Честице и таласи (10 поена)

Wave–particle duality, which states that each particle can be described as a wave and vice versa, is one of the central concepts of quantum mechanics. In this problem, we will rely on this notion and just a few other basic assumptions to explore a selection of quantum phenomena covering the two distinct types of particles of the microworld—fermions and bosons.

Дуалност таласа и честица, која тврди да се свака честица може описати као талас и обрнуто, један је од централних концепата квантне механике. У овом проблему ослањаћемо се на овај појам и само неколико основних претпоставки да бисмо истражили квантне феномене који покривају две различите врсте честица микросвета - фермионе и бозоне.

Део А. Квантна честица у кутији-Quantum particle in a box (1.4 поена)

Размотримо честицу масе m која се креће у једнодимензионалној потенцијалној јами, где је њена потенцијална енергија $V(x)$ дата са

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \,\text{or}\, x > L. \end{cases} \tag{1}$$

Док се класична честица може кретати у таквом потенцијалу имајући било коју вредност кинетичке енергије, за квантну честицу дозвољени су само неки специфични позитивни дискретни нивои енергије. У било ком таквом дозвољеном стању, честица се може описати као стојећи де Брољев талас са чворовима на зидовима јаме.

A.1	Одредити минималну могућу енергију E_{min} квантне честице у јами. Изразите свој одговор преко m, L и Планковом константом h.	0.4pt

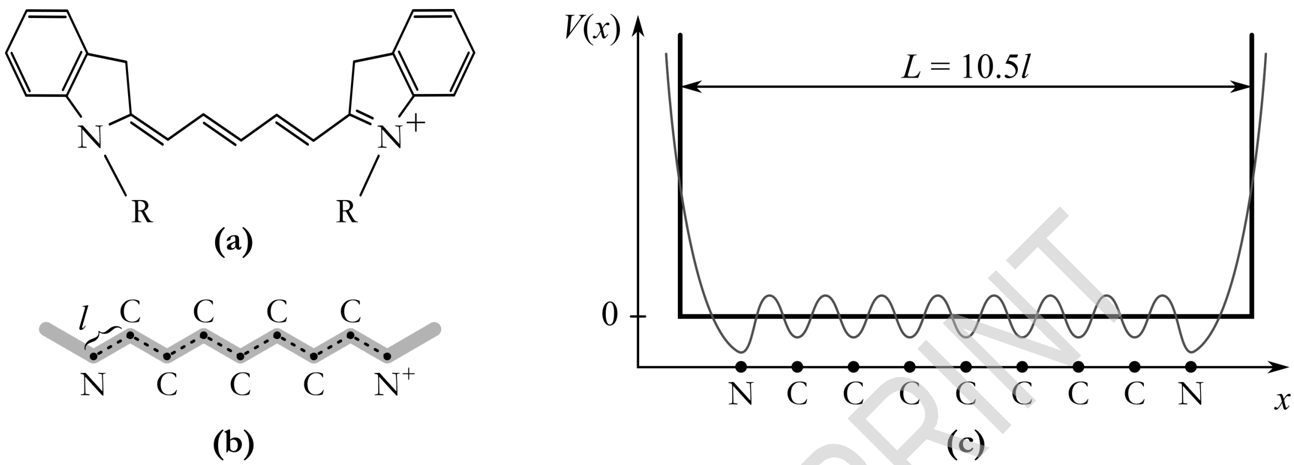
Стање честице са минималном могућом енергијом назива се основно стање, а сва остала дозвољена стања побуђеним стањима. Сортирајмо све могуће вредности енергије у растућем редоследу и означимо их са E_n, полазећи од E_1 за основно стање.

A.2	Пронађите општи израз за енергију E_n (овде је $n = 1,\ 2,\ 3, ...$).	0.6pt

A.3	Честица може тренутно да пређе из једног стања у друго само емитујући или апсорбујући фотон који одговара енергетској разлици. Пронађите таласну дужину фотона λ_{21} емитованог током преласка честице из првог побуђеног стања (E_2) у основно стање (E_1).	0.4pt

Део B. Оптичка својства молекула (2.1 поен)

У овом делу проучићемо неколико оптичких својстава молекула цијанина Cy5 - молекула боје који се широко користи, шематски приказан на Слици 1а. Његова оптичка својства су одређена углавном угљеничним окосницама, састављеним од наизменичних једноструких и двоструких веза између атома угљеника, приказаних на слици 1б, док је утицај прстенова на крајевима молекула као и радикала R много мањи. Три од четири валентна електрона сваког атома C (и N атома) у окосници чине хемијске везе, док се преостали валентни електрони „деле“ и могу се кретати дуж целе окоснице. Нето потенцијална енергија сваког таквог електрона приказана је осцилујућом танком линијом на Слици 1c, са минимумима који одговарају положају C и N атома.



Слика 1. (a) Хемијска структура молекула цијанина Cy5 (ради једноставности, атоми водоника нису приказани, а R означава неке радикале). (b) Окосница молекула Cy5, са средњим међуатомским растојањем l. (c) Потенцијална енергија електрона дуж окоснице (танка линија) и њена апроксимација степ функцијом датом једначином . 1 (дебела линија).

Ради једноставности, апроксимираћемо овај профил потенцијалне енергије једноставном функцијом датом једначином Eq. 1 са ширином $L = 10.5l$ (види дебелу линију на слици 1c), овде је $l = 140$ pm средња међуатомска удаљеност (види такође слику 1b). Као резултат, добијамо „електронски гас" који се састоји од 10 електрона (7 од атома C, 2 од N-атома и 1 од N^+јона), који се крећу у једнодимензионалној потенцијној јами, о чему је разматрано у делу A. У нашем израчунавањима, можемо занемарити међусобну интеракцију ових електрона; међутим, требало би да узмемо у обзир чињеницу да су електрони фермиони и да се покоравју Паулијевом принципу искључења. Такође занемарујемо утицај других електрона као и кретање језгара.

B.1	Процените највећу таласну дужину λ фотона коју молекул Cy5 може да апсорбује под претпоставком да је електронски систем у почетку у основном стању. Изразите свој одговор преко l, физичких константи и неким нумеричким предфактором и израчунајте нумеричку вредност таласне дужине.	0.8pt

B.2	Још један молекул боје Cy3 има сличну структуру, али његова окосница је краћа за 2 атома угљеника. Да ли је његов спектар апсорпције померен на плавом или ка црвеном делу спектра у поређењу са молекулом Cy5? Нумерички процените величину овог спектралног померања $\Delta\lambda$. Можете претпоставити да уклањање два атома угљеника не мења облик молекула и само чини дужину окоснице краћом за две међуатомске удаљености.	0.4pt

Када је у побуђеном стању, молекул може спонтано да пређе у основно стање при чему емитује фотон. Средња брзина, тј. интензитет K таквих догађаја (тј. релативно смањење молекула који се налазе у побуђеном стању, $\mathrm{d}N/N$, током времена $\mathrm{d}t$, $K = \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$) одређује се таласном дужином λ емитованог фотона, електричним диполним моментом d овог прелаза (који је реда $d \simeq el$, где је e елементарно наелектрисање) као и диелектричном пропистљивости вакуума ε_0 и Планковом константом h.

B.3	Димензионом анализом одредите израз за интензитет спонтане емисије у терминима ε_0, h, λ, и d. Нумерички предфактор за ваш израз је $k = \frac{16}{3}\pi^3$.	0.7pt

B.4	За молекул Cy5 , $d \approx 2.4\,el$. Израчунајте средње време трајања флуоресценције најнижег побуђеног стања молекула Cy5, τ_{Cy5} , које је једнако реципрочној вредности интензитета емисионог прелаза у основно стање.	0.2pt

Део C. Бозе-Ајмштајнова кондензација (1.5 поена)

Овај део није директно повезан са деловима A и B. Овде ћемо проучавати колективно понашање бозонских честица. Бозони се не подвргавану Паулијевом принципу искључења и - при ниским температурама или великим густинама - доживљавају драматичан феномен познат као Бозе-Ајнштајнова кондензација (BEC). Ово је фазни прелаз у интригантно колективно квантно стање: велики број идентичних честица се ‘кондензује’ у једно квантно стање и почиње да се понаша као један талас. Прелаз се обично постиже хлађењем фиксног броја честица испод критичне температуре. У принципу, такође се може индуковати одржавањем температуре фиксном и мењањем густине честица изнад критичне вредности.

Започињемо истраживањем везе између температуре и густине честица при прелазу. Како се испоставља, процене њихових критичних вредности могу се извести из једноставног запажања: *Бозе-Ајнштајнова кондензација се дешава када је де Брољева таласна дужина која одговара средњој квадратној брзини честица једнака карактеристичној удаљености између честица у гасу .*

C.1	Нека је дат неинтерагујући гас ^{87}Rb атома у топлотној равнотежи, напишите изразе за њихов типични импулс p и типичну де Брољеву λ_{dB} таласну дужину у функцији масе m, температуре T атома и физичких константи.	0.4pt

C.2	Израчунајте типично растојање између честица у гасу, ℓ, у зависности од густине броја честица n. Потом извести критичну температуру T_c у функцији масе атома, њихове густине и физичких константи.	0.5pt

Да би реализовали BEC у лабораторији, експерименталци морају да хладе гасове до температура од T_c= 100 nK.

C.3	Колика је густина броја честица n_c гаса Rb ако се прелаз одвија на таквој температури? Поређења ради, израчунајте и ’обичну’ густину броја честица n_0 идеалног гаса при стандардној температури и притиску (STP), тј. $T_0 = 300$ K и $p_0 = 10^5$ Pa. Колико пута је ‘обични’ гас гушћи? Можете претпоставити да је маса атома једнака 87 атомских јединица масе (m_{amu}).	0.6pt

Део D. Оптичке решетке са три зрака (5 поена)

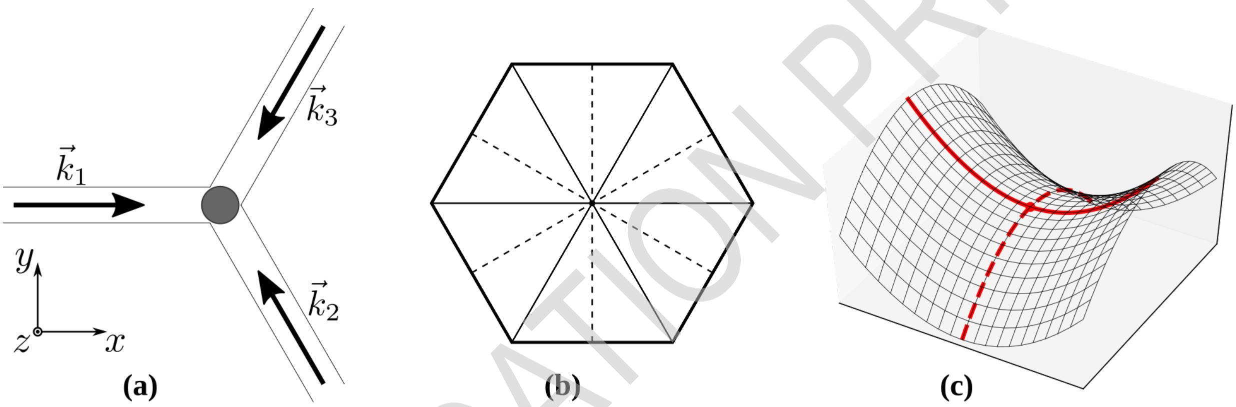
Први Бозе-Ајнштајнови кондензати произведени су давне 1995. године и од тада се експериментални рад разгранао у различитим правцима. У овом делу истраживаћете једну нарочито плодну идеју да се кондензат напуни у просторно периодичне потенцијале створене интерференцијом одређеног броја кохерентних ласерских зрака. Због периодичне природе резултујућих интерференционих шаблона, они се називају *оптичким решеткама*. Потенцијална енергија $V(\vec{r})$ атома који се креће у оптичкој решетки пропорционална је локалном интензитету светлости и у вашим прорачунима можете претпоставити да

$$V(\vec{r}) = -\alpha \langle |\vec{E}(\vec{r},t)|^2 \rangle. \tag{2}$$

Овде је α позитивна константа, а угласте заграде указују на временско усредњавање који елиминише брзо осцилирајуће чланове. Електрично поље које ствара i-ти ласер описано је

$$\vec{E}_i = E_{0,i}\, \vec{\varepsilon}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \tag{3}$$

са амплитудом $E_{0,i}$, таласним вектором $\vec{k}_i$, и јединичним вектором поларизације $\vec{\varepsilon}_i$.



Слика 2. (a) Оптичка решетка са три снопа ласерског зрака: три равна таласа са таласним векторима $\vec{k}_{1,2,3}$ се секу и интерферирију у подручју означеном сивим кругом. (b) Симетрије правилног шестоугла: пуне и испрекидане линије приказују два скупа оса симетрије. (c) Седласта тачка: тачка на површини у којој су коефицијенти правца у нормалним правцима једнаке нули, али која није локални екстрем уцртане функције. Путујући путањом означеном пуном линијом, наилази се на привидни минимум. Додатна анализа нормалног правца (испрекидана линија) потребна је да би се разликовао прави минимум од седласте тачке (приказано).

Ваш задатак је да проучавате *троугаоне оптичке решетке* које настају интерференцијом три кохерентна ласерска зрака једнаког интензитета. Типична поставка је приказана на слици 2a. Овде су сва три зрака поларизована у z правцу, простирајући се у xy равни и секу се под једнаким угловима од 120 °. Изаберите правац x осе паралелан таласном вектору $\vec{k}_1$.

D.1	Коришћењем једначина Eqs. 2 и 3 одредити израз за потенцијалну енергију $V(\vec{r})$ у функцији од $\vec{r} = (x, y)$ у равни снопова. Наговештај: резултат се може лепо изразити као константан члан плус збир три косинусне функције аргумената $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$. Запишите резултат у овој форми и идентификујте векторе $\vec{b}_i$.	1.4pt
D.2	Добијена потенцијална енергија има шестоструку осу ротационе симетрије, тј. расподела потенцијала је инваријантна у односу на ротацију целобројног умношка од 60 ° око центра. Наведите једноставан аргумент којим ћете доказати да је то заиста тако.	0.5pt

Горње посматрање симетрије поједностављује анализу дводимензионалне расподеле потенцијала $V(\vec{r})$. Као што је приказано на Слици 2b, правилни шестоугао има линије симетрије које, респективно, повезују супротна темена (пуне линије) и средње тачке супротних ивица (испрекидане линије). Према томе, у нашој ситуацији не треба цртати и проучавати дводимензионалне потенцијалне цртеже, јер се много увида може добити фокусирањем на координатне осе x и y које иду дуж линија симетрије.

D.3	Извести понашање потенцијала $V(\vec{r})$ дуж координатних оса, тј. одредити функције $V_X(x) \equiv V(x,0)$ и $V_Y(y) \equiv V(0,y)$. Утврдите локације екстрема $V_X(x)$ и $V_Y(y)$ као функције једног аргумента. Како су ове функције периодичне, уврстите на своје листе само по једног представника из сваке породице периодично поновљених минимума и максимума.	1.2pt

Занима нас одређивање локација такозваних решеткастих места, тј. минимума пуног дводимензионалног потенцијала $V(\vec{r})$. Добијени минимуми функција са једним аргументом V_X и V_Y идентификују могуће положаје, али још увек морају да се провере како би се елиминисале седласте тачке. Као што је приказано на Слици 2c, када се проучавају дуж једне линије, седласте тачке могу се маскирати у минимуме, али нису.

D.4	Прегледајте своје резултате у претходном питању да бисте утврдили стварне минимуме оптичке решетке: Идентификујте све еквивалентне минимуме који су најближи (али се не поклапају са) координатним почетком. Колика је удаљеност a између најближих минимума, другим речима - *константе решетке* наше оптичке решетке? Одговор преко таласне дужине ласера λ_{las}.	0.8pt

Електронеутралност ултрахладних атома сугерише да њихове интеракције постају релевантне само када два или више атома заузимају исто место оптичке решетке. Међутим, експерименталисти су такође у могућности да истраже поставке које одржавају атомске интеракције великог домета. Могући приступ се ослања на стварање такозваних Ридбергових атома који су физички велики и имају друга преувеличана својства. Ридбергови атоми су побуђени атоми са једним електроном у стању са врло високим главним квантним бројем. Величина Ридберговог атома може се проценити израчунавањем радијуса класичне кружне орбите тог електрона са орбиталним моментом импулса $n\hbar$, где је $\hbar$ редукована Планкова константа.

D.5	Израчунајте вредност n која одговара радијусу Rb Ридберговог атома упоредивом са таласном дужином ласерске светлости λ_{las}= 380 nm. Дајте свој одговор преко λ_{las} и физичких константи и пронађите његову нумеричку вредност.	1.1pt