ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2020/2021. ГОДИНЕ.

III разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете науке и технолошког развоја Републике Србије

ОКРУЖНИ НИВО
20. фебруар 2021.

ЗАДАЦИ-АЛФА КАТЕГОРИЈА*

1. За мерење активне снаге индуктивног пријемника користи се струјно коло чија је схема приказана на слици 1. Амперметар и волтметар сматрати идеалним. Капацитет кондензатора C се подеси тако да ефективна вредност струје кроз грану са генератором наизменичног напона буде минимална ($I_{\min}$). Доказати да је активна снага индуктивног пријемника дата формулом $P_a = UI_{\min}$. **[20 поена]**

2. Бесконачан проводник који се налази у ваздуху, савијен је као на слици 2. Делови проводника датих у виду полуправа, леже дуж правца x и y-оса, слика 2. Кружни прстен формиран увијањем проводника је полупречника $R = 10\,\text{cm}$ и лежи у равни α. Раван α садржи y-осу и са z и x-осама заклапа угао $\theta = 45^\circ$ (слика 2). У координатном почетку O, на слици 2, жице проводници су изоловани и не долази до формирања чвора, већ струје теку као на слици 2. Оса симетрије која пролази кроз центар кружног прстена C и нормална је на раван α, у којем лежи кружни прстен, сече x-осу у тачки М. Уколико кроз проводник тече струја јачине $I = 1\,\text{A}$, одредити интензитет индукције магнетног поља у тачки М. Узети да је магнетна пропустљивост ваздуха једнака магнетној пропустљивости вакуума, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{H/m}$.

[20 поена]

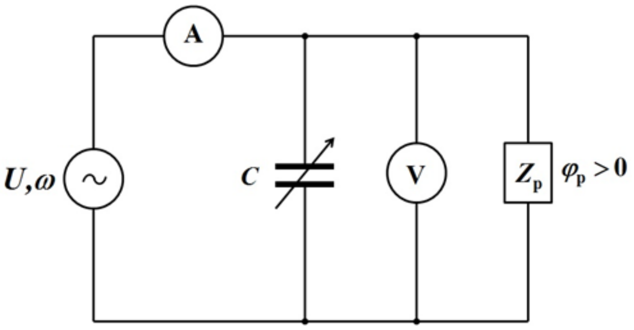
3. У колу 3 са слике одредити укупну снагу која се развија на отпорницима R_1, R_2, R_3 и R_4. Познато је $\varepsilon = 90\,\text{V}$, $r = 0{,}55\,\Omega$, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 60\,\Omega$ и $R_4 = 60\,\Omega$. Отпорности спојних проводника, контаката, и унутрашњу отпорност генератора електромоторне силе занемарити. **[20 поена]**

4. ~~У колу наизменичне струје, са слике 4, повезани су извор максимлане вредности напона $U_0 = 10\,\text{V}$ и промењливе кружне фреквенције ω, затим отпорници отпорности $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$, калем индуктивности $L = 10\,\text{H}$ и кондензатор капацитета $C = 10\,\mu\text{F}$.~~

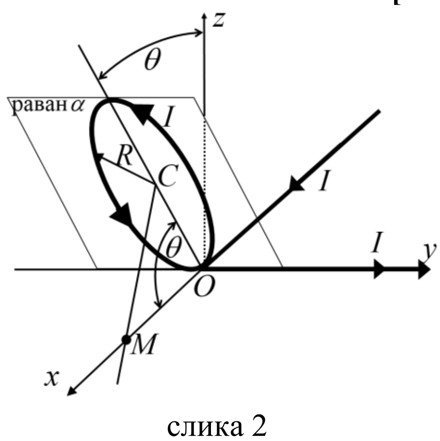
~~а) Одредити кружну фреквенцију извора, ω_0, такву да напон између тачака А и В буде једнак нули.~~ ~~**[8 поена]**~~

~~б) Одредити максималну вредност напона између тачака А и В у случају када је кружна фреквенција извора $\omega = 2\omega_0$, где је ω_0 фреквенција извора у делу задатка под а).~~ ~~**[12 поена]**~~

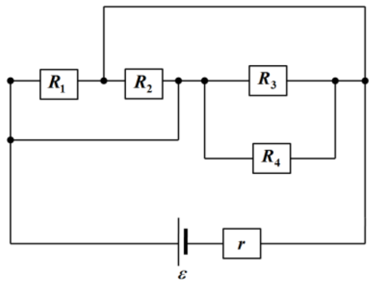
5. Један мол идеалног једноатомског гаса пролази кроз кружни циклус $1 \to 2 \to 3 \to 1$ који је приказан на $T - V$ дијаграму (слика 5). Током процеса $1 \to 2$ температура гаса се мења у зависности од запремине по закону $T = \alpha V^2$, где је α позитивна константа. Током циклуса однос максималног и минималног притиска гаса је $\dfrac{p_{\max}}{p_{\min}} = 2$. Ако током процеса $1 \to 2$ гас прими количину топлоте $Q_1 = 120\,\text{J}$, одредити укупну количину топлоте коју гас ослободи током процеса $2 \to 3$ и $3 \to 1$. **[20 поена]**



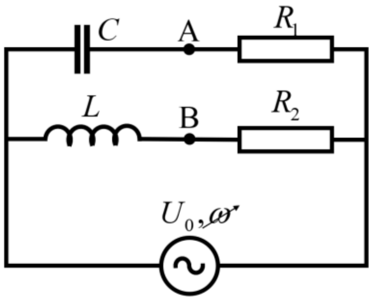
слика 1



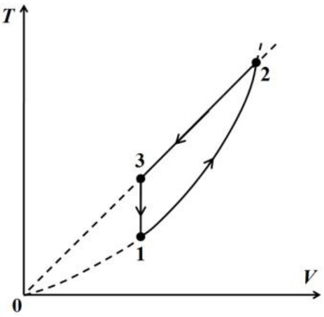
слика 2



слика 3



слика 4



слика 5

Решења свих задатака треба јасно образложити са јасно дефинисаним физичким законима и величинама које користите приликом решавања задатака. Нарочито дефинисати ознаке које уводите а које нису уобичајене.

***** У алфа категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

Задатке 1,3,5 припремио: Владимир Чубровић; задатке 2, 4 припремили: Љубица Кузмановић и Христина Делибашић, ПМФ Крагујевац

Рецензент: проф. др Ненад Стевановић, ПМФ Крагујевац

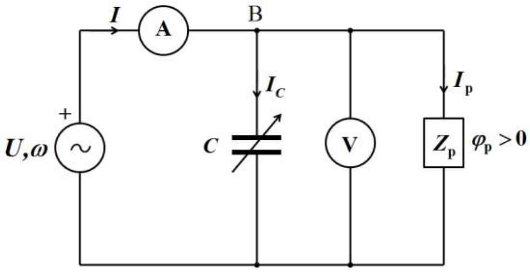
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: доц. др Владимир Марковић, ПМФ Крагујевац

Свим такмичарима желимо успешан рад!

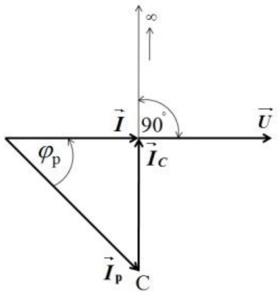
III разред **Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије** **ОКРУЖНИ НИВО 20. фебруар 2021.**

РЕШЕЊА- АЛФА КАТЕГОРИЈА*

1. **Први начин.** Активна снага пријемника је $P_a = UI_p\cos(\varphi_p)$ **[2п]**. Први Кирхофов закон примењен на чвор В је $\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_p$ **[2п]** (слика 1.а), где је $\underline{I}_C = j\omega C\underline{U}$ **[2п]** и $\underline{I}_p = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_p} = \dfrac{\underline{U}}{R + jX_p} = \dfrac{R_p - jX_p}{Z_p^2}\cdot\underline{U}$ **[3п]**, тако да је $\underline{I} = \left[\dfrac{R_p}{Z_p^2} + j\left(\omega C - \dfrac{X_p}{Z_p^2}\right)\right]\cdot\underline{U}$, па је $I = \sqrt{\left(\dfrac{R_p}{Z_p^2}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{X_p}{Z_p^2}\right)^2}\cdot U$ **[4п]**. Струја I има минимум када је $\omega C - \dfrac{X_p}{Z_p^2} = 0$ тј. када је $\omega C = \dfrac{X_p}{Z_p^2}$ и тада је њена вредност $I_{min} = \dfrac{R_p}{Z_p^2}\cdot U$ **[2п]**. Како је $\dfrac{R_p}{Z_p} = \cos(\varphi_p)$ **[2п]** следи $I_{min} = \dfrac{U}{Z_p}\cos(\varphi_p) = I_p\cos(\varphi_p)$ **[2п]** па је активна снага индуктивног пријемника $P_a = UI_p\cos(\varphi_p) = UI_{min}$ **[1п]** што је и требало доказати.



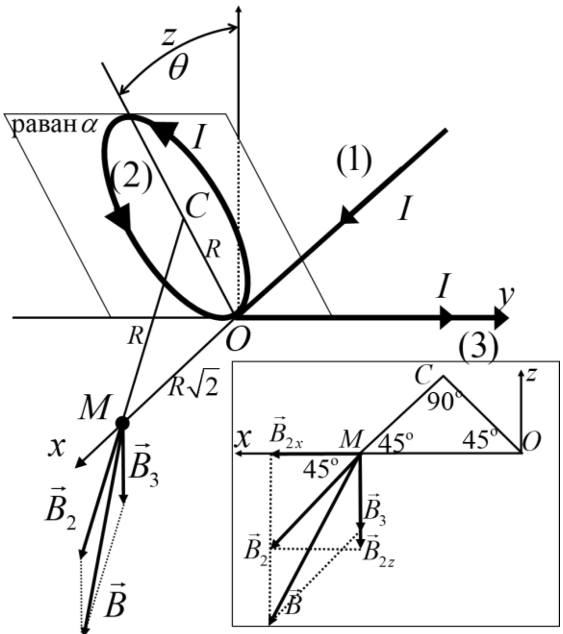
Слика 1.а



Слика 1.б

Други начин. Како је $\vec{I} = \vec{I}_P + \vec{I}_C$, врх фазора $\vec{I}$ налази се на полуправој на којој лежи фазор $\vec{I}_C$ од тачке C за коју је $I_C = 0$, до $+\infty$ када $I_C \to +\infty$ **[5п]**. Са фазорског дијаграма се види да је дужина фазора $\vec{I}$ најмања када се он по правцу поклапа са фазором $\vec{U}$ (слика1.б) **[7п]**. Дакле струја I ће бити минимална када је у фази са напоном U, односно када је реактивна отпорност кола једнака нули. У том случају је $I_{min} = I_p\cos(\varphi_p)$ **[5п]**. Активна снага индуктивног пријемника је $P_a = UI_p\cos(\varphi_p)$ **[2п]** па је на основу претходног разматрања $P_a = UI_p\cos(\varphi_p) = UI_{min}$ **[1п],** што је и требало доказати.

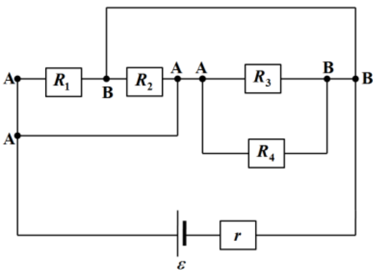
2. Индукција магнетног поља у тачки M је векторски збир индукција магнетних поља које потичу од делова проводника (1), (2) и (3), $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$ **[2п]**, слика 2. Како се тачка M налази на x-оси, у продужетку дела проводника (1), интензитет индукције магнетног поља у тачки M од дела проводника (1) је $B_1 = 0$ **[1п]**. Како је $\overline{OM} = R\sqrt{2}$ индукција магнетног поља од дела проводника (3) износи $\vec{B}_3 = -\dfrac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi R}\vec{e}_z$ **[5п]**. Тачка M лежи на оси симетрије кружног прстена, где је $\overline{CM} = R$. Интензитет индукције магнетног поља од кружног прстена (2) износи $B_2 = \dfrac{\mu_0}{2}\dfrac{IR^2}{\left(R^2 + R^2\right)^{3/2}} = \dfrac{\mu_0 I\sqrt{2}}{8R}$ **[5п]**. Вектор индукције магнетног поља $\vec{B}_2$ можемо разложити на компоненте $\vec{B}_{2x} = \dfrac{\mu_0 I}{8R}\vec{e}_x$ **[1п]** и $\vec{B}_{2z} = -\dfrac{\mu_0 I}{8R}\vec{e}_z$ **[1п]**. Резултујући интензитет



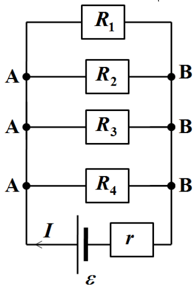
слика 2

индукције магнетног поља износи $B=\sqrt{B_{2x}^2+(B_{2z}+B_3)^2}$ **[2п]**, одакле је $B=\frac{\mu_0 I}{R}\sqrt{\frac{1}{64}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\right)^2}\approx 2{,}8\,\mu\mathrm{T}$ **[2+1п]**.

$\boxed{3}$. Чворови кола који су спојени проводником занемарљиве отпорности су на једнаком потенцијалу. Чворове кола чији су потенцијали једнаки означићемо истим латиничним словима (слика 3а). Полазно коло ћемо затим преуредити и изгледаће као што је приказано на слици 3б.



Слика 3а



Слика 3б

Снага генератора електромоторне силе једнака је укупној снази која се развија на свим отпорницима у колу $P_\varepsilon=P_\mathrm{r}+P_{R_1}+P_{R_2}+P_{R_2}+P_{R_2}$, тако да је укупна снага која се развија на отпорницима R_1, R_2, R_3 и R_4 једнака $P_{Ru}=P_{R_1}+P_{R_2}+P_{R_2}+P_{R_2}=P_\varepsilon-P_\mathrm{r}$ **[4п]**. Снага генератора електромоторне силе је једнака $P_\varepsilon=\varepsilon\cdot I$ **[1п]**, где је I јачина струје кроз грану са генератором електромоторне силе $I=\frac{\varepsilon}{R_\mathrm{e}}$ **[2п],** тако да је $P_\varepsilon=\frac{\varepsilon^2}{R_\mathrm{e}}$ **[1п]** (R_e је укупна еквивалентна отпорност кола). Укупна еквивалентна отпорност кола је $R_\mathrm{e}=\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}}+r\approx 6\,\Omega$ **[7+1п]**. Из претходног следи да је снага генератора електромоторне силе једнака $P_\varepsilon=\frac{\varepsilon^2}{R_\mathrm{e}}\approx 1350\ \mathrm{W}$ **[1п]**. Снага која се развија на отпорнику r је $P_\mathrm{r}=I^2 r=\frac{\varepsilon^2}{R_\mathrm{e}^2}\cdot r\approx 124\ \mathrm{W}$ **[1+1п]**. Коначно је $P_{Ru}=P_\varepsilon-P_\mathrm{r}\approx 1226\ \mathrm{W}$ **[1п]**.

$\boxed{4}$ ~~**Део а) (8 поена)** Из услова задатка да је напон $U_\mathrm{AB}=0$, следи да је $U_\mathrm{AC}=U_\mathrm{BC}$ **[1п]** и $U_\mathrm{AD}=U_\mathrm{BD}$ **[1п]**, где је $U_\mathrm{AC}=\frac{I_1}{\omega_0 C}$ **[1п]**, $U_\mathrm{BC}=I_2\omega_0 L$ **[1п]**, $U_\mathrm{AD}=I_1R_1$ **[1п]** и $U_\mathrm{BD}=I_2R_2$ **[1п]**, слика 3а. На основу претходних једначина добија се $\omega_0=\sqrt{\frac{R_2}{R_1LC}}=100\sqrt{2}\,\mathrm{Hz}$ **[1+1п].**~~

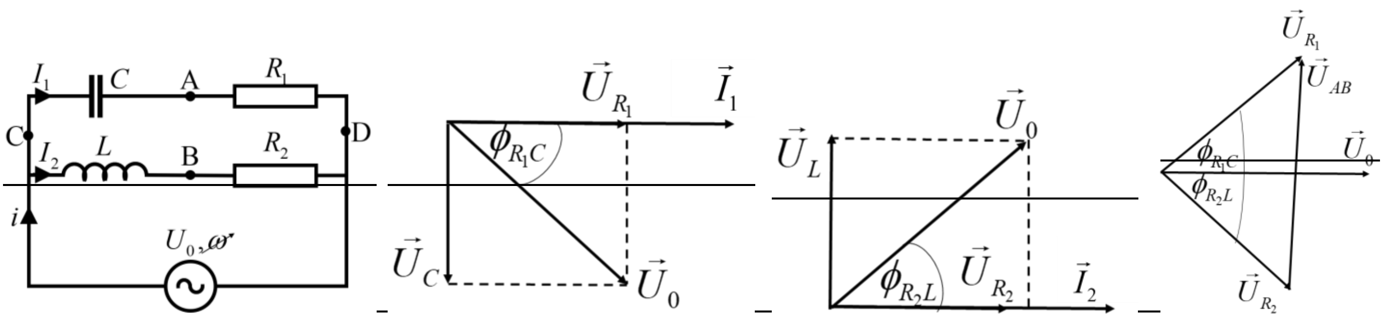
~~**Део б) (12 поена)**~~

~~**I начин за б)**~~

~~Дефинишимо струје у колу као на слици 3.а. Фазорски дијаграм за грану кола која садржи кондензатор и отпорник R_1 је дат на 3б. Фазор напона на отпорнику је $U_{R_1}=R_1I_1$ **[1п]**. Фазор напона на кондензатору једнак је $U_C=\frac{1}{2\omega_0 C}I_1$ **[1п]**. Напон над том граном је напон извора и једнак је $U_0=\sqrt{U_{R_1}^2+U_C^2}=I_1\sqrt{R_1^2+\left(\frac{1}{2\omega_0 C}\right)^2}$, на основу чега је $I_1=U_0\Big/\sqrt{R_1^2+\left(\frac{1}{2\omega_0 C}\right)^2}$. Максимлана вредност напона на отпорнику износи $U_{R_1}=I_1R_1=R_1U_0\Big/\sqrt{R_1^2+\left(\frac{1}{2\omega_0 C}\right)^2}=9{,}42\,\mathrm{V}$ **[2п]**, а фазни угао између напона и струје у грани износи $\phi_{R_1C}=\arctan\frac{1}{2\omega_0 CR_1}\approx 19{,}4^0$ **[1п]**. Са фазорског дијаграма на слици 3б, који се односи на грану кола која садржи~~

~~отпорник и калем важи да је $U_{R_2}=R_2I_2$ **[1п]**, $U_L=2\omega_0 LI_2$ **[1п]**. Резултујући напон је напон извора па важи да је $U_0=\sqrt{U_{R_2}^2+U_L^2}=I_2\sqrt{R_2^2+(2\omega_0 L)^2}$, одакле се добија максимална струја у тој грани $I_2=U_0\Big/\sqrt{R_2^{\,2}+(2\omega_0 L)^2}$. Коначно максимална вредност напона на отпорнику износи $U_{R_2}=R_2U_0\Big/\sqrt{R_2^{\,2}+(2\omega_0 L)^2}\approx 5{,}77\,\mathrm{V}$ **[2п]** а фазни угао између напона извора и струје у грани износи $\phi_{R_2L}=\arctan\dfrac{2\omega_0 L}{R_2}\approx 54{,}7^0$ **[1п]**. За електрично коло трећи фазорски дијаграм је приказан на основу претходна два на слици 3г, одакле се може написати да тражени напон износи~~

~~$U_{AB}=\sqrt{U_{R_1}^2+U_{R_2}^2-2U_{R_1}U_{R_2}\cos\left(\phi_{R_2L}+\phi_{R_1C}\right)}\approx 9{,}62\,\mathrm{V}$ **[1+1п]**~~



~~Слика 3а Слика 3б Слика 3в Слика 3г~~

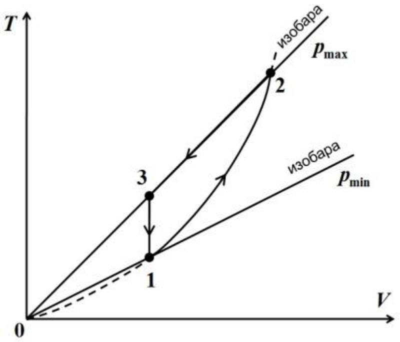
~~**II начин за б)**~~

~~У форми комплексних бројева, напон на отпорнику R_1 се може написати као $\bar U_{R_1}=R_1\bar I_{CR_1}$ **[1п]**, при чему је импеданса гране тог отпорника $\bar Z_{CR_1}=R_1-j\dfrac{1}{2\omega_0 C}$ **[3п]**. Јачина струје у тој грани је $\bar I_{CR_1}=\dfrac{U_0}{\bar Z_{CR_1}}=\dfrac{U_0}{\left|\bar Z_{CR_1}\right|^2}\bar Z_{CR_1}^*$, па на основу тих релација напон на отпорнику R_1 износи $\bar U_{R_1}=\dfrac{R_1U_0}{\sqrt{R_1^2+\left(\dfrac{1}{2\omega_0 C}\right)^2}}\left(R_1+j\dfrac{1}{2\omega_0 C}\right)=\dfrac{20}{9}\left(4+j\sqrt{2}\right)\mathrm{V}$ **[1п]**.~~

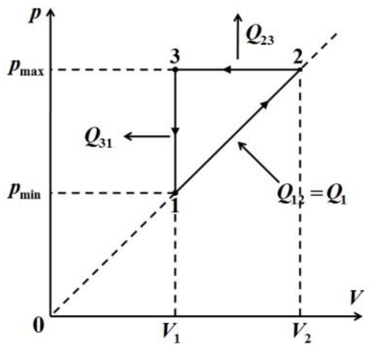
~~Напон на отпорнику R_2 у форми комплексних бројева је $\bar U_{R_2}=R_2\bar I_{LR_2}$ **[1п]**, док је импеданса гране којој припада дата рекацијом $\bar Z_{LR_2}=R_2+j2\omega_0 L$ **[3п]**. За струју у тој грани важи да је $\bar I_{LR_2}=\dfrac{U_0}{\bar Z_{LR_2}}=\dfrac{U_0}{\left|\bar Z_{LR_2}\right|^2}\bar Z_{LR_2}^*$, одакле следи да је напон на отпорнику R_2 облика $\bar U_{R_2}=\dfrac{R_2U_0}{\sqrt{R_2^2+(2\omega_0 L)^2}}\left(R_2-j2\omega_0 L\right)=\dfrac{1}{3}\left(10-j10\sqrt{2}\right)\mathrm{V}$ **[1п]**.~~

~~Тражени напон између тачака А и В износи $\bar U_{AB}=\bar U_{R_1}-\bar U_{R_2}=\dfrac{50}{9}\left(1+j\sqrt{2}\right)\mathrm{V}$ **[1п]**, односно модуо тог напона је $\left|\bar U_{AB}\right|\approx 9{,}62\,\mathrm{V}$ **[1п]**.~~

5. За процес $1\to 2$ (слика 4.а) важи једначина $T=\alpha V^2$ и ако искористимо једначину стања идеалног гаса $pV=nRT$ добијамо $pV=nR\alpha V^2$ тако да је $p=nR\alpha\cdot V$ па је на $p-V$ дијаграму зависност притиска од запремине права линија (слика 4.б). За процес $2\to 3$ је $T=\beta V$, где је β позитивна константа, и ако искористимо једначину стања идеалног гаса $pV=nRT$ добијамо $p=nR\beta=const$ што указује да је процес изобарски. Процес $3\to 1$ је изохорски. Из једначине стања идеалног гаса $T=\dfrac{p}{nR}\cdot V$ па је изобара $p=const$ на $T-V$ дијаграму представљена правом линијом $T=k\cdot V$, где је $k=\dfrac{p}{nR}=const$ (слика 4.а). На основу претходног разматрања и слике 4.а можемо да установимо да је $p_2=p_3=p_{max}$ и $p_1=p_{min}$. Дати циклус можемо да представимо на $p-V$ дијаграму (слика 4.б).



слика 4.а



слика 4.б

За процес $2 \to 3$ количина топлоте коју отпусти гас је $Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_3) + p_{max}(V_2 - V_1)$ **[2п]**. За процес $3 \to 1$ количина топлоте коју отпусти гас је $Q_{31} = \Delta U_{31} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1)$ **[2п]** тако да је укупна топлота коју гас отпусти $Q_2 = Q_{23} + Q_{31} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + p_{\max}(V_2 - V_1)$ **[1п]**. У процесу $1 \to 2$ гас прима количину топлоте $Q_{12} = Q_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \frac{(p_{\max} + p_{\min})(V_2 - V_1)}{2} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \frac{3p_{max}(V_2 - V_1)}{4}$ **[3п],** при чему је искоришћено $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = 2$.
Једначина за процес $1 \to 2$ је $\frac{p_{max}}{V_2} = \frac{p_{min}}{V_1}$ **[1п]**, за процес $2 \to 3$ је $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_3}$ **[1п]**, док је за процес $3 \to 1$ $\frac{p_{max}}{T_3} = \frac{p_{min}}{T_1}$ **[1п]**. Из претходних једначина добијамо $T_3 = 2T_1$ **[1п]**, $T_2 = 2T_3$ **[1п]** и $T_2 = 4T_1$ **[1п]**. Једначине за стања 2 и 3 су редом $p_{\max}V_2 = RT_2$ и $p_{\max}V_1 = RT_3$ па је $p_{max}(V_2 - V_1) = RT_2 - RT_3 = 2RT_1$ **[1п]** . Даље је $Q_1 = 6RT_1$ **[1п]** и $Q_2 = \frac{13}{2}RT_1$ **[1п]** тако да је $RT_1 = \frac{Q_1}{6}$ па је $Q_2 = \frac{13}{12}Q_1 = 130\,\mathrm{J}$ **[2+1п]**.