проводник тече струја јачине  $I = 1\text{ A}$ , одредити интензитет индукције магнетног поља у тачки  $M$ . Узети да је магнетна пропустљивост ваздуха једнака магнетној пропустљивости вакуума,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ H/m}$ .

Интензитет индукције магнетног поља од праволинијског проводника у тачки  $O$  датог у виду полуправе  $aA$ , као на слици 2.б, се може се одредити као половина интензитета индукције магнетног поља у тачки  $O$  бесконачно дугог проводника датог у виду праве  $a$  на слици 2.б. [20 поена]

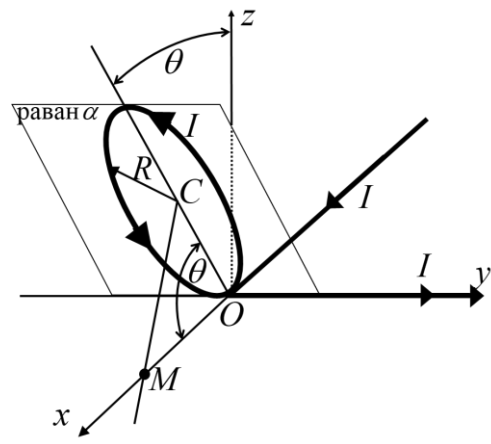
3. У колу 3 са слике одредити укупну снагу која се развија на отпорницима  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$ . Познато је  $\varepsilon = 90\text{ V}$ ,  $r = 0,55\ \Omega$ ,  $R_1 = 10\ \Omega$ ,  $R_2 = 20\ \Omega$ ,  $R_3 = 60\ \Omega$  и  $R_4 = 60\ \Omega$ . Отпорности спојних проводника, контаката, и унутрашњу отпорност генератора електромоторне силе занемарити. [20 поена]

4. За електрично коло наизменичне струје са слике 4 одредити напон између тачака  $A$  и  $B$ . Дати су елементи кола  $R = 10\ \Omega$ ,  $R_1 = 20\ \Omega$ ,  $R_2 = 25\ \Omega$ ,  $C = 1\ \mu\text{F}$ ,  $\omega = 100\pi\text{ rad/s}$  и  $U = 20\text{ V}$ . [20 поена]

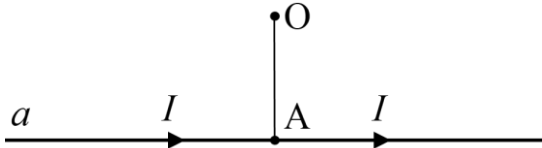
5. На  $p-V$  дијаграму (слика 5) приказана су два кружна циклуса, циклус  $A$  ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ ) и циклус  $B$  ( $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 5$ ). Означимо коефицијент корисног дејства циклуса  $A$  са  $\eta_A$ , а циклуса  $B$  са  $\eta_B$ . Ако је позната вредност њиховог односа  $k = \frac{\eta_A}{\eta_B}$ ,  $k > 1$ , одредити  $\eta_A$  и  $\eta_B$  у зависности од  $k$ . У оба циклуса радна супстанца је један мол истог идеалног једноатомског гаса. [20 поена]



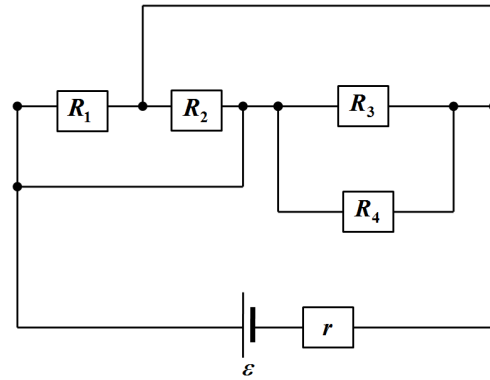
слика 1



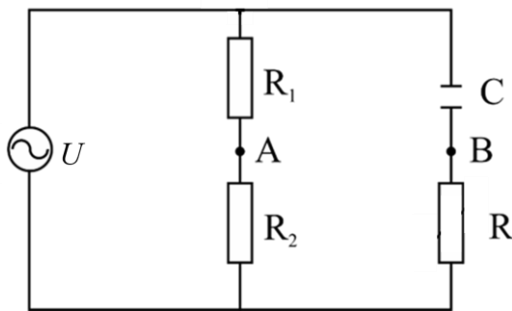
слика 2.а



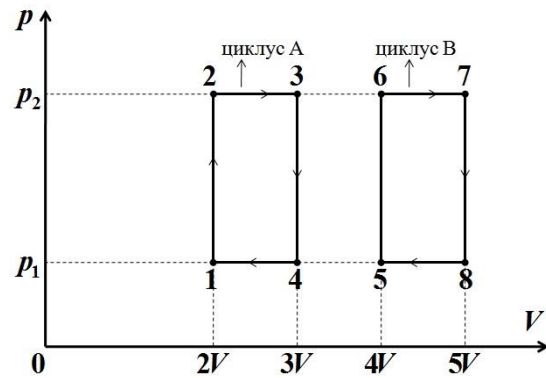
слика 2.б



слика 3



слика 4



слика 5

Решења свих задатака треба јасно образложити са јасно дефинисаним физичким законима и величинама које користите приликом решавања задатака. Нарочито дефинисати ознаке које уводите а које нису уобичајене.

\* У бета категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима гимназија општег типа, специјализованих гимназија за области које нису математика и физика, средњих стручних школа и уметничких школа.

Задатке 1,3,5 припремио: Владимир Чубровић; задатке 2, 4 припремили: Љубица Кузмановић и Христина Делибашић, ПМФ Крагујевац

Рецензент: проф. др Ненад Стевановић, ПМФ Крагујевац

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: доц. др Владимир Марковић, ПМФ Крагујевац

Свим такмичарима желимо успешан рад!



### III разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете,  
науке и технолошког развоја Републике Србије  
РЕШЕЊА-БЕТА КАТЕГОРИЈА\*

ОКРУЖНИ НИВО  
20. фебруар 2021.

**1.** Први начин. Активна снага пријемника је  $P_a = UI_p \cos(\varphi_p)$  [2п]. Први Кирхофов закон примењен на чвор В је

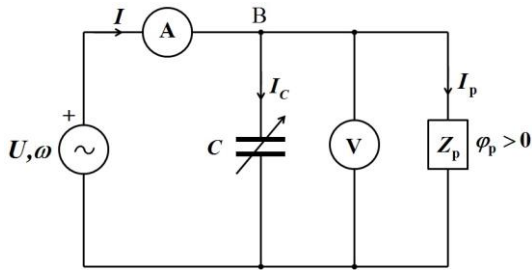
$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_p$  [2п] (слика 1.а), где је  $\underline{I}_C = j\omega C \underline{U}$  [2п] и  $\underline{I}_p = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_p} = \frac{\underline{U}}{R + jX_p} = \frac{R_p - jX_p}{Z_p^2} \cdot \underline{U}$  [3п], тако да је

$\underline{I} = \left[ \frac{R_p}{Z_p^2} + j \left( \omega C - \frac{X_p}{Z_p^2} \right) \right] \cdot \underline{U}$ , па је  $I = \sqrt{\left( \frac{R_p}{Z_p^2} \right)^2 + \left( \omega C - \frac{X_p}{Z_p^2} \right)^2} \cdot U$  [4п]. Струја  $I$  има минимум када је  $\omega C - \frac{X_p}{Z_p^2} = 0$  тј.

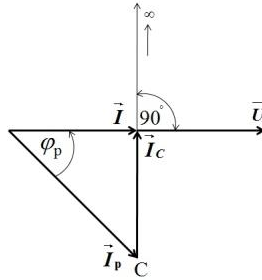
када је  $\omega C = \frac{X_p}{Z_p^2}$  и тада је њена вредност  $I_{\min} = \frac{R_p}{Z_p^2} \cdot U$  [2п]. Како је  $\frac{R_p}{Z_p} = \cos(\varphi_p)$  [2п] следи

$I_{\min} = \frac{U}{Z_p} \cos(\varphi_p) = I_p \cos(\varphi_p)$  [2п] па је активна снага индуктивног пријемника  $P_a = UI_p \cos(\varphi_p) = UI_{\min}$  [1п] што је и

требало доказати.



Слика 1.а



Слика 1.б

**Други начин.** Како је  $\vec{I} = \vec{I}_p + \vec{I}_C$ , врх фазора  $\vec{I}$  налази се на полуправој на којој лежи фазор  $\vec{I}_C$  од тачке С за коју је  $I_C = 0$ , до  $+\infty$  када  $I_C \rightarrow +\infty$  [5п]. Са фазорског дијаграма се види да је дужина фазора  $\vec{I}$  најмања када се он по

правцу поклапа са фазором  $\vec{U}$  (слика 1.б) [7п]. Дакле струја  $I$  ће бити минимална када је у фази са напонем  $U$ , односно када је реактивна отпорност кола једнака нули. У том случају је  $I_{\min} = I_p \cos(\varphi_p)$  [5п]. Активна снага индуктивног пријемника је  $P_a = UI_p \cos(\varphi_p)$  [2п] па је на основу претходног разматрања  $P_a = UI_p \cos(\varphi_p) = UI_{\min}$  [1п], што је и требало доказати.

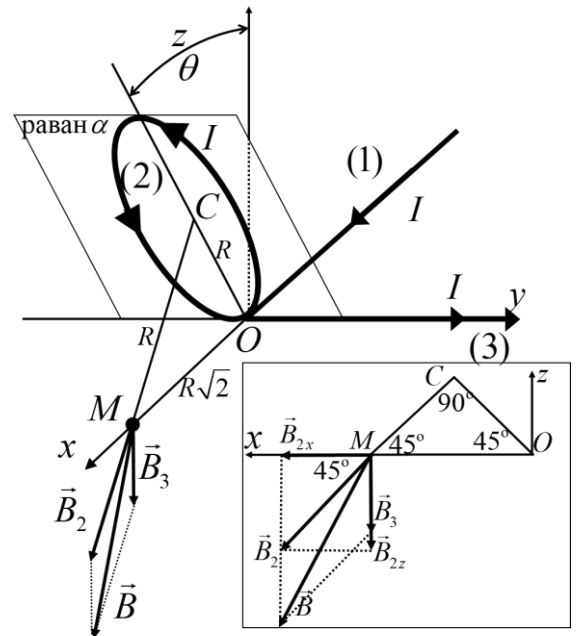
**2.** Индукција магнетног поља у тачки М је векторски збир индукција магнетних поља које потичу од делова проводника (1), (2) и (3),  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$  [2п], слика 2. Како се тачка М налази на  $x$ -оси, у

продужетку дела проводника (1), интензитет индукције магнетног поља у тачки М од дела проводника (1) је  $B_1 = 0$  [1п]. Како је  $\overline{OM} = R\sqrt{2}$  индукција магнетног поља од дела проводника (3) износи

$\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi R} \vec{e}_z$  [5п]. Тачка М лежи на оси симетрије кружног прстена, где је  $\overline{CM} = R$ . Интензитет индукције магнетног поља од

кружног прстена (2) износи  $B_2 = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{8R}$  [5п]. Вектор индукције магнетног поља  $\vec{B}_2$  можемо разложити на компоненте

$\vec{B}_{2x} = \frac{\mu_0 I}{8R} \vec{e}_x$  [1п] и  $\vec{B}_{2z} = -\frac{\mu_0 I}{8R} \vec{e}_z$  [1п]. Резултујући интензитет индукције магнетног поља износи  $B = \sqrt{B_{2x}^2 + (B_{2z} + B_3)^2}$  [2п], одакле



слика 2

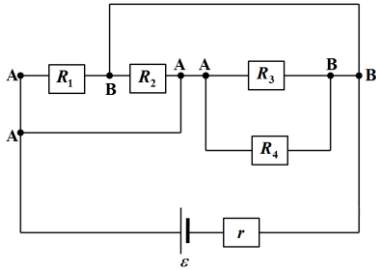


**ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА  
ШКОЛСКЕ 2020/2021. ГОДИНЕ.**

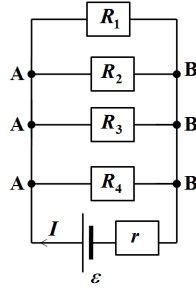


је  $B = \frac{\mu_0 I}{R} \sqrt{\frac{1}{64} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\right)^2} \approx 2,8 \mu\text{T}$  [2+1п].

3. Чворови кола који су спојени проводником занемарљиве отпорности су на једнаком потенцијалу. Чворове кола чији су потенцијали једнаки означимо истим латиничним словима (слика 3а). Полазно коло ћемо затим преуредити и изгледаће као што је приказано на слици 3б.



Слика 3а



Слика 3б

Снага генератора електромоторне силе једнака је укупној снази која се развија на свим отпорницима у колу  $P_\varepsilon = P_r + P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_2} + P_{R_2}$ , тако да је укупна снага која се развија на отпорницима  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$  једнака  $P_{Ru} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_2} + P_{R_2} = P_\varepsilon - P_r$  [4п]. Снага генератора електромоторне силе је једнака  $P_\varepsilon = \varepsilon \cdot I$  [1п], где је  $I$  јачина

струје кроз грану са генератором електромоторне силе  $I = \frac{\varepsilon}{R_e}$  [2п], тако да је  $P_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R_e}$  [1п] ( $R_e$  је укупна

еквивалентна отпорност кола). Укупна еквивалентна отпорност кола је  $R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} + r \approx 6 \Omega$  [7+1п]. Из

претходног следи да је снага генератора електромоторне силе једнака  $P_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R_e} \approx 1350 \text{ W}$  [1п]. Снага која се развија

на отпорнику  $r$  је  $P_r = I^2 r = \frac{\varepsilon^2}{R_e^2} \cdot r \approx 124 \text{ W}$  [1+1п]. Коначно је  $P_{Ru} = P_\varepsilon - P_r \approx 1226 \text{ W}$  [1п].

4. **I начин:** Нека је  $\vec{I}_1$  јачина струје кроз серијску везу отпорника  $R_1$  и  $R_2$  а,  $\vec{I}_2$  јачина струје у грани са кондензатором и потенциометром, слика 4а. Фазорски дијаграм прве гране је приказан на слици 4б. Напони на отпорницима су у фази са струјом у тој грани. Векторски збир ових напона даће резултујући напон извора  $\vec{U} = \vec{U}_{R_1} + \vec{U}_{R_2}$ , где је  $U_{R_1} = R_1 I_1$  [1п]  $U_{R_2} = R_2 I_1$  [1п]. Важи да је  $I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}$  [1п] За другу грану фазорски дијаграм је

дат на слици 4в, где важи да је  $U_c = \frac{1}{\omega C} I_2$  [1п] и  $U_R = R_2 I_2$  [1п]. Са фазорског дијаграма важи да је  $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C$ ,

односно,  $I_2 = U / \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$  [1п]. Фазни угао за који струја у грани предњачи у односу на напон те гране је

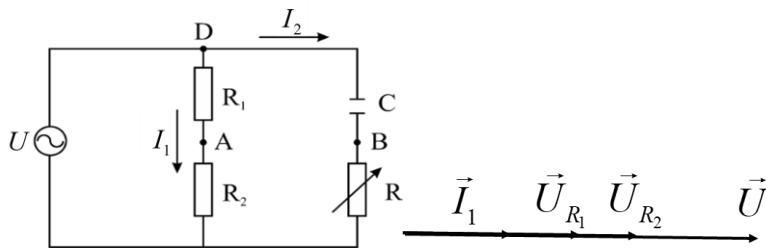
$\phi = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$  [3п]. На основу дијаграма једне и друге гране, пошто је заједничка величина напон извора, цртамо

фазорски дијаграм на чијој оси је напон, слика 4г, а у односу на њега фазоре напона  $\vec{U}_{R_1}$  и  $\vec{U}_C$  (слика 4г). Тражени напон је  $\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{R_1} - \vec{U}_C$ , где је  $U_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$  [3п], а  $U_C = U / \sqrt{(\omega CR)^2 + 1}$  [3п]. Вредност напона између тачака А и В

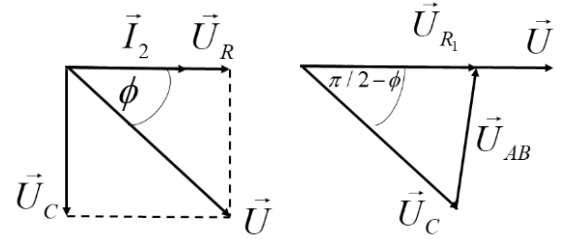
износи 
$$U_{AB} = \sqrt{U_C^2 + U_{R_1}^2 - 2U_C U_{R_1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)},$$
 односно



$$U_{AB} = U \sqrt{\frac{1}{1+(R\omega C)^2} + \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 - \frac{2R_1}{R_1+R_2} \frac{1}{1+(\omega CR)^2}} \approx 11,1 \text{ V [4+1п].}$$



Слика 4а



Слика 4б

Слика 4в

Слика 4г

**II начин:** У форми комплексних бројева, напон на отпорнику  $R_1$  се може написати као  $\bar{U}_{R_1} = R_1 \bar{I}_1$  [1п], при чему је импеданса гране са отпорницима  $\bar{Z}_1 = R_1 + R_2$  [4п]. Јачина струје у тој грани је  $\bar{I}_1 = \frac{U}{\bar{Z}_1} = \frac{U}{|\bar{Z}_1|} \bar{Z}_1^*$ , па на основу тих релација напон на отпорнику  $R_1$  износи  $\bar{U}_{R_1} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U$  [2п]. Напон на кондензатору  $C$  у форми комплексних бројева је  $\bar{U}_C = \bar{Z}_C \bar{I}_{CR}$  [1п], док је импеданса гране којој припада дата релацијом  $\bar{Z}_2 = R - j \frac{1}{\omega C}$  [4п]. За струју у тој грани важи да је  $\bar{I}_2 = \frac{u}{\bar{Z}_2} = \frac{u}{|\bar{Z}_2|} \bar{Z}_2^*$ , одакле следи да је напон на кондензатору облика  $\bar{U}_C = \frac{U}{(R\omega C)^2 + 1} (1 - j\omega CR)$  [2п].

Тражени напон је  $\bar{U}_{AB} = \bar{U}_{R_1} - \bar{U}_C$ , односно  $\bar{U}_{AB} = U \left( \frac{R_1}{R_1+R_2} - \frac{1}{(R\omega C)^2 + 1} + j \frac{\omega CR}{(R\omega C)^2 + 1} \right)$  [1п], па је

$$|U_{AB}| = U \sqrt{\frac{1}{1+(R\omega C)^2} + \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 - \frac{2R_1}{R_1+R_2} \frac{1}{1+(\omega CR)^2}} \approx 11,1 \text{ V [4+1п].}$$

5. За циклус А ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ ) коефицијент корисног дејства је  $\eta_A = \frac{A_A}{Q_{1A}} = \frac{(p_2 - p_1)(3V - 2V)}{nc_V(T_2 - T_1) + nc_p(T_3 - T_2)}$  [2п]. По

услову задатка је  $n = 1 \text{ mol}$ ,  $c_V = \frac{3}{2}R$  и  $c_p = \frac{5}{2}R$ , тако да је  $\eta_A = \frac{2(p_2 - p_1)V}{3R(T_2 - T_1) + 5R(T_3 - T_2)}$  [1п]. Једначине стања су

редом  $p_1 \cdot 2V = RT_1$  [1п],  $p_2 \cdot 2V = RT_2$  [1п],  $p_2 \cdot 3V = RT_3$  [1п] и  $p_1 \cdot 3V = RT_4$  [1п]. На основу претходног је

$$\eta_A = \frac{2}{6 + 5 \frac{p_2}{p_2 - p_1}} (1) [2п].$$

За циклус В ( $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 5$ ) коефицијент корисног дејства је  $\eta_B = \frac{A_B}{Q_{1B}} = \frac{(p_2 - p_1)(5V - 4V)}{nc_V(T_6 - T_5) + nc_p(T_7 - T_6)}$  [2п]. По

услову задатка је  $n = 1 \text{ mol}$ ,  $c_V = \frac{3}{2}R$  и  $c_p = \frac{5}{2}R$ , тако да је  $\eta_B = \frac{2(p_2 - p_1)V}{3R(T_6 - T_5) + 5R(T_7 - T_6)}$  [1п]. Једначине стања су

редом  $p_1 \cdot 4V = RT_5$  [1п],  $p_2 \cdot 4V = RT_6$  [1п],  $p_2 \cdot 5V = RT_7$  [1п] и  $p_1 \cdot 5V = RT_8$  [1п]. На основу претходног је

$$\eta_B = \frac{2}{12 + 5 \frac{p_2}{p_2 - p_1}} (2) [2п].$$

По услови задатка је  $\frac{\eta_A}{\eta_B} = k$  и када убацимо изразе (1) и (2) добијамо  $\frac{p_2}{p_2 - p_1} = \frac{12 - 6k}{5k - 5}$ . Враћајући претходни израз



**ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА  
ШКОЛСКЕ 2020/2021. ГОДИНЕ.**



у изразе (1) и (2) добијамо  $\eta_A = \frac{k-1}{3}$  [1п] и  $\eta_B = \frac{k-1}{3k}$  [1п].

(У свим задацима признати и друге тачне начине решавања са еквивалентним начином бодовања)