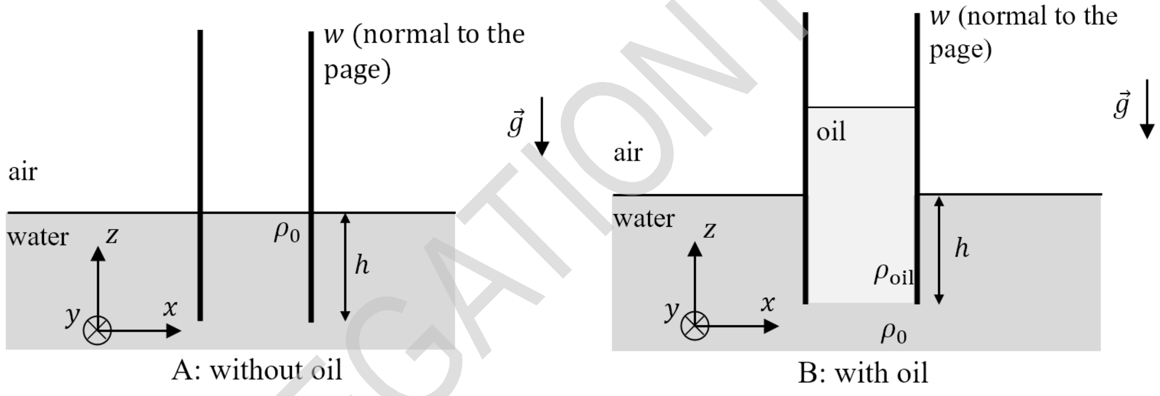
Планетарна физика (10 поена)

Овај проблем се састоји од два независна проблема повезана са унутрашњошћу планете Земље. Ефекти закривљености површине планете се могу занемарити. Можда ћете морати да користите формулу

$$(1+x)^{\varepsilon} \approx 1+\varepsilon x, \text{ when } |x| \ll 1. \tag{1}$$

Део А. Океански гребен (5.0 поена)

Размотримо велику посуду са водом која се налази у униформном гравитационом пољу са убрзањем Земљине теже g. Две вертикалне правоугаоне паралелне плоче уграђене су у посуду тако да су вертикалне ивице плоча у чврстом контакту са вертикалним зидовима посуде и нема зазора. Дужина h сваке плоче је урођена у воду (Слика 1). Ширина плоча дуж y-осе и је w, густина воде је ρ_0.



Слика 1. Паралелне плоче у води.

Уље густине ρ_{oil} ($\rho_{oil} < \rho_0$) сипа се у простор између плоча све док доњи ниво уља не достигне доње ивице плоча. Претпоставимо да су плоче и ивице посуде довољно високе да их уље не би прелило. Површински напон и мешање течности могу се занемарити.

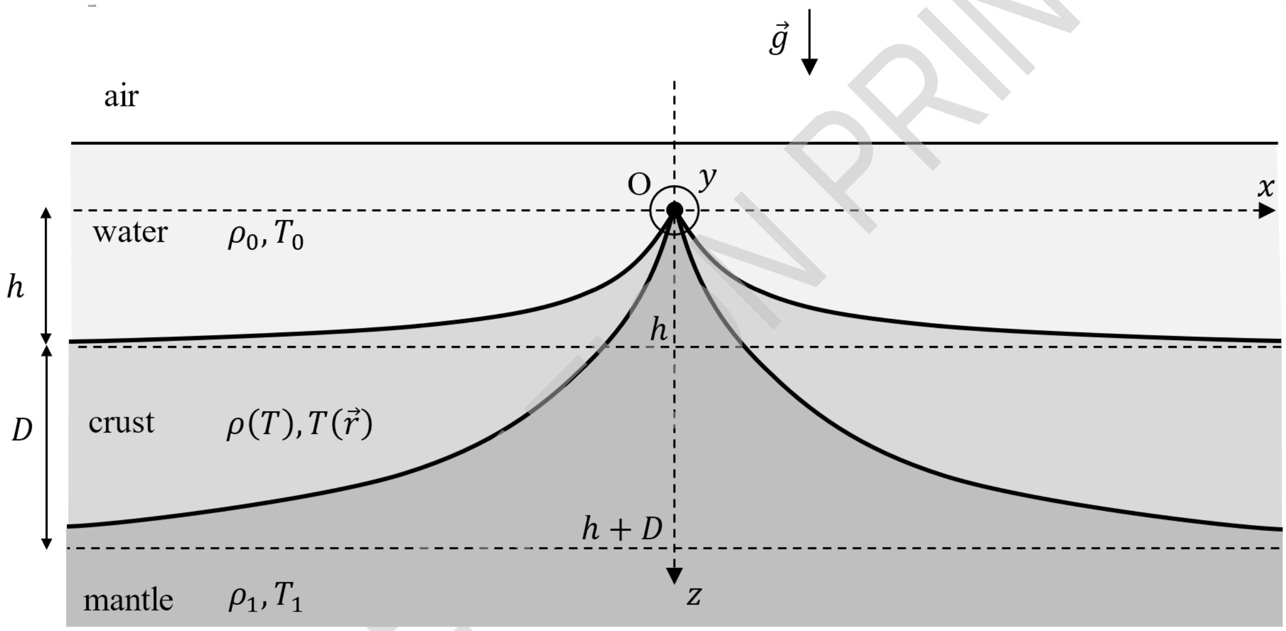
A.1	Одредити x -компоненту укупне силе F_x која делује на десну плочу (интензитет и правац).	0.8pt

Слика 2 приказује попречни пресек гребена океана. Састоји се од слојева омотача језгра - mantle , коре - crust и океанске воде - water. Омотач је састављен од стена за које претпостављамо да могу да теку, тј. крећу се у геолошким временским размерама и због тога ће се овај проблем третирати као флуид. Дебљина коре је много мања од карактеристичних дужина у правцу x-осе, па се кора понаша као плоча која се може савијати. Да би се постигла велика тачност, такав гребен се може моделовати као дводимензионални систем, без икаквих варијација променљивих дуж y-осе, која је нормална на раван Слике 2. Претпоставимо да је дужина гребена L дуж y -осе много већа од било које друге дужине уведене у овом проблему.

У средишту гребена претпоставља се да је дебљина коре нула. Како се хоризонтално растојање x од центра повећава, кора постаје све дебља и приближава се константној дебљини D како $x \to \infty$. Сходно томе, дно океана се спушта вертикално, за висину h испод врха гребена O, који дефинишемо као центар нашег координатног система (види Слику 2). Може се претпоставити да су густина ρ_0

и температура T_0 воде константни у простору и времену. Исто се може претпоставити за густину омотача језгра ρ_1 и његову температуру T_1. Температура коре T такође је стална у времену, али може зависити од положаја.

Познато је да се са великом тачношћу материјал коре линеарно шири са температуром T. С обзиром да се претпоставља да су температуре воде и омотача језгра константне, погодно је користити скалирану верзију коефицијента топлотног ширења. Тако је $l(T) = l_1\left[1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)\right]$, где је l дужина дела материјала коре, l_1 његова дужина на температури T_1 и k_l је скалирани коефицијент термичког ширења, за који се може претпоставити да је константан.



Слика 2. Океански гребен. Запазити да је z-оса усмерена надоле.

A.2 Под претпоставком да је кора изотропна, утврдите како њена густина ρ зависи од температуре T. Под претпоставком да је $|k_l| \ll 1$, запишите свој одговор у приближном облику **0.6pt**

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right], \qquad (2)$$

где се занемарују чланови реда k_l^2 и већег. Затим, идентификујте константу k.

Познато је да је $k > 0$. Такође, може се претпоставити да је топлотна проводљивост коре κ константна.

A.3 Претпостављајући да се омотач језгра и вода понашају као нестишљиви флуид у хидростатској равнотежи, изразите дебљину коре на великим даљинама D преко величина h, ρ_0, ρ_1, и k. Свако кретање материјала може се занемарити. **1.1pt**

A.4	Нађите, до највећег члана по k, укупну хоризонталну силу F која делује на десну половину ($x > 0$) коре преко величина ρ_0, ρ_1, h, L, k и g.	1.6pt

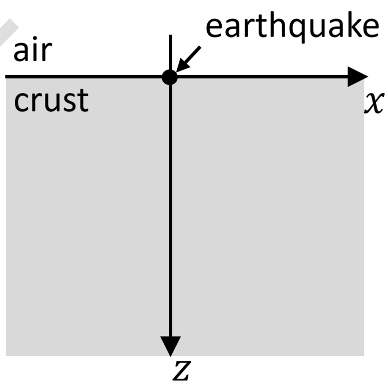
Претпоставимо да је кора топлотно изолована од остатка Земље. Као резултат проводљивости топлоте, температуре горње и доње површине коре ће се приближавати једна другој док кора не достигне топлотну равнотежу. Специфична топлота коре је c и може се претпоставити да је константна.

A.5	Коришћењем димензионалне анализе или анализе реда величине, процените карактеристично време τ у коме ће се разлика између температуре горње и доње површине површине коре далеко од осе гребена приближити нули. Можете претпоставити да τ не зависи од две почетне површинске температуре коре.	0.9pt

Део B. Сеизмички таласи у слојевитом медијуму (5.0 пена)

Претпоставимо да се на површини неке планете догоди кратак земљотрес. Може се претпоставити да сеизмички таласи потичу из линијског извора смештеног у $z = x = 0$, где је x хоризонтална координата а z дубина испод површине (Слика 3). Може се претпоставити да је извор сеизмичког таласа много дужи од било које друге дужине која се разматра у овом питању.

Као резултат земљотреса, равномерни флукс такозваних лонгитудиналних P таласа емитује се дуж свих праваца у x-z равни који имају позитивну компоненту дуж z- осе. Будући да је теорија таласа у чврстом телу углавном сложена, у овом проблему занемарујемо све остале таласе које емитује земљотрес. Кора планете је слојевита, тако да брзина P-таласа v зависи од дубине z релацијом $v = v_0(1 + z/z_0)$, где је v_0 брзина на површини и z_0 позната позитивна константа.



Слика 3. Координатни систем коришћен у делу B.

B.1	Узмимо у обзир један зрак који емитује земљотрес са почетним углом $0 < \theta_0 < \pi/2$ у односу на z-осу и путује у x-zравни. Која је хоризинтална координата $x_1(\theta_0) \neq 0$ на којој се овај зрак може детектовати на површини планете? Познато је да је путања зрака лук кружнице. Одговор напишите у форми $x_1(\theta_0) = A\cot(b\theta_0)$, где су A и b константе које траба наћи.	1.5pt

Ако нисте успели да пронађете A и b, у следећим питањима можете користити резултат $x_1(\theta_0) =$

$A\,\cot(b\theta_0)$, као што је дато. Претпоставимо да је E укупна енергија по јединици дужине извора ослобођена у виду P таласа у кору током земљотреса. Претпоставимо да се таласи потпуно апсорбују када дођу на површину планете са доње стране.

B.2	Пронађите како густина енергије по јединици површине $\varepsilon(x)$ коју апсорбује површина зависи од удаљености x дуж површине. Скицирајте график $\varepsilon(x)$.	1.5pt

Од сада, претпоставимо да се таласи у потпуности рефлектују када дођу до површине. Замислите да је уређај постављен у тачки $z = x = 0$ тако да има исту геометрију као и претходно посматрани извор земљотреса. Уређај је у стању да емитује P таласе у произвољној угаоној расподели. Направимо да уређај емитује сигнал уског опсега углова емисије. Конкретно, почетни угао који сигнал гради са вертикалом припада интервалу $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, где је $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ и $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.

B.3	На којој је удаљености x_{max} дуж површине од извора најудаљенија тачка у коју сигнал не досеже? Одговор напишите у зависности од θ_0, $\delta\theta_0$ и осталим горе наведеним константама.	2.0pt