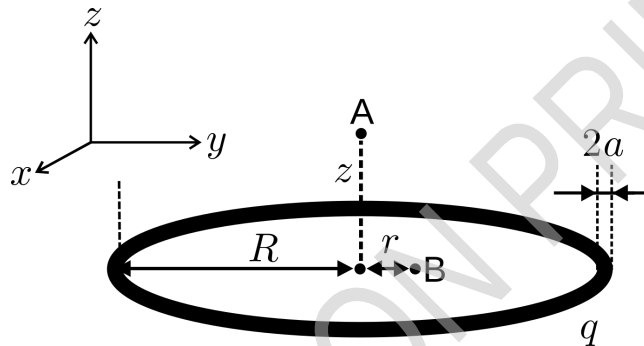


## Електростатичка сочива (10 поена)

Размотримо униформно наелектрисани метални прстен полупречника  $R$  и укупног наелектрисања  $q$ . Прстен је шупљи торус дебљине  $2a \ll R$ . Ова дебљина се може занемарити у деловима А, В, С, и Е. Раван  $xy$  се поклапа са равни прстена, док је  $z$ -оса нормална на њу, као што је приказано на Слици 1. У деловима А и В можда ћете морати да користите формулу (Тејлоров развој)

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)x^2, \text{ when } |x| \ll 1.$$



Слика 1. Наелектрисани прстен полупречника  $R$ .

### Део А. Електростатички потенцијал на оси прстена (1 поен)

- |            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>A.1</b> | Израчунајте електростатички потенцијал $\Phi(z)$ дуж осе прстена на удаљености $z$ од његовог центра (тачка А на Слици 1).  | 0.3pt |
| <b>A.2</b> | Израчунајте електростатички потенцијал $\Phi(z)$ до најмањег не-нултог степена од $z$ , под претпоставком да је $z \ll R$ .   | 0.4pt |
| <b>A.3</b> | Електрон (маса $m$ и наелектрисања $-e$ ) је постављен у тачку А (Слика 1, $z \ll R$ ). Колика је сила која делује на електрон? На основу израза силе, одредите знак наелектрисања $q$ тако да резултујуће кретање одговара осцилацијама. Кретање електрона не утиче на расподелу наелектрисања на прстену. | 0.2pt |
| <b>A.4</b> | Која је угаона фреквенција $\omega$ таквих хармонијских осцилација?   | 0.1pt |

### Део В. Електростатички потенцијал у равни прстена (1.7 поена)

У овом делу задатка мораћете да анализирате потенцијал  $\Phi(r)$  у равни прстена ( $z = 0$ ) за  $r \ll R$  (тачка В на Слици 1). Електростатички потенцијал до најмањег ненултoг степена по  $r$  је приближно дат као  $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$ .

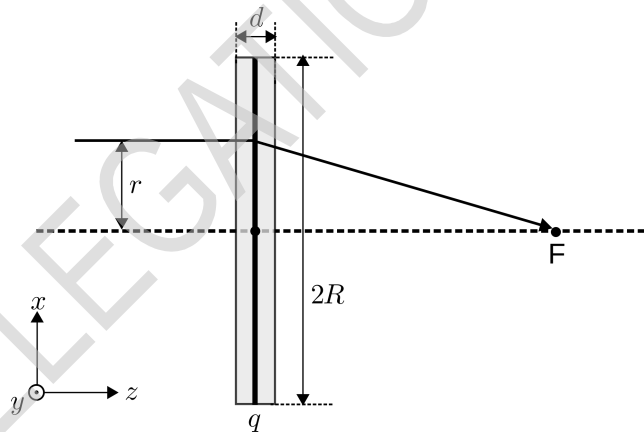
- |            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>B.1</b> | Наћи израз за $\beta$ . Можда ће вам требати горња формула Тејлоровог развоја. | 1.5pt |
|------------|--|-------|



- B.2** Електрон је постављен у тачку В (Слика 1,  $r \ll R$ ). Колика је сила која делује на електрон? На основу израза за силу, одредите знак наелектрисања  $q$  тако да резултујуће кретање одговара хармоничним осцилацијама. Кретање електрона не утиче на расподелу наелектрисања на прстену. 0.2pt

### Део С. Жижна даљина идеалног електростатичког сочива: тренутно наелектрисавање (2.3 поена)

Желимо направити уређај за фокусирање електрона - електростатичко сочиво. Размотримо следећу конструкцију. Прстен се налази нормално на  $z$ -осу, као што је приказано на Слици 2. Имамо извор који производи пакете нерелативистичких електрона. Кинетичка енергија ових електрона је  $E = mv^2/2$  ( $v$  је брзина) и они напуштају извор у тачно контролисаним тренуцима времена. Систем је програмиран тако да је прстен већину времена електро-неутралан, али његово наелектрисање постаје  $q$  када су електрони ближи од удаљености  $d/2$  ( $d \ll R$ ) од равни прстена (осенчени регион на Слици 2, назван „активни регион“). У делу С се претпоставља да су процеси наелектрисавања и разелектрисавања тренутни, а електрично поље истог тренутка „испуњава простор“. Може се занемарити магнетно поље и претпоставити да је брзина електрона у  $z$ -смеру константна. Кретање електрона не утиче на расподелу наелектрисања на прстену.



Слика 2. Модел електростатичког сочива.

- C.1** Одредите жижну даљину  $f$  овог сочива. Претпоставити да је  $f \gg d$ . Изразите свој одговор преко константе  $\beta$  из питања В.1 и другим познатим величинама. Претпоставимо да је пре достизања „активног региона“ електронски пакет паралелан са  $z$ -осом и  $r \ll R$ . Знак је такав да сочиво фокусира, тј. да је сабирно. 1.3pt

У стварности се извор електрона налази на  $z$ -оси на удаљености  $b > f$  од средишта прстена. Размотрите случај да електрони више нису паралелни са  $z$ -осом пре него што дођу у „активни регион“, већ се емитују из тачкастог извора у опсегу различитих углова  $\gamma \ll 1$  rad у односу на  $z$ -осу. Електрони су фокусирани у тачку која се налази на удаљености  $c$  од средишта прстена.

- C.2** Наћи  $c$ . Изразити решење преко константе  $\beta$  из питања В.1 и других познатих константи. 0.8pt



**C.3** Да ли је једначина танког оптичког сочива

0.2pt

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$$

испуњена за електростатичко сочиво? Покажите експлицитно израчунавајући  $1/b + 1/c$ .

### Део D. Прстен као кондензатор (3 поена)

Горе разматрани модел је идеализован и претпоставили смо да се прстен тренутно наелектрисао. У стварности наелектрисавање, тј, пуњење није тренутно, јер је прстен кондензатор коначног капацитета  $C$ . У овом делу ћемо анализирати својства овог кондензатора. Можда ће вам требати следећи интеграл:

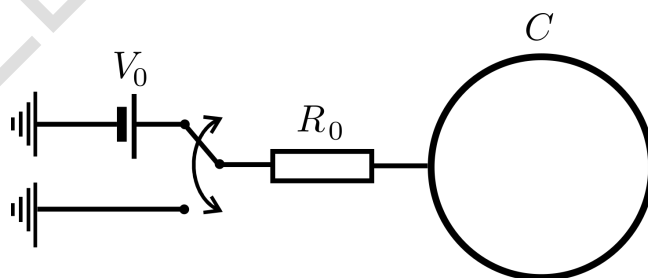
$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

**D.1** Израчунајте капацитет прстена  $C$ . Узмите у обзир да прстен има коначну ширину  $2a$ , али сетите се да је  $a \ll R$ . 2.0pt

Када електрони дођу до „активног региона“, прстен се повезује са извором напона  $V_0$  (Слика 3). Када електрони прођу кроз „активни регион“, прстен се повезује са земљом. Отпор контаката је  $R_0$  и отпор самог прстена се може занемарити.



Слика 3. Наелектрисавање-пуњење електростатичког сочива.

**D.2** Утврдити зависност наелектрисања прстена у зависности од времена  $q(t)$  и скицирати шематски приказ ове зависности.  $t = 0$  одговара тренутку када су електрони у равни прстена. Колико је наелектрисање прстена  $q_0$  када је апсолутна вредност  $q(t)$  максимална? Капацитет прстена је  $C$  (тј. не морате да користите стварни израз одређен у D.1). Напомена: нацртани поларитет на Слици 3 је само индикативне намене. Знак треба одабрати тако да сочиво фокусира, тј да је сабирно. 1.0pt

**Део Е. Жижна даљина реалистичнијег сочива: тренутно пуњење (2 поена)**

Део Е. Жижна даљина реалистичнијег сочива: пуњење није тренутно (2 поена)

**E.1** Пронађите жижну даљину  $f$  сочива. Претпоставимо да је  $f/v \gg R_0C$ , али  $d/v$  и  $R_0C$  су истог реда величине. Изразите резултат преко константе  $\beta$  из дела В и другим познатим величинама. 1.7pt

**E.2** Видећете да је резултат за  $f$  сличан ономе добијеном у делу С, при чему је вредност  $q$  замењена са  $q_{\text{eff}}$ . Нађи израз за  $q_{\text{eff}}$  преко величина датих у формулацији задатка. 0.3pt

DELEGATION PRINT