УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

мр Момир Арсенијевић

Динамика квантних подсистема и корелација у дводелним канонским структурама

Докторска дисертација

Крагујевац, 2016.

I Аутор	
Име и презиме:	Момир Арсенијевић
Датум и место рођења:	24. 4. 1980, Кавадарци
Садашње запослење:	Асистент на ПМФ-у у Крагујевцу, група физика
II Докторска дисертација	
Наслов:	Динамика квантних подсистема и корелација у дводелним канонским структурама
Број страница:	149
Број слика:	3
Број библиографских података:	94
Установа и место где је рад израђен:	ПМФ, Крагујевац
Научна област (УДК):	Квантна физика, 530.145
Ментор:	др Мирољуб Дугић, ПМФ, Крагујевац
III Оцена и одбрана	
Датум пријаве теме:	25. 2. 2015.
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:	

Комисија за оцену подобности теме и кандидата:
- др Таско Грозданов, научни саветник Института за физику у Београду,
ужа научна област: Атомска, молекулска и оптичка физика — председник комисије
- др Иван Живић, редовни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу,
ужа научна област: Физика кондезоване материје
- др Мирољуб Дугић, редовни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу,
ужа научна област: Квантна физика.

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:
- др Таско Грозданов, научни саветник Института за физику у Београду,
ужа научна област: Атомска, молекулска и оптичка физика – председник комисије
- др Иван Живић, редовни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу,
ужа научна област: Физика кондезоване материје
- др Владимир Ристић, редовни професор ПМФ-а Универзитета у Крагујевцу,
ужа научна област: Атомска, молекулска и оптичка физика.

Датум одбране дисертације:	

Слике

Скраћенице

- AD – amplitude damping.
- БЧ – Браунова честица.
- *ER* – *entanglement relativity* (релативност квантне сплетености).
- ЛКТ – линеарне канонске трансформације.
- *QCR* – *quantum correlation relativity* (релативност квантних корелација).
- СЛВ – схема локалног времена.
- УДМ – универзална динамичка мапа.
- ШКФ – Шмитова канонска форма.
- ■ – означава крај доказа.

Садржај

Предговор

Овај рад припада области теорије отворених квантних система, са акцентом на структури квантних система, структури која може бити варирана применом линеарних канонских трансформација.

На основи појмова и метода који ће бити уведени и дефинисани у уводној глави, *задаци* ове дисертације су изучавање *последица преструктурирања* сложеног квантног система по:

А. посебну врсту квантних корелација које носе назив "квантни дискорд",

Б. заснивање пројекционог метода Накаџиме-Цванцига (*Nakajima, Zwanzig*),

Ц. издвајање префериране, класично-сличне структуре дводелног квантног система,

Д. увођење новог појма, тзв. локалног времена у заснивању квантне теорије, као и

Е. особине квантне динамике коју успоставља схема локалног времена поменута у претходној тачки.

Дисертација се састоји од једанаест поглавља и једног додатка, при чему уводна глава, поред појмова и дефиниција, даје мотивацију за истраживања квантних структура, тзв. "студије квантних структура". Друга, трећа, четврта и пета глава су општег карактера, док преостале главе представљају истраживачке резултате у складу са горе истакнутим задацима. Једанаесто поглавље даје преглед резултата, дискусију отворених задатака и закључак. Додатак садржи листу објављених радова из којих је проистекла ова дисертација.

Друга глава уводи појам квантних корелација у сложеним система, односно системима са унапред задатом дводелном структуром. Од интереса су и чиста стања, дводелних структура, која су носиоци тзв. квантне сплетености (*quantum entanglement*) и мешана стања која могу садржати и другу врсту корелација, тзв. квантни дискорд (*quantum discord*). Реч је о корелацијама које не обухватају квантну сплетеност и таква стања се називају сепарабилним стањима. Квантни дискорд је неканонска[1] мера квантних корелација

---

[1] Као што је познато, придев "канонска" означава нешто што је јединствено и најпростије.

садржаних у сепарабилном дводелном стању. У овој глави је, а у вези са чистим стањима, уведена Шмитова (*Schmidt*) канонска форма чиме је наглашен кинематички аспект квантне сплетености.

У трећој глави дате су основе теорије отворених квантних система, посебно они елементи који су од интереса за само излагање резултата истраживања која чине дисертацију. Тамо је истакнут прилаз динамици отвореног квантног система, преко формализма мастер једначина при чему мастер једначина се тиче степени слободе система у (пре)дефинисаној структури "систем+окружење". Поред диференцијалног записа једначине кретања подсистема $\mathcal{S}$, тј. мастер једначине, дискутован је интегрални вид закона кретања отвореног квантног система, тзв. Краусова (*Kraus*) декомпозиција (форма), на коју се гледа као на формално решење одговарајуће мастер једначине. У оквиру ове главе, изложен је главни метод извођења опште мастер једначине, тзв. метод Накаџиме-Цванцига. Посебно је истакнуто да ће у овом Раду од интереса бити физички модели сложених система где је интеракција система и окружења слаба (чему је посвећен посебан одељак), што води Марковљевим (*Markov*) мастер једначинама. У овој глави приказани су неки елементи теорије декохеренције, која је природан део теорије отворених квантних система. Теорија декохеренције једна је од водећих квантно-механичких теорија која има за задатак објашњење и опис појаве класичног света под претпоставком квантне природе микросвета од кога је класични (макроскопски) свет "изграђен". Последња реч је под знацима навода, јер нас квантна механика учи да целина не мора бити прост збир својих делова, а "кривица" због тога пада на горе поменуте квантне корелације. Као водиља ка (класично) реалној структури појављује се сепарабилност хамилтонијана (*Hamilton*) интеракције подсистема, а што потиче од питања о универзалности процеса декохеренције.

Четврта глава даје преглед неких резултата студија квантних структура. Кратко су представљени резултати "паралелног одвијања декохеренције" а потом и једног метода за избегавање квантне декохеренције у квантном хардверу. Посебно је наглашен појам релативности квантне сплетености (*entanglement relativity – ER*) за чиста стања у дводелним квантним структурама.

Пета глава уводи појам "локалног времена". Укратко су представљени појмови и резултати из функционалне анализе (Енсов (*Volker Enss*) теорем) а који се тичу квантне теорије (многочестичних) расејања и проблема *асимптотске комплетности* у вези са тим. Китада (*Hitoshi Kitada*) је интерпретирао Енсов теорем: унитарни оператор временске еволуције је генерисан хамилтонијаном, али физичка природа броја t, којег називамо временом у Њутновом (*Newton*) смислу, не мора бити *a priori* дефинисана. Овакав отклон од стандардне предрасуде о универзалном, апсолутном, времену одмах води идеји: време није фундаментални појам већ последица динамике коју генерише хамилтонијан. Схема локалног времена ће посебно бити од интереса за квантну теорију отворених система.

Шеста глава уводи и дискутује појам релативности квантних корелација (*quantum correlation relativity – QCR*), као уопштење појма *ER* из претходне, четврте главе. Само уопштење исказано је кроз квантни дискорд као тип корелација које обухватају и квантну сплетеност, из чега следи да с*QCR* се, у општем случају, тиче мешаних стања. Резултати ове главе проистекли су из рада [1] са Листе радова.

Резултати седме главе, на неки начин, последица су правила успостављеног у Глави 6. Метод Накаџиме-Цванцига је опште коришћени (пројекциони) метод којим се долази до одговарајуће мастер једначине за отворени квантни систем. Показује се да *QCR* уводи ограничење на примењивост метода. Наиме, да ли додавање једног конституента отвореном макроскопском систему чија је квантна мастер једначина позната, битно мења динамику подсистема? Класична интуиција би рекла да је у питању занемарљива промена, али испоставља се да *QCR* одбацује такву могућност. Будући да је додавање честице систему тривијална ЛКТ, од интереса је испитати какве су последице ЛКТ уопште на примењивост пројекционог метода. Другачије речено: да ли је познавање једначине за квантни отворени подсистем полазне структуре од користи за мастер једначине за отворени подсистем алтернативне структуре? Како ће се испоставити, одговор је негативан: извођење мастер једначине за "нови" подсистем је независан задатак и мора се кренути од почетка, тј. од записа хамилтонијана сложеног система у редефинисаној структури. Резултати ове главе проистекли су из рада [2] са Листе радова.

У осмој глави се разматра пар неинтерагујућих модова (два линеарна хармонијска осцилатора) који интерагују са засебним окружењима. Од интереса је временска промена стандардних одступања оригиналних и алтернативних ("колективних") степени слободе за разматрани модел. Стандардна одступања рачуната су у Хајзенберговој (*Heisenberg*) слици, у интегралном облику динамике познатом као Краусова декомпозиција комплетно-позитивне динамичке мапе. Чињеница да су модови (осцилатори) декупловани поједностављује рачун у смислу ограничења истакнутих у Глави 7, па је отуда познавање мастер једначине за оригиналне степене слободе довољно. Стандардна одступања за алтернативне степене слободе (тј., алтернативну структуру) носе нетривијалну временску зависност. Међутим, у асимптотском лимесу (бесконачно време), које је формални лимес теорије отворених система, а који је примењив на различите временске скале и процесе (декохеренција, релаксација, термализација), добија се да оригинални степени слободе осцилатора задовољавају услов минималне неодређености. Тај резултат еквивалентан је закључку да је, у терминима оригиналне структуре, стање система производ "кохерентних стања" подсистема чија гаусијанска природа даје тражену класичност структуре – "кохерентна стања" су у теорији отворених система и декохеренције позната као најкласичнија стања у Хилбертовом простору "континуалних" система. Овиме је показано да за отворене системе могу постојати "привилеговане" структуре и да су оне последица утицаја окружења, са једне стране, као и нови увид, да "класичност" (баш као и корелације) није особина (отвореног) квантног система, већ његове структуре, са друге стране. Резултати ове главе проистекли су из рада [3] са Листе радова.

У деветој глави представљена је разрада појма локалног времена у, такозваној, схеми локалног времена (СЛВ) представљеној у Глави 5 дисертације. Разрада се састоји у уочавању да дефиниција локалног времена није једнозначна за коначни динамички ланац (у стандардној теорији би се рекло: за коначно време) те свако локално време носи извесну неједнозначност – неодређеност за сваки појединачни локални (затворени) систем. На статистичком (Гибсовом (*Gibbs*)) ансамблу таквих система изучена је динамика и утврђено да се ансамбл описује мешаним стањем чак и за затворени квантни систем. У тој слици локално време постаје класични скривени параметар чије мерење забрањује познати "*no cloning*" теорем квантне информатичке теорије. За системе са малим бројем подсистема СЛВ се практично (не и фундаментално) не може разликовати од стандардне теорије једног, универзалног времена. Међутим, за многочестичне системе ствари стоје сасвим другачије. За погодне дводелне структуре многочестичног система испоставља се да мањи подсистем има једнозначно дефинисан, тзв., базис бројача – што је решење у супротности са стандардном теоријом једног времена у којој се јавља проблем неједнозначности базиса бројача, што је један од аспеката проблема мерења као и преласка са квантног на класично; стандардна теорија то разрешава напуштањем Шредингеровог закона, или увођењем окружења (то јест, трећег подсистема), или интерпретацијски. Добијени резултат за дводелну структуру следи из минималистичког, математички заснованог, неинтерпретацијског разматрања. Рад даје одговор на темељно питање студија квантних структура, тј., на питање "шта је то квантни (под)систем?" Када је у питању затворени систем, одговор је: "систем" је онај скуп степени слободе којем се може придружити локално време. Када је у питању подсистем затвореног система, одговор је: подсистем је сваки скуп степени слободе којем се може придружити једнозначни базис бројача. Резултати ове главе проистекли су из рада [4] са Листе радова.

У десетој глави изучене су формално-математичке последице динамике коју успоставља схема локалног времена. Наиме, посматрана формално, као динамичка мапа, динамика утврђена у претходном поглављу захтева засебну анализу. Та анализа води читавом низу нетривијалних уочавања од врло широког интереса (укључујући и општу теорију отворених система, квантну космологију и слично), и овде ће бити представљени само темељни резултати. Имајући у виду значај и корисност, тзв., Марковљеве динамике у физици отворених система, изучавано је да ли, и када, то јест, под којим условима, динамика коју успоставља СЛВ може бити Марковљева. Динамичка мапа коју успоставља СЛВ је од, колико је познато, до сада непознате врсте. Са једне стране, она је недиференцијабилна. Са друге стране, она је комплетно позитивна, али није декомпозабилна, па отуда није Марковљева, јер декомпозабилност потребан услов за Марковљевост мапе. Са треће стране, мапа је линеарна, позитивна, чува траг оператора стања, па је чак и унитална[2]. Међутим не-информатичка апроксимација хамилтонијана система води приближној динамичкој мапи која динамички постаје Марковљева – до сада непознат резултат, осим у тривијалном смислу теорије отворених система. За подсистем неке дводелне структуре мапа је Марковљева, али опет само динамички – то јест, мапа није Марковљева за произвољно кратак интервал локалног времена. Ове, по први пут уочене особине једне динамичке мапе, нужно воде нетривијалним резултатима који се овде не могу исцрпно представити. Резултати ове главе проистекли су из рада [5] са Листе радова.

Једанаеста глава је дискусија и преглед резултата дисертације и отворених задатака који се на основи тога јављају.

На овом месту бих желео да изразим захвалност свом ментору, проф. др Мирољубу Дугићу на несебичној помоћи и подршци током израде дисертације. Захваљујем се и члановима комисије проф. др Таску Грозданову, проф. др Ивану Живићу и проф. др Владимиру Ристићу чије су сугестије и примедбе знатно поправиле и изглед и садржај текста.

На крају, захваљујем својој породици, која је била уз мене све време.

У Крагујевцу, 2016. године Аутор

---

[2] Мапа $\mathcal{E}$ је унитална ако важи $\mathcal{E}(\hat{I}) = \hat{I}$, где је $\hat{I}$ идентични оператор.

I Општа разматрања

1

Увод у квантне структуре физичких система

Појам физичког система спада у основне појмове физике. Физички систем је дефинисан параметрима (у нерелативистичкој физици то су, на пример, маса, наелектрисање, температура) и одговарајућим степенима слободе[1] довољним за описивање динамике система. Зависно од моделовања, физички систем може бити прост или сложен, тј. без, или са структуром, редом. Добар пример за физички систем чија структура "зависи" од моделовања је пример атома. У класичној статистичкој термодинамици, атом се може узети да је без структуре, када је у питању дефинисање температуре гаса, на пример – од интереса је центар масе сваког атома, а не унутрашњи степени слободе. У атомској физици је, управо супротно од претходно реченог, од интереса атомски омотач који има "унутрашње делове", односно електроне.

У физичкој пракси физички системи су, наравно, увек сложени. Из контекста је јасно да реч "структура" говори о извесној уређености у оквиру физичког система[2] који се разматра, тј. о међусобном односу горе поменутих степени слободе.

Може се дати и формална дефиниција [1]:

Дефиниција 1.1. *Под* ***структуром*** *сложеног система подразумева се скуп степени слободе сложеног система.*

Овде ће од интереса бити системи са коначно пребројивим степенима слободе који формирају дводелне (*bipartite*) структуре: дакле, структуре у којима се издвајају два подсистема. У савременим истраживањима су од интереса и вишеделне структуре, али о њима, тренутно, има мање резултата.

Део формализма класичне физике (посебно механике) су канонске трансформације [2].

Дефиниција 1.2. *Под* ***канонским трансформацијама*** *подразумевају се трансформације канонских променљивих* $((\vec{q},\vec{p}) \to (\vec{Q},\vec{P}))$ *при чему остаје очуван облик Хамилтонових једначина. Или, еквивалентно: канонске трансформације су такве трансформације за које је Поасонова (Poisson) заграда инваријанта. Каже се и још да канонске транс-*

---

[1] Под степенима слободе у класичној физици се подразумева најмањи број независних варијабли потребних да се одреди стање система, при чему је избор и број степени слободе моделски зависан.

[2] Од сада па надаље термин "физички систем" ће бити коришћен и за целину која има структуру и за део структуре који је од интереса.

формације имају особину очувања запреминског елемента у фазном простору, односно јакобијан трансформације је једнак јединици.

Канонске трансформације класичне физике обезбеђују очување Хамилтоновог формализма и уводе редефиницију степени слободе за разматрани систем. Најчешће је случај да "нови" степени слободе нису реални физички системи, него погодни математички запис који омогућава математичко решење проблема, а онда инверзном трансформацијом (што је обезбеђено ненултом вредношћу јакобијана) решења се изражавају у терминима полазних ("реалних") степени слободе. Ова особина, да омогућава свођење тешког проблема на лакши (или лакше) чини канонске трансформације атрактивним у физици.

Подскуп канонских трансформација чине тзв. линеарне канонске трансформације (ЛКТ), које ће у овом раду бити од интереса, јер им је основна особина да су везе између "старих" и "нових" варијабли једнозначне. Наравно, ЛКТ наслеђују особине канонских трансформација: очување Поасонове заграде и инвертибилност трансформације. Јасно, нису све линеарне трансформације канонске.

Линеарне канонске трансформације се користе и у квантној механици (уз претходно квантовање) тако да су комутационе релације инваријанте на трансформацију – по аналогији са класичном механиком, где су инваријанте канонских трансформација биле Поасонове заграде.

У формализму квантне механике, сваком степену слободе се придружује један Хилбертов (*Hilbert*) простор стања $\mathcal{H}_i$, па ће сложеном систему (целини, зато ознака $\mathcal{H}_C$) од N степени слободе одговарати следећа факторизација:

$$\mathcal{H}_C = \Pi_{i=1}^{\otimes N}\mathcal{H}_i, \tag{1.1}$$

и тиме се описује тзв. задата структура. Формално гледајући, пермутација индекса не води новој структури, односно таква трансформација структуре се сматра тривијалном. Други примери тривијалних трансформација су груписање ("*coarse graining*") подсистема у надсистем и отуда и степени слободе:

$$\mathcal{H}_C = (\Pi_{i=1}^{\otimes n_1}\mathcal{H}_i)\otimes(\Pi_{i=1}^{\otimes n_2}\mathcal{H}_i)\otimes\ldots\otimes(\Pi_{i=1}^{\otimes n_k}\mathcal{H}_i), \tag{1.2}$$

(при чему важи $n_1+n_2+...+n_k=N$) или, ако је могућа, декомпозиција ("*fine graining*")

$$\mathcal{H}_C = (\Pi_{i=1}^{\otimes n_1}\mathcal{H}_i)_1\otimes(\Pi_{i=1}^{\otimes n_2}\mathcal{H}_i)_2\otimes\ldots\otimes(\Pi_{i=1}^{\otimes n_k}\mathcal{H}_i)_N, \tag{1.3}$$

при чему важи $n_1+n_2+...+n_k>N$ [1].

Ово су, заправо, примери линеарних канонских трансформација јер формално представљају прелаз на степене слободе друге структуре и обратно (инвертибилност трансформације) и чувају алгебру квантне механике, на првом месту комутационе релације опсервабли положаја и импулса (односно одговарајуће спинске комутационе релације ако су у питању унутрашњи степени слободе).

Најопштији математички облик ЛКТ, који обухвата и горе дате тривијалне примере трансформација, дат је следећим изразима[3]:

$$\hat{\xi}_m = \sum_i c_{mi}\hat{x}_i + \sum_i d_{mi}\hat{p}_i, \quad \hat{\pi}_n = \sum_j c'_{nj}\hat{x}_j + \sum_j d'_{nj}\hat{p}_j \tag{1.4}$$

за сложени систем $\mathcal{C}$ дефинисан опсерваблама (задата структура) $\hat{x}_i$, $\hat{p}_j$, при чему важе комутационе релације $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \imath\hbar\delta_{ij}$, односно $[\hat{\xi}_i, \hat{\pi}_j] = \imath\hbar\delta_{ij}$. Дакле, нетривијалне ЛКТ уводе степене слободе који нису сводиви (редуцибилни) на оне полазне, што је супротно од оног како тривијалне ЛКТ, изрази (1.2) и (1.3), мењају задату структуру система. Један пример оваквих, нетривијалних, ЛКТ ће бити коришћен ниже: центар масе и релативна честица као нови ("алтернативни") степени слободе, дати кроз одговарајуће опсервабле. У односу на то на које делове сложеног система ЛКТ делују, разликују се *глобалне* (тичу се свих степени сложеног система) и *локалне* (тичу се само неких степени сложеног система) линеарне канонске трансформације.

Отуда је свака структура сложеног система дефинисана неком, али једнозначном, тензорском факторизацијом:

$$\Pi_{i=1}^{\otimes N}\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_C = \Pi_{\alpha=1}^{\otimes N'}\mathcal{H}_\alpha, \tag{1.5}$$

односно у случају дводелних система, који ће првенствено бити од интереса, то се записује на следећи начин:

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_C = \mathcal{H}_D \otimes \mathcal{H}_E, \tag{1.6}$$

при чему лева страна одговара декомпозицији $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ а десна декомпозицији $\mathcal{C} = \mathcal{D} + \mathcal{E}$. Дакле, сложени систем је дефинисан простором стања $\mathcal{H}_C$, одговарајућим хамилтонијаном и квантним стањем. Што се универзалне квантне механике тиче, за изоловани систем (тј. систем за који важи временски (не)зависна Шредингерова (*Schrödinger*) једначина; за детаље видети Главу 3) $\mathcal{C}$, обе структуре у изразу (1.6) су равноправне (тј. ниједна од њих не може се издвојити као привилегована) и у општем случају несводиве су међусобно једна на другу [1]. Појам међусобне несводивости структура ће бити од интереса и у следећим поглављима, стога дефиниција:

Дефиниција 1.3. *Термин несводиве (иредуцибилне) структуре значи да структуре не следе једна из друге тривијалним ЛКТ (операције груписања, декомпозиције или пермутације степени слободе).*

За задату структуру, на пример $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, могу бити од интереса опсервабле које се тичу подсистема $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$, које су дате изразима типа $\hat{A} \otimes \hat{I}_B$, односно $\hat{I}_A \otimes \hat{B}$ – то су тзв. *локалне опсервабле* (или "једночестичне опсервабле"). Насупрот овоме, опсервабле које су нека комбинација опсервабли подсистема $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ пример су тзв. композитне (колективне) опсервабле: један пример за такву опсерваблу би биле опсервабле $\hat{D}_\pm = \hat{A} \otimes \hat{I}_B \pm \hat{I}_A \otimes \hat{B}$.

---

[3] Примећује се да су нетривијалне трансформације дефинисане у односу на опсервабле са својственим континуалним спектром, што води порекло из класичне физике. Наравно, квантна механика познаје и опсервабле са дискретним спектром, од којих спинске опсервабле су од првенственог значаја. Одговарајуће трансформације се ређе срећу и конструишу се за специјалне потребе, као што је рецимо Холштајн-Примаковљева (*Holstein, Primakoff*) трансформација. Она успоставља везу између спинских опсервабли и бозонских оператора креације и анихилације и често се користи у квантној статистичкој физици, физици чврстог стања; за неке детаље видети [1]. Дакле, у овом Раду под нетривијалним ЛКТ ће бити подразумеване једнакости (1.4), осим ако се другачије не назначи.

Претходно речено о опсерваблама сложеног система са два степена слободе се лако уопштава и формализује кроз дефиницију:

Дефиниција 1.4. *Нека је задата структура:* $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_k + \ldots + \mathcal{A}_N$. *Свака опсервабла која се може записати на следећи начин:*

$$\hat{A}_k \equiv \hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2 \otimes \ldots \otimes \hat{A}_k \otimes \ldots \otimes \hat{I}_N, \tag{1.7}$$

при чему су $\hat{I}_{j\neq k}$ *идентични оператори у Хилбертовим просторима одговарајућих степени слободе, назива се локалном опсерваблом. Свака друга опсервабла која не може, у односу на задату структуру, бити записана као у* (1.7) *назива се композитном опсерваблом.*

И ово све важи за разматрану структуру, $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. У односу на другу структуру, рецимо $\mathcal{C} = \mathcal{D} + \mathcal{E}$ горње опсервабле имају другачије значење. На пример, ако се на израз за $\hat{D}_\pm$ гледа као на ЛКТ које дају нове опсервабле, могуће је изразити $\hat{A} \otimes \hat{I}_B$ као $\hat{A} \otimes \hat{I}_B = \frac{1}{2}(\hat{D}_+ \otimes \hat{I}_- + \hat{I}_+ \otimes \hat{D}_-)$ што значи да је опсервабла $\hat{A}$, некада локална, сада композитна опсервабла у односу на структуру $\mathcal{C} = \mathcal{D} + \mathcal{E}$.

Из горе реченог се види **релативност** појма физичког (под)система и **релативност** појма локалне и композитне опсервабле.

1.1 Неки примери сложених система

Да би се боље разумела питања која са собом носе појам структуре и задатак "растављања" сложених система на подсистеме, у даљем излагању ће бити дискутовани неки примери дводелних и вишеделних структура.

За класичну физику карактеристично је то да задавши параметре и степене слободе, све је речено о структури система, која се претпоставља као базична и физички реална[4]. А ако је при томе позната једначина кретања за систем, онда је структура у потпуности дефинисана у произвољним временским тренуцима, барем у принципу.

Као пример класичног сложеног система, посматрајмо Земљу и Сунце са гравитационом интеракцијом, при чему се оба тела моделују као материјалне тачке. Ово је проблем два тела, који се решава преласком на координате центра масе и релативне честице, што су одговарајуће канонске трансформације. Овом сепарацијом степени слободе, проблем два тела се редукује на проблем једног тела ван поља и на проблем једног тела у спољашњем пољу. Поменути степени слободе центра масе, рецимо, се не сматрају реалним физичким објектом што се класичне механике тиче.

За разлику од класичне, у квантној механици ствари стоје другачије. Као пример којим се лепо илуструје ова различитост може се узети квантни модел атома водоника, посматран као затворен (ван спољашњег поља и интеракције са другим физичким системима, или пољима) квантни систем [3,4]. Наиме, када се говори о атому водоника има се у виду структура "електрон+протон" $(e+p)$, што је у складу са теоријом елементарних честица. Овој структури одговара тензорска факторизација простора стања атома, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_e \otimes \mathcal{H}_p$,

---

[4] Мисли се на класичну реалност – ничим условљено постојање параметара и стања система.

а хамилтонијан гласи:

$$\hat{H} = \hat{T}_e + \hat{T}_p + \hat{V}_{Coul} = \frac{\hat{\vec{p}}_e^2}{2m_e} + \frac{\hat{\vec{p}}_p^2}{2m_p} - k\frac{e^2}{|\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p|}, \tag{1.8}$$

где је $k = (4\pi\epsilon_\circ)^{-1}$ константа Кулонове (*Coulomb*) интеракције, $\hat{V}_{Coul}$, електрона и протона а $\hat{T}_e$ и $\hat{T}_p$ су кинетичке енергије електрона и протона.

Међутим, ова структура не пружа теоријско објашњење за феноменолошки уочен и потврђен дискретни атомски спектар. Структура која даје објашњење дискретног енергијског спектра атома је структура "центар масе+релативна честица" $(CM + R)$ која се добија истим линеарним канонским трансформацијама које су поменуте у вези са класичним проблемом два тела. Односно, то је стандардни начин решавања стационарне Шредингерове једначине за водоников атом са тензорском факторизацијом $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{CM} \otimes \mathcal{H}_R$, и хамилтонијаном, израз (1.8), сада записаним у облику:

$$\hat{H} = \hat{T}_{CM} + \hat{T}_R + \hat{V}_R = \frac{\hat{\vec{P}}_{CM}^2}{2M} + \frac{\hat{\vec{p}}_R^2}{2\mu_R} - k\frac{e^2}{|\hat{\vec{\rho}}_R|}, \tag{1.9}$$

где је $M = m_e + m_p$ маса атома, а $\mu_R = (m_e^{-1} + m_p^{-1})^{-1}$ је тзв. редукована маса. $\hat{T}_{CM}$ и $\hat{T}_R$ су кинетичке енергије степена слободе центра масе и релативне честице, док је $\hat{V}_R$ спољашњи потенцијал за релативну честицу.

Запис инвертибилних линеарних канонских трансформација које преводе хамилтонијан атома из облика (1.8) у облик (1.9) је следећи:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{R}}_{CM} &= (m_e\hat{\vec{r}}_e + m_p\hat{\vec{r}}_p)/(m_e + m_p), \quad \hat{\vec{\rho}}_R = \hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p \\ \hat{\vec{P}}_{CM} &= \hat{\vec{p}}_e + \hat{\vec{p}}_p, \quad \hat{\vec{p}}_R = (m_p\hat{\vec{p}}_e - m_e\hat{\vec{p}}_p)/(m_e + m_p), \end{aligned} \tag{1.10}$$

при чему се опсервабле $(\hat{\vec{r}}_p, \hat{\vec{p}}_p)$ и $(\hat{\vec{r}}_e, \hat{\vec{p}}_e)$ тичу степени слободе протона и електрона, редом, а опсервабле $(\hat{\vec{R}}_{CM}, \hat{\vec{P}}_{CM})$ и $(\hat{\vec{\rho}}_R, \hat{\vec{p}}_R)$ се тичу степени слободе центра масе и релативне честице.

Будући да је у питању један те исти сложени систем, водоников атом, а имајући у виду тензорску факторизацију $\mathcal{H}_{CM} \otimes \mathcal{H}_R = \mathcal{H}_{atom} = \mathcal{H}_e \otimes \mathcal{H}_p$ стоји следећа једнакост:

$$|\chi\rangle_{CM} \otimes |nlm_l\rangle_R = |\Psi\rangle_{atom} = \sum_i c_i|\phi_i\rangle_e \otimes |\varphi_i\rangle_p, \tag{1.11}$$

где је са леве стране тензорски производ стања независних степени слободе центра масе и релативне честице. Квантни бројеви n, l и m_l познати су из стандардне теорије водониковог атома.

Разлог зашто се проблем два тела у класичном и квантном случају разликују је постојање квантне сплетености[5] (*"quantum entanglement"*) за електрон и протон, чега нема у проблему два класична тела. Формално, то се записује као:

$$|\Psi\rangle_{e+p} = \sum_i c_i |\phi_i\rangle_e \otimes |\varphi_i\rangle_p, \tag{1.12}$$

што је десна страна израза (1.11).

Као што се може показати, важи неједнакост $\hat{\rho}_e \otimes \hat{\rho}_p \neq |\Psi\rangle_{atom}\langle\Psi|$, при чему су $\hat{\rho}_e = tr_p|\Psi\rangle_{atom}\langle\Psi|$ и $\hat{\rho}_p = tr_e|\Psi\rangle_{atom}\langle\Psi|$, редуковани статистички оператори електрона и протона, редом. Физички садржај претходне неједнакости је у томе да се не може говорити о стањима електрона и протона, већ о стању атома као целине и стањима центра масе $|\chi\rangle_{CM}$ и релативне честице $|nlm_l\rangle_R$.

Докле год атом се не налази у неком спољашњем пољу, лева страна једнакости (1.11) описује два независна система CM и R, са независним енергијама, E_{CM} и E_{Rn}, редом. Енергија атома је тада $E_{atom} = E_{CM} + E_{Rn}$. У случају деекситације водониковог атома (у структури $CM + R$) важе следеће једнакости, нпр.:

$$\begin{aligned} &E_{\text{атом}} = E_{CM} + E_{Rn=2} = E'_{CM} + E_{Rn=1} + E_{\text{фотон}} \\ &\vec{P}_{CM} = \vec{P}'_{CM} + \hbar\vec{k}_{\text{фотон}}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

као последица закона одржања импулса (у горњим ознакама $\vec{P}$) и енергије (у горњим ознакама E)[6]. На собној температури $P_{CM} = \sqrt{3mk_BT} \sim 10^{-24}$kgm/s а за видљиву светлост је импулс $\hbar k = h/\lambda \sim 10^{-27}$kgm/s, те како су веома мали бројеви у питању може се писати $\vec{P}_{CM} \approx \vec{P}'_{CM}$, односно важи $E_{CM} \approx E'_{CM} \sim 0.01$eV. Онда се једначина закона одржања енергије своди на

$$E_{Rn=2} \approx E_{Rn=1} + E_{\text{фотон}},$$

одакле се види да се деекситација (практично) тиче степени слободе релативне честице при чему су типичне вредности $E_{Rn} \sim 1 - 10$eV и $E_{\text{фотон}} = h\nu \sim 1$eV.

Са друге стране, деекситација атома водоника (у структури $e+p$) се мора представити следећим једнакостима:

$$\begin{aligned} &E^{(\text{екситован})}_{\text{атом}} = E^{(\text{деекситован})}_{\text{атом}} + E_{\text{фотон}} \\ &\vec{P}_{\text{атом}} = \vec{P}'_{\text{атом}} + \hbar\vec{k}_{\text{фотон}}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

---

[5] Видети следећу главу.

[6] Овде треба имати у виду да, услед закона одржања, израчивање фотона има за последицу узмак центра масе, чији импулс може бити усмерен било где. Зато стање $CM + R$ структуре није тензорски производ стања подсистема, како би се само на основи ЛКТ могло закључити већ гласи, на пример, $e^{-\lambda t}|\vec{P}\rangle_{CM}|200\rangle_R|0\rangle_{\text{фотон}} + (1 - e^{-\lambda t})|100\rangle_R \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}}|\vec{P} - \hbar\vec{k}\rangle_{CM}|1_{\vec{k}}\rangle_{\text{фотон}}$; λ је "константа распада" стања R подсистема, $|\vec{P}\rangle_{CM}$ је својствено стање опсервабле импулса CM а стања фотона су записана у формализму друге квантизације, па $1_{\vec{k}}$ означава један фотон са таласним вектором $\vec{k}$. ЛКТ дају само кинематички аспект ситуације, док динамички аспект доносе закони одржања. Будући да поменуте корелације су "слабе" у односу на сплетеност која потиче од Кулонове интеракције, занемарују се у анализи, па се стање $CM + R$ структуре увек пише као тензорски производ стања.

Иако десна страна (1.14) важи за сваку структуру атома, због интеракције у структури $e+p$, а отуда и сплетености, десна страна једнакости (1.11), не може се говорити о "оштрим" вредностима опсервабли хамилтонијана нити импулса електрона и/или протона. То јест, због (1.9) и (1.10) јасно је да важи $\hat{\vec{P}}_{\text{атом}} = \hat{\vec{p}}_e + \hat{\vec{p}}_p = \hat{\vec{P}}_{CM}$ и $E_{CM} + E_{Rn} = E_{\text{атом}} \neq E_e + E_p$. Ово значи да се очување енергије и импулса атома тиче и електрона и протона скупа, те да се атомске деекситације не могу приписати, на пример, динамици само електрона, тј. не може се по аналогији са нађеним $\vec{P}_{CM} \approx \vec{P}'_{CM}$, закључити да за енергију протона важи $E_p \approx E'_p$.

Лева страна једнакости (1.11) указује на степене слободе релативне честице као подсистема кога се деекситација тиче[7], тј. подсистема који је индиректно доступан опсервацији.

Лабораторијска манипулација се тиче, пре свега, CM и R степени слободе. Примери ситуација у којима су експериментално доступни степени слободе центра масе сложеног система (нпр. атома или молекула) су следећи: атомски ласери и литографија [5], атомска интерферометрија, хлађење молекула [6], дифракција великих молекула [7,8] и тако даље. Што се тиче степени слободе релативне честице, они су углавном детектују индиректно: нпр., преко зрачења атома/молекула у спектроскопији, као конформације молекула[8] [9] или на пример у манипулацији "класичним орбитама" у атому [10].

Горе је наглашено да је посматрани атом водоника ван поља спољашњих сила, а током анализе коришћени су закони одржања импулса и енергије што је све еквивалентно исказу да је овде анализирани атом водоника затворен систем.

За подсистем релативне честице (R) важи следећа временски независна Шредингерова једначина:

$$\hat{H}_R|nlm_l\rangle_R = E_n|nlm_l\rangle_R, \tag{1.15}$$

што одговара временској еволуцији подсистема која се описује унитарним оператором $\hat{U}(t) = e^{-\frac{\imath t\hat{H}_R}{\hbar}}$. Тада, вероватноћа прелаза за затворени атом $|nlm_l\rangle_R \rightarrow |n'l'm'_{l'}\rangle_R$, која је дата изразом $|_R\langle n'l'm'_{l'}|\hat{U}(t)|nlm_l\rangle_R|^2$, је тачно нула и то у сваком временском тренутку, t, осим ако је $n = n', l = l', m_l = m'_{l'}$, тј. стање се не мења. Деекситација атома и спектроскопски резултати, пак, говоре да се стање мења, тј. да се дешавају "скокови" у динамици релативне честице који се називају деекситацијом атома. Отуда се нужно закључује да полазна претпоставка о затворености атома, која води до својствене једнакости (1.15), није физички коректна – атом водоника је отворен систем, за дефиницију в. Главу 3. Ово је још један физички аспект који се мора узети у обзир при раду са структурама: поред тога што реални физички системи имају сложену структуру они су и *отворени* [11–13].

Као пример вишеделног сложеног система и односа колективних и локалних опсервабли у њему, размотримо сложени систем $\mathcal{C}$ који се састоји од четири подсистема: два електрона $1e, 2e$ и два протона $1p, 2p$, односно $\mathcal{C} = \{1e, 2e, 1p, 2p\}$ [1]. Гледано за себе, ова структура што се квантне хемије тиче, би могла бити молекул водоника, H_2. Из ове структуре, $\mathcal{C}$, могу бити изведене следеће структуре:

- $\mathcal{C}_1 = \{1e, 1p, 2e, 2p\}$,

---

[7] Свакако, то не могу бити степени слободе центра масе, будући да су описани чланом $\frac{\hat{\vec{P}}^2_{CM}}{2M}$ у хамилтонијану (1.10), што води континуалном енергијском спектру, односно нема дискретног енергијског спектра.

[8] Под конформацијом молекула подразумева се било који просторни распоред атома молекула који се може постићи ротацијом око хемијских веза између атома или група атома унутар молекула. Овај појам не треба бркати са конфигурацијом молекула, која представља просторни распоред атома који улазе у састав молекула.

- $\mathcal{C}_2 = \{1H, 2e, 2p\}$,
- $\mathcal{C}_3 = \{1H, 2H\}$,
- $\mathcal{C}_4 = \{1CM, 1R, 2CM, 2R\}$,
- $\mathcal{C}_5 = \{CM, R\}$.

Ознаке су следеће: CM и R представљају центар масе и релативну честицу, док $1H$ означава водоников атом састављен од $1e$ и $1p$, односно $1H = 1e + 1p$. Имајући у виду дефиницију трансформација, израз (1.10) јасно је да CM и R степени слободе, појединачно, се не састоје од степена слободе електрона и протона, а важи и обратно.

Структура $\mathcal{C}_1$ је настала тривијалним трансформацијама – пермутацијом степени слободе, док се структура $\mathcal{C}_2$ добија груписањем степени слободе са ознаком 1, што је опет тривијална трансформација. Опет груписањем настаје структура $\mathcal{C}_3$, што је сложени систем који се састоји од два атома водоника. Ова структура је од интереса у разматрањима везаним за физику кондезоване материје, а иначе узима се за основну хемијску дефиницију молекула водоника.

Ако се структура $\mathcal{C}_3$ декомпонује применом трансформација (1.10), добија се структура $\mathcal{C}_4$ што је збир два атома водоника декомпонованих на њихове подсистеме центра масе и релативне честице. $\mathcal{C}_5$ представља $CM + R$ за цео $\mathcal{C}$ систем, што је структура од интереса у, на пример, интерефеpенционим експериментима са великим молекулима.

Као последица тога што је $e + p \to CM + R$ нетривијална ЛКТ, важи: $\mathcal{C}_3 = \{1H, 2H\} \neq \mathcal{C}'_4 = \{1H, 2H\}$, при чему је ово последње добијено трансформацијом груписања у $\mathcal{C}_4$ структури, $H = CM + R$. Неједнакост је последица тога што су атоми водоника добијени различитим груписањем: у првом случају из електрона и протона, а у другом случају из степени слободе центра масе и релативне честице. Али, ако се сматра да атоми немају структуру, онда се структура $\mathcal{C}_3$ формално може представити преко разлагања $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_4$ или $\mathcal{C}_5$.

Један пример који се тиче тривијалних ЛКТ (пермутације честица), а где су физичке последице преструктурирања нетривијалне, је дат кроз протокол квантне телепортације [1,14,15].

Сложени систем $\mathcal{C}$, у овом случају, чине три кубита[9] $1+(2+3)$ и то тако да су кубит 1 и 2 у поседу једног експериментатора (Алиса), а кубит 3 у поседу другог (Боб). Први кубит, 1, је у непознатом стању које би требало "телепортовати", док су преостала два кубита, $2+3$, у сплетеном стању. Квантна телепортација се реализује на структури $\mathcal{C} = (1+2)+3$ (за детаље протокола видети, на пример, [15]), која се добија тривијалном канонском трансформацијом полазне структуре. Иначе, квантна телепортација је експериментално потврђена, а савремена усавршавања протокола показују тенденцију повећања просторног растојања између квантних подсистема [16].

---

[9] Под кубитом се подразумева било који (макар ефективни) дводимензионални простор стања квантног система.

1.2 Нека питања и дилеме везане за квантне структуре

Горњим примерима илустровано је како различите декомпозиције, односно различите структуре једног истог сложеног система могу да имају сасвим различит физички статус једна у односу на другу.

Што се стандардне квантне механике (затворених система) тиче, све структуре су равноправне. Са друге стране, може се поставити питање: да ли се нека или неке структуре сложеног система издвајају у смислу да су реалније од осталих? Овде је реалност у смислу класичне реалности, тј. подсистем[10] се издваја тиме што је на њему (у принципу) могуће мерење произвољних опсервабли чије вредности постоје независно од опсервера [17, 18]. На ово питање наводи, рецимо, пример водониковог атома који је горе разматран – као што смо видели структура $CM + R$ се испоставља као физички релевантна. Како и зашто је издвојена $CM + R$ структура у којој се препознаје понашање налик на класично, макар једног степена слободе: рецимо CM подсистема? Шта је онда са електроном и протоном, односно одговарајућом структуром?

У класичном домену, пак, колективне варијабле какве су центар масе или Ојлерови (*Euler*) углови описују просторни облик или оријентацију у простору макроскопских тела – унутрашњи степени слободе који се тичу температуре тела и зрачења нису доступни директној опсервацији [1].

Због последње реченог, постаје јасније да је питање (класичне) реалности и директне доступности неких степени сложеног система, у ствари, питање "преласка са квантног на класично[11]", односно класичног лимита квантне механике, што је питање од интереса за основе (нерелативистичке) квантне механике.

Сложени квантни системи садрже, по правилу, квантне корелације као што је представљено релацијом (1.12). У Глави 2 ће бити више речи о појму и настајању квантних корелација, што је еквивалентно важењу Шредингеровог закона. Овде је важно да се нагласи да по стандардној квантној механици нема смисла говорити о појму стања подсистема сложених система. Ово је у супротности са резонима класичне физике, где познавање стања подсистема аутоматски значи и познавање стања целине, а важи и обратно. Дакле, постојање сплетености а самим тим немогућност да се говори о стању подсистема обележје је квантних структура због којег се разликују од класичних структура.

Све досада речено може се исказати и на следећи начин: постоји ли универзално правило које успоставља физички реалну структуру, односно издваја неке степене слободе којима се може директно приступати и манипулисати њима? Да ли је таква структура једнозначна? Ако правило постоји, која је физичка основа тог правила? Од каквог значаја је *отвореност* реалних (сложених) квантних система за оваква питања? Које су последице линеарних канонских трансформација по квантне корелације присутне у квантној структури? Какав је однос различитих декомпозиција сложеног система и одговарајућих подсистемских динамика? Односно, шта се може рећи о претходним питањима полазећи од основа квантне механике?

---

[10] А самим тим и други подсистем, ако је реч о дводелним структурама.

[11] Класични лимит квантне механике је тема у савременим квантно-механичким истраживањима која у основи има питање: да ли и како се може класична физика репродуковати из првих принципа квантне механике? За још детаља у вези са овим проблемом видети [11].

Истакнута питања дају *мотивацију* за овај Рад, односно истраживање квантних структура.

Са друге стране, теоријско познавање структуре, односно одговарајућих физичких услова није само од академског интереса, већ може да има директну последицу по поступке манипулације физичким (под)системима у лабораторији, а самим тим и на примене квантне механика као што су квантна информатика и рачунање, квантна метрологија, нанотехнологија итд.

Сва до сада разматрана питања су универзална: независно од тога да ли су у питању квантни системи са дискретним (какав је спин 1/2) или континуалним степенима слободе (нпр. у физици незаобилазни квантни линеарни хармонијски осцилатор).

2

Појам и врсте квантних корелација

Квантна сплетеност (*quantum entanglement*) је врста квантних корелација која нема класични аналогон и има два аспекта. Први, кинематички, аспект се за двочестичне квантне системе у чистом квантном стању целине тиче Шмитове канонске форме [19] која је успостављена следећим теоремом:

Теорем 2.1. *За свако стање* $|\Psi\rangle_{12}$ *"двочестичног" система се може дефинисати ермитски "редуковани статистички оператор" првог система изразом* $\hat{\rho}_1 = tr_2|\Psi\rangle_{12}\,{}_{12}\langle\Psi|$ *где је* tr_2 *операција узимања парцијалног трага по неком базису простора стања 2. честице. Нека је (неједнозначна) спектрална форма* $\hat{\rho}_1$*:*

$$\hat{\rho}_1 = \sum_k \lambda_k |\phi_k\rangle_1\,{}_1\langle\phi_k|.$$

Тада се може писати:

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\lambda}_k |\phi_k\rangle_1 \otimes |\chi_k\rangle_2, \tag{2.1}$$

где су стања $|\chi_k\rangle_2$ *својствена стања "редукованог статистичког оператора" другог система*

$$\hat{\rho}_2 = \sum_k \lambda_k |\chi_k\rangle_2\,{}_2\langle\chi_k| \equiv tr_1|\Psi\rangle_{12}\,{}_{12}\langle\Psi|.$$

Због једнозначне везе $|\phi_k\rangle_1 \leftrightarrow |\chi_k\rangle_2$, дегенерације својствених вредности $\{\lambda_k\}$ су идентичне за оба оператора $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$.

С обзиром да важи ${}_1\langle\phi_i|\phi_j\rangle_1 =_2 \langle\chi_i|\chi_j\rangle_2 = \delta_{ij}$, то Шмитову канонску форму (ШКФ) стања чини погодном за математичке манипулације. Коефицијенти $\sqrt{\lambda}_k$ су тзв. Шмитови коефицијенти а број ненултих коефицијената је тзв. Шмитов број. Ако је овај број већи од један, онда је стање сплетено а ако је један онда је стање сепарабилно, односно тензорски производ стања подсистема. Број сабирака у стању (2.1) одређен је као $p = \min\{d_1, d_2\}$ где су d_1 и d_2 димензије одговарајућих Хилбертових фактор простора стања – дакле подсистем са "мањим" Хилбертовим простором одређује број сабирака у стању (2.1). То је преимућство ШКФ које се посебно види на примеру где је један подсистем коначно- а други бесконачно-димензионалан. Типичан пример је стање атома у Штерн-Герлаховом експерименту које се може записати као:

$$|\Psi\rangle_{S+CM} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_S \otimes |-\rangle_{CM} + |\downarrow\rangle_S \otimes |+\rangle_{CM}), \tag{2.2}$$

где су $|+\rangle_{CM}$, $|-\rangle_{CM}$ стања опсервабле центра масе атома а $|\uparrow\rangle_S$ и $|\downarrow\rangle_S$ су својствена стања пројекције опсервабле спина-$\frac{1}{2}$, дуж осе спољашњег магнетног поља.

Још један пример ШКФ дат је стањем:

$$|\Psi\rangle_{A+B} = \cos\theta|\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B + \sin\theta|\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \tag{2.3}$$

што је стање две честице, свака са спином 1/2, при чему су $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ својствена стања опсервабле $\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{n}$; $\hat{\vec{\sigma}}$ је стандардна ознака за векторску опсерваблу спина, а $\vec{n}$ је одговарајући орт.

Претходни примери тицали су се коначно + бесконачно димензионалног система и коначно + коначно димезионалног система[1], редом. Следећи пример за ШКФ се тиче подсистема који су оба бесконачно димензионална. За две моде (два хармонијска осцилатора), тзв. сажето стање (*squeezed state*) гласи:

$$|\Psi\rangle = \sqrt{1-\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n|n\rangle_1|n\rangle_2, \tag{2.4}$$

при чему $\lambda = \tanh r$, где је r параметар сажимања [20]. Стање је записано у Фоковом (*Fock*) базису, односно базису бројева попуњености једночестичних енергијских нивоа.

У општем случају ШКФ не мора бити једнозначна – једнозначна је акко су подсистемски статистички оператори комплетне опсервабле.

Други, динамички, аспект тиче се динамичког успостављања сплетености када год су два (или више) квантна система у интеракцији [11, 12, 19]; динамички аспект ће бити коришћен у анализи марковљевости у следећој глави. Нека су системи означени са $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, онда, по дефиницији, Хилбертов простор стања целине се тензорски факторише[2]:

$$\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B,$$

---

[1] Прецизније, мисли се на димензионалност простора стања.

[2] Овде треба напоменити да и класична физика познаје изградњу сложених простора стања од потпростора и то путем тзв. Декартовог (*Deckart*) производа, $\Gamma_C = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, при чему се ознаке "Γ" односе на фазне простор стања, целине и делова, који у општем случају није векторски простор, већ многострукост. У случају векторских простора, Декартов производ се своди на ортогонални збир, $\oplus$, векторских простора. Стања су задата преко функција расподела: у случају чистих стања преко Диракове (*Dirac*) делта функције ($\delta(\Gamma_C' - \Gamma_C) = \delta(\Gamma_1' - \Gamma_1)\delta(\Gamma_2' - \Gamma_2)$), а у случају мешаних стања преко одговарајућег интеграла ($f(\Gamma_C) = \int\int d\Gamma_1' d\Gamma_2' \omega(\Gamma_1', \Gamma_2')\delta(\Gamma_1' - \Gamma_1)\delta(\Gamma_2' - \Gamma_2)$). Физички, то значи да су стања сложеног система увек сепарабилна. Са друге стране, квантни системи се комбинују у сложене квантне системе операцијом тензорског производа. Нужност за то следи из важења Глисонове (*Gleason*) теореме и захтева да се може обавити локално мерење на квантним подсистемима; за доказ в. [21].

где су фактор-простори стања, $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$, Хилбертови простори стања (под)система $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. На овом месту, од суштинског значаја је напоменути да се квантна сплетеност уводи на овај начин само за међусобно различиве (неидентичне) квантне системе. Квантна сплетеност идентичних квантних система је отворен задатак од немалог интереса у савременој литератури.

Горе поменута целина два система у интеракцији описана је хамилтонијаном:

$$\hat{H}_C = \hat{H}_A \otimes \hat{I}_B + \hat{I}_A \otimes \hat{H}_B + \hat{H}_{A+B}, \tag{2.5}$$

при чему су $\hat{H}_A \otimes \hat{I}_B$ и $\hat{I}_A \otimes \hat{H}_B$ одговарајући сопствени хамилтонијани а $\hat{H}_{A+B} \equiv \hat{H}_{int}$ представља интеракцију двочестичног типа (значење појмова "интеракције" једночестичног и двочестичног типа је дат у Глави 3). Хамилтонијан (2.5) (по претпоставци временски независан) генерише оператор временске еволуције

$$\hat{U}_C = e^{-\frac{\imath}{\hbar} t \hat{H}_C}.$$

Нека је задат интеракциони хамилтонијан својом спектралном формом:

$$\hat{H}_{int} = \sum_{p,q} \gamma_{pq} \hat{P}_{Ap} \otimes \hat{\Pi}_{Bq}, \tag{2.6}$$

и нека је задато почетно стање сложеног система $\mathcal{C}$:

$$|\Psi\rangle_C = |\Psi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B. \tag{2.7}$$

Сменом (2.6) у израз за унитарни оператор временске еволуције, и уз разлагање стања $|\Psi_A\rangle$ по неком базису који одговара декомпозицији $\hat{P}_{Ap} \leftrightarrow \mathcal{H}_p$:

$$\mathcal{H}^{(A)} = \sum_p \mathcal{H}_p,$$

непосредно следи (овде треба приметити да је узет у обзир само интеракциони члан у хамилтонијану претпостављајући да је по норми већи од сопствених хамилтонијана, што важи у случају јаке интеракције):

$$|\Psi(t)\rangle_C = e^{-\frac{2\pi\imath t}{h} \sum\limits_{p,q} \gamma_{pq} \hat{P}_{Ap} \otimes \hat{\Pi}_{Bq}} \sum_m C_m |\varphi_m\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B, \tag{2.8}$$

уз важење:

$$\hat{P}_{Ap} |\varphi_m\rangle_A = |\varphi_m\rangle_A, |\varphi_m\rangle_A \in \mathcal{H}_p, \hat{P}_{Ap} |\varphi_{m'}\rangle_A = 0, |\varphi_{m'}\rangle_A \notin \mathcal{H}_p. \tag{2.9}$$

Због особине идемпотентности пројектора израз (2.8) води:

$$|\Psi(t)\rangle_C = \sum_{p,q} e^{-\frac{2\pi i t\gamma_{pq}}{h}} \hat{P}_{Ap} \otimes \hat{\Pi}_{Bq} \sum_m C_m |\varphi_m\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B = \\ = \sum_m C_m |\varphi_m\rangle_A \otimes \sum_q e^{-\frac{2\pi i t\gamma_{mq}}{h}} \hat{\Pi}_{Bq} |\chi\rangle_B \, , \tag{2.10}$$

где је у задњој једнакости коришћен израз (2.9). Дакле, израз (2.10) успоставља:

$$|\Psi(t)\rangle_C = \sum_m C_m |\varphi_m\rangle_A \otimes |\chi_m(t)\rangle_B, \tag{2.11}$$

где

$$|\chi_m(t)\rangle_B \equiv \sum_q e^{-\frac{2\pi \imath t\gamma_{mq}}{h}} \hat{\Pi}_{Bq} |\chi\rangle_B \tag{2.12}$$

и важи да је ${}_B\langle\chi_{m'}(t)|\chi_{m''}(t)\rangle_B \neq 0$ у датом временском тренутку. За чисто стање (2.11) каже се да је сплетено или несепарабилно и да је носилац квантне сплетености[3].

Стање (2.11) се за изабрани временски тренутак може представити у простијој форми, захваљујући Шмитовој теореми. Јасно, различитим временским тренуцима еволуције одговараће различите ШКФ.

Од сада, па надаље, под сплетеним стањем дводелног сложеног система подразумеваће се стање записано у ШКФ, осим ако се другачије не назначи.

На језику статистичког оператора, квантна сплетеност се исказује на следећи начин:

Дефиниција 2.1. *Квантно сплетено стање дводелног система је оно стање које се не може записати у облику:*

$$\hat{\rho}_C = \sum_i p_i \hat{\rho}_{Ai} \otimes \hat{\rho}_{Bi}$$

тј. које није сепарабилно.

Специјалан случај горњег сепарабилног стања је облика $\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$ чему, у случају чистог стања сложеног система, одговара тензорски производ чистих стања подсистема.

Међутим, квантна сплетеност није једини тип не-класичних корелација у квантној механици. Поред квантне сплетености (дефинисане изразом (2.11)), постоји и други тип корелација које се називају квантни дискорд (*quantum discord*). Пример стања које не садржи квантну сплетеност, али је ненултог дискорда је тзв. Вернерово (*Werner*) стање за два кубита [23]:

$$\hat{\rho} = \tfrac{1-z}{4} \hat{I} + z|\psi\rangle\langle\psi|$$

за $z \leq \frac{1}{3}$. Параметар z може узимати вредности у интервалу $0 \leq z \leq 1$, па је за $z \geq \frac{1}{3}$ стање $\hat{\rho}$ сплетено, при чему је стање $|\psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$, са своје стране, увек квантно

---

[3] Јасно, реч је о корелацијама које су квантног порекла. Одговарајуће класичне корелације потичу од закона одржања, који и даље важе. Изгледа да је за дводелне системе тако: где има квантних корелација, има и класичних. Међутим, за вишеделне системе не мора бити тако: квантне корелације могу постојати без присуства класичних корелација, в. [22].

сплетено – за вредност параметра $z = 1$ горње стање $\hat{\rho}$ је и квантно сплетено и са ненултим квантним дискордом у исто време.

Кључни појам у дефинисању квантног дискорда је појам ентропије, с тим да ће овде од интереса бити тзв. Шенонова (*Shannon*) ентропија (треба имати у виду да је ова ентропија, практично до на константу, исто што и Болцман-Гибсова (*Boltzmann,Gibbs*) ентропија из класичне статистичке физике, али уобичајено је да се креће од Шенонове ентропије јер је то ближе квантној информатици одакле су и проистекла питања о информатичком садржају корелисаних стања.).

У класичној теорији информације Шенонова ентропија је мера непознавања, или недостатка информације о вредностима случајне променљиве A и дата је изразом:

$$H(A) = -\sum_a p(A = a)\log p(A = a),$$

где је $p(A = a)$ вероватноћа да случајна променљива A узме вредност a. Ако посматрамо две случајне променљиве A и B, условна ентропија случајне променљиве A, знајући вредности за случајну променљиву B, је по дефиницији:

$$\begin{aligned} H(A|B) &= \sum_b P(B = b)H(A|B = b) \\ &= -\sum_b P(B = b)\sum_a P(A = a|B = b)\log P(A = a|B = b), \end{aligned}$$

где је $P(A = a|B = b)$ вероватноћа да A има вредност a ако је познато да је $B = b$.

Корелација између случајних променљивих A и B онда се изражава преко *(класичне) међусобне информације*:

$$\mathcal{I}(A : B) = H(A) - H(A|B). \tag{2.13}$$

У свим изразима вероватноће су изведене из заједничке расподеле вероватноћа $P(A, B)$.

Могуће је формулисати еквивалентан израз за (2.13). Користећи правило о множењу вероватноћа, условна ентропија се може записати као $H(A|B) = H(A, B) - H(B)$, где је $H(A, B)$ заједничка ентропија случајних променљивих A и B, што даје други израз за класичну међусобну информацију:

$$\mathcal{I}(A : B) = H(A) + H(B) - H(A, B). \tag{2.14}$$

Следећи корак је квантно-механичка формулација израза (2.13) и (2.14). У овој формулацији, случајне варијабле представљене су стањима квантних система A и B. Еквивалент заједничке расподеле вероватноћа је стање сложеног система, $\hat{\rho}_{AB}$. Редуковани статистички оператори $\hat{\rho}_A = tr_B(\hat{\rho}_{AB})$ и $\hat{\rho}_B = tr_A(\hat{\rho}_{AB})$ за системе A и B, редом, одговарају изразима за расподеле вероватноћа случајних променљивих појединих система.

Непознавање стања система $\hat{\rho}$ је онда дато фон Нојмановом (*von Neumann*) ентропијом

$$\begin{aligned} S(\hat{\rho}) &= -tr(\hat{\rho}\log\hat{\rho}) && (2.15)\\ &= -\sum_i \lambda_i \log\lambda_i, && (2.16)\end{aligned}$$

где су $\{\lambda_i\}$ својствене вредности оператора стања $\hat{\rho}$, и при том формално се дефинише да је $0\log 0 \equiv 0$ у случају нулте својствене вредности $\hat{\rho}$; логаритми су са основом e.

Основне особине фон Нојманове ентропије су следеће [15]:

(1) Ентропија је не-негативна величина и једнака је нули само за чисто стање.

(2) Ако је сложени систем $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ у чистом стању онда је $S(\hat{\rho}_A)=S(\hat{\rho}_B)$.

(3) Нека су p_i вероватноће и нека стања $\hat{\rho}_i$ имају као носаче[4] међусобно ортогоналне подпросторе. Онда важи:

$$S(\sum_i p_i\hat{\rho}_i)=H(p_i)+\sum_i p_i S(\hat{\rho}_i). \tag{2.17}$$

(4) Нека су p_i вероватноће, $|i\rangle_A$ ортогонална стања подсистема $\mathcal{A}$ и $\hat{\rho}_i$ било који скуп стања за подсистем $\mathcal{B}$. Онда важи једнакост:

$$S(\sum_i p_i|i\rangle_A\langle i|\otimes\hat{\rho}_i^B)=H(p_i)+\sum_i p_i S(\hat{\rho}_i^B). \tag{2.18}$$

(5) Нека је $\hat{\rho}_A\otimes\hat{\rho}_B$ стање система $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Онда је фон Нојманова ентропија дата изразом

$$S(\hat{\rho}_A\otimes\hat{\rho}_B)=S(\hat{\rho}_A)+S(\hat{\rho}_B). \tag{2.19}$$

Од посебног интереса, током каснијег излагања, ће бити особине (3) и (4).

Квантни аналогон израза (2.14) за међусобну информацију се добија заменом Шенонових израза са фон Нојмановим:

$$\mathcal{I}_{A:B}(\hat{\rho}_{AB})=S(\hat{\rho}_A)+S(\hat{\rho}_B)-S(\hat{\rho}_{AB}). \tag{2.20}$$

У случају израза (2.13), одговарајућа квантна формулација није тако тривијална. Условна ентропија значи да познавање стања система $\mathcal{A}$ зависи од стања система $\mathcal{B}$ када би мерење било извршено на систему $\mathcal{B}$. Формално, то значи примену 1-димензионалних ортогоналних пројектора $\{\hat{\Pi}_i^B\}$ који делују у простору стања система $\mathcal{B}$. Ако би био познат

---

[4] Под носачем оператора се подразумева векторски простор ортогоналан на кернел оператора. У случају ермитског оператора, носач чини векторски простор чији базис чине својствени вектори ермитског оператора.

резултат мерења који одговара $\hat{\Pi}_i^B$ на систему $\mathcal{B}$, стање сложеног система би онда било:

$$\hat{\rho}_{A|\hat{\Pi}_i^B} = \frac{1}{p_i}\hat{\Pi}_i^B \hat{\rho}_{AB}\hat{\Pi}_i^B, \tag{2.21}$$

где је $p_i = tr(\hat{\Pi}_i^B \hat{\rho}_{AB})$ вероватноћа мерења i-те својствене вредности неке опсервабле система $\mathcal{B}$.

Генералисани израз за условну ентропију се онда добија усредњавањем ентропије по стањима након мерења, тј.:

$$S(\hat{\rho}_A|\{\hat{\Pi}_i^B\}) = \sum_i p_i\, S(\hat{\rho}_{A|\hat{\Pi}_i^B}). \tag{2.22}$$

Други квантни израз за условну ентропију, дакле, даје меру класичне информације о систему $\mathcal{A}$ која се може добити у зависности од мерења на систему $\mathcal{B}$. Израз "класична информација" је оправдан изразом за условну ентропију:

$$\mathcal{J}_{A:B}(\hat{\rho}_{AB})_{\{\Pi_i^B\}} = S(\hat{\rho}_A) - S(\hat{\rho}_A|\{\hat{\Pi}_i^B\}), \tag{2.23}$$

и зависи не само од заједничког стања $\hat{\rho}_{AB}$, него и од могућих мерења на систему $\mathcal{B}$, формално означених као скуп пројектора $\{\hat{\Pi}_i^B\}$. Тако, израз $S(\hat{\rho}_A|\{\hat{\Pi}_i^B\})$ говори о квантним корелацијама и о информацији која се добија о подсистему $\mathcal{A}$ мерењем на подсистему $\mathcal{B}$. $S(\hat{\rho}_A)$ се односи на укупну информацију која се може имати о подсистему $\mathcal{A}$. Дакле, разлика двеју последњих величина говори о класичним корелацијама између система $\mathcal{A}$ и система $\mathcal{B}$, односно класичној информацији која се добија на подсистему $\mathcal{A}$. Будући да мерење у класичној физици не мења стање система, $\mathcal{J}_{A:B}(\hat{\rho}_{AB})_{\{\hat{\Pi}_i^B\}}$ ће имати већу вредност, што је умањилац у последњем изразу (2.23) мањи, односно за избор пројектора $\{\hat{\Pi}_i^B\}$ који га минимизују.

Разлика између квантно-механичих генерализација израза за међусобну информацију даје меру некласичних корелација које постоје у заједничком стању. Ова разлика зависи од пројектора изабраних у изразу за $\mathcal{J}$, и како је речено, од интереса је максимална вредност ове величине. Отуда се квантни дискорд дефинише као минимум по свим могућим изборима за пројекторе (стрелица показује здесна на лево, што говори о информацији која би се добила мерењем на подсистему $\mathcal{B}$) [23, 24]:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leftarrow}_{A:B}(\hat{\rho}_{AB}) &\equiv \min_{\{\hat{\Pi}_i^B\}} [\mathcal{I}_{A:B}(\hat{\rho}_{AB}) - \mathcal{J}_{A:B}(\hat{\rho}_{AB})] \\ &= \min_{\{\hat{\Pi}_i^B\}} \left[S(\hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB}) + \sum_i p_i S(\hat{\rho}_{A|\hat{\Pi}_i^B}) \right] \end{aligned} \tag{2.24}$$

што је, у ствари, процедура оптимизације. Ово је, у исто време, слабо место дефиниције квантног дискорда и разлог што је аналитички израз за дискорд познат само за неке једноставније дводелне системе – у осталим случајевима, квантни дискорд се рачуна нумеричким методама [25].

Нека својства квантног дискорда су:

А. Квантни дискорд је не-негативна величина, тј. $\mathcal{D}^{\leftarrow}_{A:B}(\hat{\rho}_{AB}) \geq 0$.

Б. За стање $\hat{\rho}_{AB}$, $\mathcal{D}^{\leftarrow}_{A:B}(\hat{\rho}_{AB}) = 0$ акко постоји скуп ортогоналних пројектора $\{\hat{\Pi}_i^B\}$ који делују на простору стања система B таквих да

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_i \hat{\Pi}_i^B \hat{\rho}_{AB} \hat{\Pi}_i^B = \sum_i \hat{\tau}_i \otimes \hat{\Pi}_i^B \tag{2.25}$$

где $\hat{\tau}_i = tr_B[\hat{\Pi}_i^B \hat{\rho}_{AB} \hat{\Pi}_i^B]$.

В. Квантни дискорд је не-симетрична величина, тј. вредности дискорда зависе од тога одакле потиче класична информација, која би се физички могла добити мерењем на једном подсистему: $\mathcal{D}^{\leftarrow}_{A:B} \neq \mathcal{D}^{\rightarrow}_{A:B}$.

Г. Квантни дискорд је инваријантан на деловање локалних унитарних операција $\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B$ јер се дефиниција дискорда базира не дефиницији ентропије која је унитарно инваријантна.

Д. За чиста стања, квантни дискорд је исто што и фон Нојманова ентропија сплетености тог стања.

Ђ. Вредност квантног дискорда је ограничена одозго вредношћу фон Нојманове ентропије за систем на коме је извршено мерење.

Докази горњих особина се могу наћи у, на пример, [26].

Дакле, квантни дискорд, као врста квантних корелација у дводелном систему, је последица тога да је немогуће мерити опсерваблу (под)система а да квантно стање не буде промењено. Стога се, стање које је записано у тачки 2, горе, назива потпуно класичним стањем (*C-C state*):

$$\hat{\rho}_C = \sum_i p_i \hat{\Pi}_i^A \otimes \hat{\Pi}_i^B \tag{2.26}$$

јер дискорд је нула, а $\hat{\Pi}_i^A$ и $\hat{\Pi}_i^B$ чине комлетан скуп ортогоналних пројектора што осигурава могућност неселективног мерења на подсистемима $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$ за целину у стању (2.26) тако да стање целине буде нетакнуто.

Како је дискорд као мера несиметричан, могу се дефинисати следећа стања са ненултим дискордом:

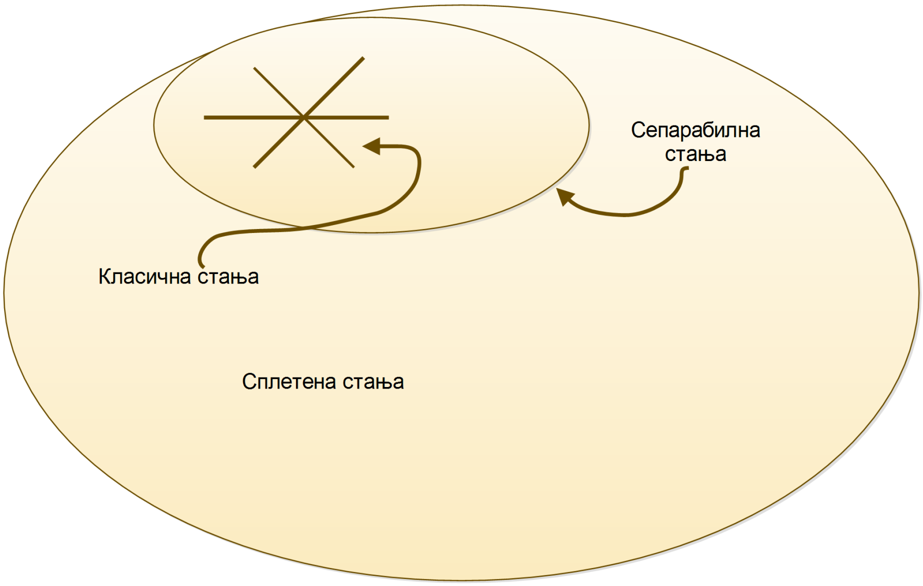
$$\hat{\rho}_C = \sum_i p_i \hat{\Pi}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B \tag{2.27}$$

$$\hat{\rho}_C = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\Pi}_i^B \tag{2.28}$$

што су тзв. класично-квантна (*C-Q state*) и квантно-класична стања (*Q-C state*), редом. Ова стања, заједно са стањем (2.26) садржана су у скупу квантних сепарабилних стања (в. Деф.2.1):

$$\hat{\rho}_C = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B. \tag{2.29}$$

На слици 2.1 графички је приказан однос стања о којима је до сада било речи.



Слика 2.1: Велика елипса представља скуп свих стања са скупом сепарабилних стања у мањој елипси. Линије представљају скуп класично корелисаних стања (у различитим базисима). Тачка где се линије секу представља максимално мешано стање које је класично у било ком базису. На крајевима линија су чиста сепарабилна стања. Сва стања која нису на овим линијама имају не-нулти квантни дискорд.

На основи својства **B**., горе, и израза (2.24), јасно је да важи $\mathcal{D}^{\leftarrow}_{A:B} = \mathcal{D}^{\rightarrow}_{B:A}$ и дискорд о коме је до сада било речи назива се једнострани дискорд (*one-way discord*). Блиско повезана мера корелација са једностраним дискордом је тзв. двострани дискорд (*two-way discord*) дефинисан као $\mathcal{D}^{\leftrightarrow}_{A:B} = \max\{\mathcal{D}^{\leftarrow}_{A:B}, \mathcal{D}^{\rightarrow}_{A:B}\}$. Дводелно стање не садржи никакве квантне корелације ако важи $\mathcal{D}^{\leftrightarrow}_{A:B} = 0$, односно ако је облика (2.26).

Квантни дискорд диускутован до сада је уско повезан са процесом квантног мерења. Поред тако дефинисаног квантног дискорда, постоје алтернативне дефиниције које се заснивају на “релативном растојању” (дефинисаном преко одговарајуће норме) између стања у Хилбертовом простору. То су тзв. *distance-based* мере некласичних корелација. Неке од њих су: дискорд заснован на релативној ентропији (*Relative entropy-based discord*) и геометријски дискорд (*Square norm-based discord* или *geometric discord*) [25]. У овом Раду ће од интереса бити квантни дискорд дефинисан изразом (2.24).

3

Основни појмови и методи квантне теорије отворених система

Традиционално квантна механика везује се за Шредингерову једначину [11]:

$$\imath\hbar\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)], \tag{3.1}$$

којом се описује еволуција у времену физичког система. Горња једначина позната је и под именом Лиувиј-фон Нојманова једначина (*Liouville*), при чему је $\hat{H}(t)$ хамилтонијан система, $\hat{\rho}(t)$ статистички оператор система ("матрица густине") а $\imath$ и $\hbar$ су константе: имагинарна јединица и редукована Планкова (*Planck*) константа, $\hbar = h/2\pi$. Горе записана једначина је Шредингерова једначина за статистички оператор, док је њен облик за чисто стање дат еквивалентном нестационарном Шредингеровом једначином:

$$\imath\hbar\frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle. \tag{3.2}$$

У овом Раду ће од интереса бити општији запис (3.1) и под називом Шредингерова једначина увек ће се подразумевати једначина (3.1).

Шредингерова једначина је, заправо, закон кретања квантне механике и као што је познато, односи се на изоловане (*isolated*) системе. У овом Раду, од интереса ће бити изоловани (сложени) системи који су описани временски независном (стационарном) Шредингеровом једначином са одговарајућим временски независним хамилтонијаном:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{ext}, \tag{3.3}$$

где је $\hat{H}_0$ "сопствени" хамилтонијан, а $\hat{V}_{ext}$ је интеракциони потенцијал (спољашње (*external*) поље) система. Поред изолованих система, од интереса су и сложени системи где је $\hat{V}_{ext} = 0$ за које је у овом Раду резервисан термин "затворени" (*closed*) квантни системи (наравно, између конституената могу постојати интеракције)[1] – што значи да су затворени

---

[1] Уз напомену да у литератури не постоји усаглашеност у употреби термина "изолован" и "затворен":

квантни системи специјалан случај изолованих квантних система.

Изоловани и затворени квантни систем могу се, алтернативно, дефинисати као системи чија динамика се описује Шредингеровом једначином, временски зависном и временски независном, респективно.

Дакле, Шредингерова једначина се тиче изолованих и затворених система [19] а динамика (3.1) има еквивалентни "интегрални" облик:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t - t_0, t_0)\hat{\rho}(t_0)\hat{U}(t - t_0, t_0)^{\dagger}, \tag{3.4}$$

где је $\hat{U}(t-t_0, t_0)$ унитарни оператор временске еволуције – у случају временски независног хамилтонијана дат изразом:

$$\hat{U}(t - t_0) = e^{-\frac{\imath(t-t_0)}{\hbar}\hat{H}}, \tag{3.5}$$

а $\hat{\rho}(t_0)$ је статистички оператор (стање система) у почетном временском тренутку t_0.

Као једна од физичких ситуација где је стандардна квантна механика примењена јесте зрачење атома – најпознатији је, свакако, водоников атом и његов спектар. Енергијски нивои за релативну честицу R и одговарајућа стања се добијају решавањем стационарне Шредингерове једначине (в. Увод у квантне структуре физичких система):

$$\hat{H}_R|nlm_l\rangle_R = E_n|nlm_l\rangle_R, \tag{3.6}$$

где су nlm одговарајући квантни бројеви (а стање са квантним бројем $n = 1$ је основно стање док су остала стања побуђена).

Будући да су стања R подсистема стационарна[2], релативна честица са енергијом E_n и у стању $|nlm_l\rangle_R$ би требало и да остане у том стању. Али, експеримент показује другачије: атом се деекситује, тј. релативна честица прелази са побуђеног на основно стање. Поставља се питање зашто је тако, имајући у виду једначину (3.6) која се односи на затворен систем, односно атом у овом случају. Проблем који је истакнут је познат под називом "проблем стабилности атома" [11, 19].

Одговор је на неки начин очигледан: *атом водоника није затворен.* Горе није наглашено, али подразумева се да горе поменута деекситација се одвија спонтано, у смислу да *не мора бити* других физичких система у близини, или у контакту са атомом.

Заправо, атом је *отворени* (*open*) систем у непрестаној интеракцији са квантним вакуумом (електромагнетног поља), а као последица тога дешавају се "скокови у еволуцији" – еволуција није унитарна [19] већ је споља изазвана вакуумом (прецизније: тзв. квантним флуктуацијама вакуума). Како вакуум није подсистем атома, атом се не може сматрати затвореним, нити се може описати Шредингеровом једначином (3.6) за унутрашње (релативне) степене слободе.

Појам отворености је у средишту наших разматрања, па је на реду формална дефиниција отворености квантног система [11]:

неки аутори ове термине поистовећују, неки им дају значење супротно од наведеног у овој глави, док се код неких могу наћи дефиниције које су на неки начин својеврсна мешавина овде усвојених.

[2] Прецизније, стационарно стање је облика $|\psi_n(t)\rangle = e^{-\frac{\imath}{\hbar}E_n t}|\psi_n\rangle$. Одговарајућа вероватноћа се тиче квадрата модула таласне функције $|\psi_n(t)|^2 = |\psi_n|^2$, односно не зависи од времена.

Дефиниција 3.1. *Физички систем који је у непрекидном и неизбежном деловању са било којим другим физичким системом не може се динамички описати Шредингеровим законом, те се назива отвореним квантним системом.*

Горња дефиниција је, на неки начин, правило у квантној теорији: сви реални системи су отворени. Отворени квантни систем *интерагује* са физичким системима изван себе, али та интеракција се *не може* свести на спољашње поље које се појављује у хамилтонијану (3.3), било оно временски зависно или не (в. даље) – извор поља није динамички систем.

Са методске тачке гледишта, отворени систем има особину да му се не може једнозначно приписати хамилтонијан (док је у случају изолованог (затвореног) система то могуће). То се види из израза (1.8), који је парадигматичан. Наиме, из (1.8), непосредно следи да диференцијална једначина, нпр. за $\vec{p}_e$ има чланове који садрже и $\vec{r}_p$. То јест, динамичка једначина не може се изразити преко оператора који би зависио само од опсервабли електрона – аналогно важи и за протон.

Тако, постаје јасно да за отворене квантне система никада не важи Шредингерова једначина, те да је динамика отворених система неунитарна.

Један стандардни пример отвореног система је тзв. Браунова (*Brown*) честица: честица полена бачена у воду, врши насумично, цик-цак кретање. Такво кретање је Ајнштајн (*Einstein*) 1905. године објаснио као последицу честичне структуре материје [11], односно непрестане интеракције молекула воде са честицом полена. Овде је јасно да је Браунова честица не-изоловани, тј. отворени, систем – Браунова честица је у сталним сударима са молекулима воде, који чине њено окружење.

Други, такође стандардни, пример за отворени квантни систем јесте објекат квантног мерења [11].

Посматрајмо фотон (индекс f) који пада на полупропусно огледало (индекс o), масе M, што значи да фотон може да се одбије, али и да прође кроз огледало. Ако је фотон прошао кроз огледало, његов импулс није се променио. Ако се фотон одбио, онда огледало трпи узмак, тако да је укупни импулс сачуван. Овим двема ситуацијама одговарају стања $|\vec{p}\rangle_f|0\rangle_o$ и $|\vec{p'}\rangle_f|\vec{p''}\rangle_o$, редом, тако да важи, на основи закона одржања импулса:

$$\vec{p'} + \vec{p''} = \vec{p}. \tag{3.7}$$

Како је огледало полупропусно, укупно стање је сплетено:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{p}\rangle_f|0\rangle_o + |\vec{p'}\rangle_f|\vec{p''}\rangle_o). \tag{3.8}$$

Закон одржања кинетичке енергије гласи:

$$\frac{\vec{p'}^2}{2m} + \frac{\vec{p''}^2}{2M} = \frac{\vec{p}^2}{2m}. \tag{3.9}$$

У лимесу $M \to \infty$ други члан у (3.9) тежи нули, па следи

$$p' \to p.$$

Сменом последњег израза у леву страну (3.7) добија се

$$|\vec{p'} + \vec{p''}| \leq p' + p'' \approx p + p'', \tag{3.10}$$

тј. $p'' \to 0$, односно огледало не трпи узмак: његово стање се не мења. У овом лимесу стање (3.8) постаје:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{p}\rangle_f + |\vec{p'}\rangle_f)|0\rangle_o. \tag{3.11}$$

Када фотон пада на полупропусно огледало разликују се две физичке ситуације: а) огледало услед судара трпи узмак па се фотон тада мора сматрати отвореним квантним системом који интерагује са својим окружењем (у овом случају са огледалом, које и само трпи динамичку промену стања) и б) огледало је непомично и појављује се као “спољашње поље” за фотон [19].

Као још један пример за отвореност/затвореност физичког система може послужити атом у јаком ласерском пољу – ситуација је у неку руку комплементарна претходно дискутованој за фотон и огледало. Наиме, стање атома и поља може се описати следећим сплетеним стањем:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{\text{атом}}|n+1\rangle_{\text{поље}} + |1\rangle_{\text{атом}}|n\rangle_{\text{поље}}), \tag{3.12}$$

где су $|0\rangle_{\text{атом}}$ и $|1\rangle_{\text{атом}}$ основно и побуђено стање атома, редом, а $|n+1\rangle_{\text{поље}}$ и $|n\rangle_{\text{поље}}$ означавају стања поља са $n+1$, односно n фотона.

Будући да је од интереса јако ласерско поље, стања поља $|n\rangle$ и $|n+1\rangle$ су практично (мерски) неразличива па стање (3.12) може се записати као:

$$|\Psi\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{\text{атом}} + |1\rangle_{\text{атом}})|n\rangle_{\text{поље}}, \tag{3.13}$$

из чега је јасно да је сада стање система “атом+поље” тензорски производ стања подсистема, односно нема корелација: атом се понаша као приближно затворени систем. Са друге стране, стање ласерског поље се ефективно не мења, односно понаша се као класично, тј. спољашње поље, слично полупропусном огледалу из претходног примера. Зато се за овакву динамику каже и да је хибридна, односно “класично-квантна” – ласер је извор *класичног* електромагнетног поља, за атом који је изолован систем.

У класичној (термодинамички равнотежној) статистичкој физици, од теоријског интереса је микроканонски ансамбл који представља изоловани, конзервативни систем. Из поставке микроканонског ансамбла онда се, на пример, изводи канонска расподела, која се тиче отвореног система који размењује енергију са својим окружењем (резервоаром) [27].

Формални запис отворености квантног система, у Хамилтоновом формализму, може се дати кроз једнакост:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{V}_{int}, \tag{3.14}$$

где су $\hat{H}_S \equiv \hat{H}_S \otimes \hat{I}_E$ и $\hat{H}_E \equiv \hat{I}_S \otimes \hat{H}_E$ “сопствени” хамилтонијани међусобно неинтерагујућих (под)система $\mathcal{S}$ (“*system*”) и остатка који се уобичајено назива окружењем $\mathcal{E}$ (“*environment*”), док $\hat{V}_{int} \equiv \hat{V}_{S+E}$ је интеракциони члан који се *не може свести на потенцијал* $\hat{V}_{ext}$ који се појављује у (3.3). Као што је речено испод Дефиниције 3.1, подсистем $\mathcal{S}$ (као и $\mathcal{E}$), нема једнозначно дефинисан хамилтонијан, што је последица $\hat{V}_{int} \neq 0$ и $\hat{V}_{int}$ није сводиво на спољашње поље. Ово исто исказано је математичким језиком као што следи.

Интеракција у (3.14) је "двочестична опсервабла", док је "спољашње поље" у (3.3) "једночестична опсервабла" што се формално исказује на следећи начин:

А. Изоловани квантни систем: $\hat{V}_{ext} = V(\hat{\vec{r}}_{Si}, \hat{\vec{p}}_{Si}; a_j; A_k)$,

Б. Отворени квантни систем: $\hat{V}_{int} = V_{int}(\hat{\vec{r}}_{Si}, \hat{\vec{p}}_{Si}; \hat{\vec{r}}_{Ej}, \hat{\vec{p}}_{Ej}; a_k; A_l)$.

где су a и A физички параметри који се тичу система ($\mathcal{S}$) и окружења ($\mathcal{E}$), редом. Као што се види, фраза "једночестична опсервабла" говори о томе да $\hat{V}_{ext}$ делује само на Хилбертовом простору подсистема $\mathcal{S}$ и према томе адитивни је део хамилтонијана система. Са друге стране, фраза "двочестична опсервабла" говори о томе да хамилтонијан делује на Хилбертовом простору (сада отвореног) система и окружења. Другим речима, окружење је динамички систем, то јест, његово стање се мења услед интеракције са квантним системом којег, због тога, називамо отвореним. Као целина, ($\mathcal{S} + \mathcal{E}$) представља изоловани, конзервативни систем чији хамилтонијан: (а) је једнозначно дефинисан, и (б) не зависи експлицитно од времена, тј. $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$.

Међутим, иако је са горњим 1. и 2. прецизно, математички, дата разлика спољашњег поља и интеракционог хамилтонијана, физички, у том погледу, ситуација у сложеном систему не мора увек бити јасна. Као илустрација може послужити α-распад [11].

Наиме, ефекат се моделује слободном α-честицом у потенцијалној јами, што значи да се међуделовање α-честице са осталим нуклеонима у језгру моделује као спољашње (временски независно) поље. Наравно, следећи корак је решавање временски независне Шредингерове једначине и прорачун вероватноће да α-честица напусти јаму. Са друге стране, очекује се постојање квантних корелација због идентичности честица и Кулонове и јаке нуклеарне интеракције у језгру, из чега би следило да је α-честица отворени квантни систем. Међутим, успешност моделовања тунеловања говори да се поменуте интеракције у језгру ("двочестичне опсервабле") ефективно своде на спољашње поље, односно потенцијалну јаму за α-честицу.

И ту се појављује фундаментални физички проблем: под којим условима међуделовање у сложеном систему може се свести на спољашње поље за посматрани подсистем? За сада, може се рећи: не постоји општи резултат који би успоставио када интеракциони члан из израза (3.14) постаје спољашње поље из израза (3.3). Другим речима, то је питање о отворености/изолованости (под)система, тј. о непостојању критеријума за разликовање тих двеју физичких ситуација.

Са (3.14) истакнут је само један од могућих приступа у теорији отворених квантних система: "систем+окружење" ($\mathcal{S} + \mathcal{E}$) приступ. Поред овог приступа, вреди истаћи да постоје још два: приступ који користи модификоване методе квантизације класичних дисипативних система [28] и приступ преко тзв. стохастичке Шредингерове једначине за вектор стања [12, 28]. Општи закључак је да приступ преко квантизације не даје конзистентне резултате, као и да репродукује познате резултате за врло ограничен број случајева (као што су слабо пригушени линеарни системи) а теоријске основе самог приступа нису сасвим утемељене [28]. Што се другог приступа тиче, он је заснован на разним модификацијама Шредингерове једначине. У овом приступу неунитарна динамика се интерпретира у терминима фундаменталних стохастичких процеса у Хилбертовом простору, а да би се задржала стандардна правила теорије вероватноће, одговарајућа једначина кретања постаје неизбежно нелинеарна [28]. Добра страна овог приступа је то што је нумерички супериоран у односу на друге приступе у теорији отворених квантних система. Слаба страна је што модификације Шредингерове једначине морају бити "уписане руком", што уноси извесну меру произвољности у моделовање.

У овом Раду ће од интереса искључиво бити приступ $\mathcal{S}+\mathcal{E}$, који не уводи нове претпоставке у односу на стандардну квантну механику, већ се ослања на хипотезу универзалног важења Шредингеровог закона за целину $\mathcal{S}+\mathcal{E}$. Поред тога што је овакав приступ минималистички, он има потпору у теорему познатим под називом Стинеспрингов (*Stinespring*) теорем. У основи, теорем говори о томе да се сваки отворени систем може допунити "додатним" системом, тако да заједно образују изоловани и конзервативни систем, за који по дефиницији важи Шредингеров закон (в. теорем 3.2.1 у [13]).

Вреди истаћи да у оквиру парадигме $\mathcal{S}+\mathcal{E}$ постоје два формализма: ортодоксни и формализам мастер једначина. Први поменути је базиран на унитарном оператору за целину $\mathcal{S}+\mathcal{E}$, једначина (3.4): моделски је независан, али не пружа увид у детаље динамике. У оквиру другог формализма разликују се две групе мастер једначина по начину извођења: мастер једначине које се добијају применом Накаџиме-Цванциг пројекционог метода (в. Одељак 3.3) и мастер једначине које се добијају у оквирима тзв. метода "интеграције по путу" (за детаље видети [11]) при чему је за обе групе мастер једначина карактеристична изразита моделска зависност.

3.1 Динамика квантног подсистема

Нека је динамика сложеног система $\mathcal{S}+\mathcal{E}$ описана унитарном еволуцијом, једначина (3.4). Тада се динамка подсистема $\mathcal{S}$, у тренутку t_1, дефинише операцијом парцијалног трага по степенима слободе окружења, tr_E:

$$\hat{\rho}_S(t_1) = tr_E[\hat{U}(t_1,t_0)\hat{\rho}_{S+E}(t_0)\hat{U}^\dagger(t_1,t_0)], \tag{3.15}$$

при чему је t_0 почетни тренутак. Еквивалентан запис, у диференцијалној форми, који одговара (3.15) гласи:

$$\imath\hbar\frac{d\hat{\rho}_S(t)}{dt} = tr_E[\hat{H}(t),\hat{\rho}_{SE}(t)], \tag{3.16}$$

где је $\hat{\rho}_S(t) = tr_E\hat{\rho}_{SE}(t)$ статистички оператор подсистема $\mathcal{S}$.

Интегрални облик закона кретања (3.15) уобичајено се записује у облику:

$$\mathcal{E}_{(t_1,t_0)} : \hat{\rho}_S(t_0) \to \hat{\rho}_S(t_1). \tag{3.17}$$

Динамичка мапа $\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}$ [13] из (3.17), делује над Банаховим простором стања[3] подсистема $\mathcal{S}$, $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_S)$, којег чине ермитски оператори са коначном траг-нормом, $\|\cdot\|_1$, дефинисаном на следећи начин:

$$\|\hat{A}\|_1 = tr\sqrt{\hat{A}^\dagger\hat{A}} = tr\sqrt{\hat{A}^2},$$

за произвољни оператор $\hat{A}$, $\hat{A}\in\mathfrak{B}$.

Квантна стања отвореног система, репрезентована одговарајућим статистичким оператором, такође припадају овом Банаховом простору, при чему за њих важе додатни

---

[3] Банахов (*Banach*) простор је комплетан нормиран линеаран простор. Сваки Хилбертов простор је истовремено Банахов простор али обратно не важи.

услови:

$$\hat{\rho} \geq 0 \text{ и } \|\hat{\rho}\|_1 = 1.$$

Тај подскуп линеарних оператора означава се ознаком $\mathfrak{B}^+$ и при томе важи $\mathfrak{B}^+ \subset \mathfrak{B}$.

Линеарне мапе које делују на Банаховом простору $\mathcal{E}(\mathfrak{B}) : \mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}$, по дефиницији чине дуални простор $\mathfrak{B}^*$ са индукованом нормом:

$$\|\mathcal{E}\|_1 = \sup_{\hat{\rho} \in \mathfrak{B}, \hat{\rho} \neq 0} \left\{ \frac{\|\mathcal{E}(\hat{\rho})\|_1}{\|\hat{\rho}\|_1} \right\}.$$

Мапа дефинисана изразом (3.17), у општем случају, зависи од унитарног оператора сложеног система, особина подсистема $\mathcal{E}$, али и од особина подсистема $\mathcal{S}$, што је исказано следећим теоремом [13, 29, 30]:

Теорем 3.1. *Најопштији облик временске еволуције (динамике) квантног стања* $\hat{\rho}_S$ *отвореног система дат је (неједнозначним) изразом*

$$\hat{\rho}_S(t_1) = \sum_{\alpha} \hat{K}_{\alpha} \left(t_1, t_0, \hat{\rho}_S(t_0)\right) \hat{\rho}_S(t_0) \hat{K}^{\dagger}_{\alpha} \left(t_1, t_0, \hat{\rho}_S(t_0)\right), \tag{3.18}$$

где су $\hat{K}_{\alpha} \left(t_1, t_0, \hat{\rho}_S\right)$ *оператори који зависе од стања* $\hat{\rho}_S$ *у временском тренутку* t_0.

Динамика описана једнакошћу (3.18) може, али не мора, представљати физичку еволуцију квантног стања, што потиче од чињенице да динамичка мапа представљена изразом (3.17) не мора да чува позитивност (односно да пресликава статистичке (позитивне) операторе у статистичке операторе) и јединични траг статистичког оператора – тада се каже да мапа није "позитивна".

У позадини зависности горњих оператора $\hat{K}_{\alpha}$ у (3.18) од почетног стања $\hat{\rho}_S(t_0)$ је, у принципу дозвољено, постојање квантних корелација у почетном временском тренутку између подсистема $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ (видети Главу 2). Зато се разматра посебна врста динамичких мапа – *универзалне динамичке мапе* (УДМ) у којима нема зависности од почетног стања [13]. За такве мапе важи теорем:

Теорем 3.2. *Динамичка мапа је универзална акко нема почетних корелација између подсистема* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{E}$, *тј.* $\hat{\rho}_{S+E}(t_0) = \hat{\rho}_S(t_0) \otimes \hat{\rho}_E(t_0)$ *где је* $\hat{\rho}_E(t_0)$ *исто за свако стање* $\hat{\rho}_S(t_0)$.

Поред тога што су УДМ линеарне и позитивне мапе, оне имају још једно важно математичко својство. Наиме, нека је $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ систем део неког већег система $\mathcal{S} + \mathcal{E} + \mathcal{W}$, при чему $\mathcal{W}$ *не интерагује* са $\mathcal{S} + \mathcal{E}$. Нека је еволуција подсистема $\mathcal{S}$ описана УДМ-ом. Тада горњи теорем имплицира да је у почетном временском тренутку t_0, $\hat{\rho}_{S+E}(t_0) = \hat{\rho}_S(t_0) \otimes \hat{\rho}_E(t_0)$, па је, последично, за проширени систем стање облика $\hat{\rho}_{S+E+W}(t_0) = \hat{\rho}_{S+W}(t_0) \otimes \hat{\rho}_E(t_0)$, где је $\hat{\rho}_E(t_0)$ исто за било које $\hat{\rho}_{S+W}(t_0)$. Динамика подсистема $\mathcal{S} + \mathcal{W}$ је тада дата изразом:

$$\hat{\rho}_{S+W}(t_1) = tr_E \Big[\hat{U}_{S+E}(t_1, t_0) \otimes \hat{U}_W(t_1, t_0) \hat{\rho}_{S+W}(t_0) \otimes \hat{\rho}_E(t_0) \\ \hat{U}^{\dagger}_{S+E}(t_1, t_0) \otimes \hat{U}^{\dagger}_W(t_1, t_0) \Big].$$

Користећи спектралну форму статистичког оператора $\hat{\rho}_E(t_0) = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ следи

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{S+W}(t_1) &= \sum_\alpha \hat{K}_\alpha\,(t_1, t_0) \otimes \hat{U}_W(t_1, t_0) \hat{\rho}_{S+W}(t_0) \hat{K}^\dagger_\alpha\,(t_1, t_0) \otimes \hat{U}^\dagger_W(t_1, t_0) \\ &= \mathcal{E}_{(t_1,t_0)} \otimes \mathcal{U}_{(t_1,t_0)} \left[\hat{\rho}_{S+W}(t_0)\right], \end{aligned} \tag{3.19}$$

где је $\alpha = \{i, j\}$, $\hat{K}_{\{i,j\}}(t_1, t_0) = \sqrt{\lambda_i}\langle\psi_j|\hat{U}_{S+E}(t_1, t_0)|\psi_i\rangle$. У (3.19) $\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}$ је динамичка мапа подсистема $\mathcal{S}$ а мапа $\mathcal{U}_{(t_1,t_0)}[\cdot] = \hat{U}_W(t_1, t_0)[\cdot]\hat{U}^\dagger_W(t_1, t_0)$ представља унитарну еволуцију подсистема $\mathcal{W}$. Дакле, динамика подсистема $\mathcal{S} + \mathcal{W}$ је тензорски производ засебних динамика, па ако је еволуција $\mathcal{S}$ подсистема УДМ, дата горњим теоремом 3.2, онда за произвољну унитарну еволуцију $\mathcal{U}_{(t_1,t_0)}$ следи да је и мапа $\mathcal{E}_{(t_1,t_0)} \otimes \mathcal{U}_{(t_1,t_0)}$ универзална динамичка мапа.

Речено се математички записује:

$$\mathcal{E}_{(t_1,t_0)} \otimes \mathcal{U}_{(t_1,t_0)} = \left[\mathcal{E}_{(t_1,t_0)} \otimes \mathcal{I}_W\right] \left[\mathcal{I}_S \otimes \mathcal{U}_{(t_1,t_0)}\right];$$

захтев за позитивношћу мапе $\mathcal{E}_{(t_1,t_0)} \otimes \mathcal{U}_{(t_1,t_0)}$ (јер $\mathcal{I} \otimes \mathcal{U}_{(t_1,t_0)}$ је унитаран оператор, отуда УДМ) намеће и да је $\mathcal{E}_{(t_1,t_0)} \otimes \mathcal{I}$ позитивна мапа. Мапе са оваквим својством називају се *комплетно позитивним мапама.* Уз захтев да чувају траг статистичког оператора, овакве мапе у литератури познате су под скраћеницом CPTP (*complete positive trace preserving*) мапе.

Будући да не може се унапред занемарити постојање система $\mathcal{W}$, јасна је физичка мотивација захтева да УДМ мора бити комплетно позитивно пресликавање, што је у складу са Постулатом о вероватноћама квантне механике [11, 19].

Услов почетног факторисаног стања, Теорем 3.2, је упрошћење реалних физичких ситуација, јер су квантне корелације *неизбежне* као последица међусобне интеракције система. Ипак, УДМ које су последица ове претпоставке могу довољно добро да опишу многе реалистичне физичке ситуације. Када је почетно стање корелисано, макар то биле само класичне корелације (в. Главу 2) [31], комплетна позитивност може бити под знаком питања.

Најопштији запис УДМ-а, у складу са Теоремом 3.2, дат је Краусовом декомпозицијом [12, 13, 15, 32], при чему нестаје зависност од почетног стања у изразу (3.18):

$$\hat{\rho}_S(t_1) = \mathcal{E}_{(t_1,t_0)}[\hat{\rho}_S(t_0)] = \sum_\alpha \hat{K}_\alpha\,(t_1, t_0)\,\hat{\rho}_S(t_0)\hat{K}^\dagger_\alpha\,(t_1, t_0)\,, \tag{3.20}$$

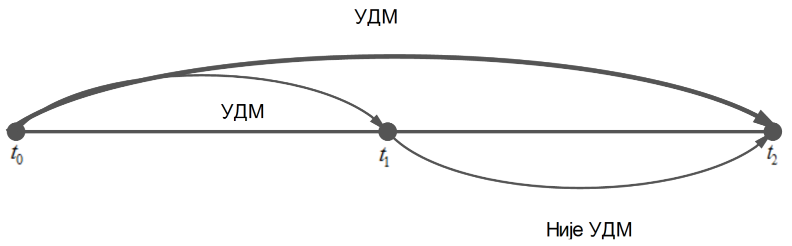
док услов комплетности

$$\sum_\alpha \hat{K}^\dagger_\alpha\,(t_1, t_0)\,\hat{K}_\alpha\,(t_1, t_0) = \hat{I}, \tag{3.21}$$

следи као последица услова сачувања трага $tr[\hat{\rho}_S(t_1)] = 1$, за свако почетно стање $\hat{\rho}_S(t_0)$, а $\hat{I}$ је идентични оператор на простору стања подсистема $\mathcal{S}$.

Дакле, УДМ су комплетно позитивне мапе које чувају траг статистичког оператора и могу бити формално записане кроз декомпозицију (3.20) – што је једна дефиниција УДМ-а. Поред тога што УДМ чувају траг оператора, оне морају да пресликавају скуп статистичких оператора у скуп статистичких оператора.

Будући да су од интереса УДМ-ови који остављају инваријантним потпростор $\mathfrak{B}^+$,



Слика 3.1: Ова слика показује особине УДМ.

следећа теорема показује се као важна за даља разматрања [13]:

Теорем 3.3. *Потпростор $\mathfrak{B}^+$ је инваријантан под дејством линеарне мапе $\mathcal{E}$ акко мапа чува траг оператора $\hat{\rho} \in \mathfrak{B}^+$ и има особину контрактивности на $\mathfrak{B}$, односно важи*

$$\|\mathcal{E}\|_1 \leq 1.$$

Особина контрактивности УДМ-а на Банаховом простору важна је, јер је кључни састојак доказа следеће теореме [13]:

Теорем 3.4. *За УДМ, $\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}$, постоји инверзно пресликавање акко је УДМ унитарна $\mathcal{E}_{(t_1,t_0)} = \mathcal{U}_{(t_1,t_0)}$.*

Физички, непостојање инверзног пресликавања за УДМ, у општем случају, одсликава *иреверзибилност динамике отвореног квантног система.*

Са друге стране, континуалност УДМ-ова у времену је део њихове дефиниције. Претпоставимо да је позната еволуција система између временских тренутака t_0 и t_1, $\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}$, и временских тренутака t_1 и t_2, $\mathcal{E}_{(t_2,t_1)}$. Поменута континуалност би онда значила да за целокупну еволуцију између тренутака t_0 и t_2, важи следећа релација: $\mathcal{E}_{(t_2,t_0)} = \mathcal{E}_{(t_2,t_1)}\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}$.

Међутим, ако је у почетном тренутку t_0 и био испуњен услов да нема корелација између отвореног система и окружења, не значи нужно да корелација неће бити у временском тренутку t_1, што значи да је нарушен услов да мапа буде УДМ, односно мапа $\mathcal{E}_{(t_2,t_1)}$ није УДМ. Графички су ове еволуције приказане на слици 3.1.

Чак ни дефинисањем ове мапе на следећи начин (ако је то могуће учинити за дату мапу):

$$\mathcal{E}_{(t_2,t_1)} = \mathcal{E}_{(t_2,t_0)}\mathcal{E}^{-1}_{(t_1,t_0)}, \tag{3.22}$$

проблем се не решава, јер иако је сада, формално, испуњено $\mathcal{E}_{(t_2,t_0)} = \mathcal{E}_{(t_2,t_1)}\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}$, по Теореми 3.4, $\mathcal{E}^{-1}_{(t_1,t_0)}$ није комплетно позитивна мапа осим ако је унитарна, па у општем случају мапа $\mathcal{E}_{(t_2,t_1)}$ није УДМ. Дакле, средња мапа *никада није егзактно УДМ.*

Посматрајмо сада унитарну еволуцију стања за целину између временских t_0 и t_2, са почетним стањем $\hat{\rho}_S(t_0) \otimes \hat{\rho}_E(t_0)$ тако да је за временски тренутак t_1 важи да је $t_0 \leq t_1 \leq t_2$.

Мапе за временске интервале $(t_0,\, t_1)$ и $(t_0,\, t_2)$ дате су на следећи начин:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_E \left[\hat{U}(t_j,t_0)\hat{\rho}_S(t_0) \otimes \hat{\rho}_E(t_0)\hat{U}^\dagger(t_j,t_0)\right] &= \mathcal{E}_{(t_j,t_0)}\,\hat{\rho}_S(t_0) \\ &= \hat{\rho}_S(t_j), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Да би нашли међумапу $\mathcal{E}_{(t_2,t_1)}$, искористићемо декомпозабилност унитарне еволуције $\hat{U}(t_2,t_0) = \hat{U}(t_2,t_1)\hat{U}(t_1,t_0)$:

$$\mathrm{tr}_E\left[\hat{U}(t_2,t_1)\left\{\hat{U}(t_1,t_0)\hat{\rho}_S(t_0)\otimes\hat{\rho}_E(t_0)\hat{U}^\dagger(t_1,t_0)\right\}\hat{U}^\dagger(t_2,t_1)\right] = \mathcal{E}_{(t_2,t_0)}\,\hat{\rho}_S(t_0). \tag{3.24}$$

Као што се види, ово не води релацији $\mathcal{E}_{(t_2,t_0)} = \mathcal{E}_{(t_2,t_1)}\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}$ за $\mathcal{E}$ мапу. Али, уводећи тзв. Борнову (*Born*) апроксимацију

$$\left\{\hat{U}(t_1,t_0)\hat{\rho}_S(t_0)\otimes\hat{\rho}_E(t_0)\hat{U}^\dagger(t_1,t_0)\right\}\approx\hat{\rho}_S(t_1)\otimes\hat{\rho}_E(t_1),$$

лева страна једначине (3.24) може се записати као:

$$\mathrm{tr}_E\left[\hat{U}(t_2,t_1)\hat{\rho}_S(t_1)\otimes\hat{\rho}_E(t_1)\hat{U}^\dagger(t_2,t_1)\right] = \mathcal{E}_{(t_2,t_1)}\,\hat{\rho}_S(t_1). \tag{3.25}$$

Даље, замењући $j = 1$ у (3.23) и користећи да $\hat{\rho}_S(t_0) = \mathcal{E}^{-1}_{(t_1,t_0)}\hat{\rho}_S(t_1)$ из (3.23), међумапа $\mathcal{E}_{(t_2,t_1)}$ постаје:

$$\mathcal{E}_{(t_2,t_1)} = \mathcal{E}_{(t_2,t_0)}\mathcal{E}^{-1}_{(t_1,t_0)}. \tag{3.26}$$

Другим речима, када окружење "не памти"[4], међумапа $\mathcal{E}_{(t_2,t_1)}$ је декомпозабилна, односно може се писати:

$$\mathcal{E}_{(t_2,t_0)} = \mathcal{E}_{(t_2,t_1)}\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}. \tag{3.27}$$

У овом случају $\mathcal{E}_{(t_2,t_1)}$ је комплетно позитивна мапа, односно УДМ.

На основи горе реченог следи дефиниција[5]:

Дефиниција 3.2. *Под квантним Марковљевим процесом подразумева се процес описан фамилијом динамичких мапа $\mathcal{E}_{(t_i,t_j)}$, таквих да важи услов разложивости мапе $\mathcal{E}_{(t_2,t_0)} = \mathcal{E}_{(t_2,t_1)}\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}$, $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, при чему је мапа $\mathcal{E}_{(t_2,t_1)}$ УДМ за сваки временски тренутак t_1.*

Другачије речено, Марковљеве динамичке мапе имају особину разложивости и комплетне позитивности за било које интервале еволуције, али комплетно позитивне мапе не морају бити Марковљеве.

Горе поменута непрекидност динамичке мапе имплицира да се такве мапе могу довести у везу са одговарајућим диференцијалним једначинама; заправо, овакав исказ је упрошћење јер непрекидност је потребан, али не и довољан услов за диференцијабилност. Ипак, у пракси претпостставља се да је еволуција "довољна глатка" да има смисла говорити о диференцијабилности у коначном временском интервалу еволуције [13].

---

[4] Ова фраза значи да је у питању тзв. Марковљево окружење – видети дискусију везану за квантну Марковљеву мастер једначину (3.32).

[5] Ова дефиниција заправо је квантна варијанта основног услова у класичној теорији Марковљевих процеса – тзв. Чепмен-Колмогорвљевог (*Chapman, Kolmogorov*) услова. Овај услов је минимални услов дефинисања марковљевости, како у квантној тако и у класичној теорији.

Ако је тако, узмимо у $\mathcal{E}_{(t_2,t_0)}$, без губљења општости, да је $t_2 = t$ и $t_0 = 0$ и посматрајмо разлику

$$\hat{\rho}(t+\epsilon) - \hat{\rho}(t) = (\mathcal{E}_{(t+\epsilon,0)} - \mathcal{E}_{(t,0)})\hat{\rho}(0) = (\mathcal{E}_{(t+\epsilon,t)} - 1)\mathcal{E}_{(t,0)}\hat{\rho}(0) = (\mathcal{E}_{(t+\epsilon,t)} - 1)\hat{\rho}(t),$$

при чему је искоришћена особина декомпозабилности Марковљеве мапе и подразумева се да је еволуција глатка, односно да лимес $\epsilon \to 0$ има смисла.

Одавде се може добити диференцијална једначина за стање квантног Марковљевог отвореног система, уз стандардну дефиницију извода по времену:

$$\frac{d\hat{\rho}_S(t)}{dt} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{\rho}_S(t+\epsilon) - \hat{\rho}_S(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{[\mathcal{E}_{(t+\epsilon,t)} - 1]}{\epsilon}\hat{\rho}_S(t) = \mathcal{L}_t\hat{\rho}_S(t), \tag{3.28}$$

где је, по дефиницији, генератор еволуције дат изразом:

$$\mathcal{L}_t = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{[\mathcal{E}_{(t+\epsilon,t)} - 1]}{\epsilon}. \tag{3.29}$$

Формално решење једначине (3.28) дато је следећом фамилијом динамичких мапа

$$\mathcal{E}_{(t_2,t_0)} = \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^{t_2}\mathcal{L}(t')dt'}, \tag{3.30}$$

где је $\mathcal{T}$ ознака за оператор временског уређења. У контексту марковљевости, динамика описана оваквом фамилијом мапа понекада се назива временски нехомогеном Марковљевом динамиком.

Ако је генератор еволуције временски независан, $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}$, онда решење диференцијалне једначине (3.28) је једнозначно и облика је $\mathcal{E}(t) = e^{\mathcal{L}t}$. Онда, таква динамика се, опет у контексту марковљевости, назива Марковљевом хомогеном динамиком. Оваква динамика подразумева хомогеност времена за подсистем[6], што значи да се фамилија динамичких мапа из Дефиниције 3.2 своди на полугрупу[7]. Наиме, хомогеност времена значи да почетни временски тренутак није важан – од интереса је само интервал времена па се

---

[6] Услов хомогености времена за подсистем није еквивалентан услову хомогености за затворен (тј. изолован, конзервативан) систем. Затворен систем је, по дефиницији, такав да је целокупни хамилтонијан експлицитно независан од времена. Међутим, последње речено је потребан, али није довољан услов за хомогеност времена за подсистем. Физички садржај, као и математички јасан услов, хомогености времена за подсистем није познат – он се само "руком уписује", тј. уводи као математичка претпоставка без физички јасног садржаја. Са друге стране, ако хамилтонијан целине експлицитно зависи од времена, онда се користи тзв. Флокеова (*Floquet*) теорија [12, 13].

[7] Фамилија линеарних оператора T_t ($t \geq 0$) на Банаховом простору чини једнопараметарску полугрупу ако важи ($\mathcal{I}$ је идентични оператор):

А. $T_t T_s = T_{t+s}, \quad \forall t, s$

Б. $T_0 = \mathcal{I}$.

може писати:

$$\mathcal{E}_{\mu+\nu} = \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\nu, \qquad \forall \mu, \nu \geq 0, \tag{3.31}$$

при чему инверзно пресликавање није нужно дефинисано (јер да јесте, онда би у питању била група).

Хомогени (једнопараметарски) Марковљеви процеси обухваћени су нехомогеним (двопараметарским) процесима, па стога у савременој литератури све више преовлађује став по коме марковљевост динамичке мапе подразумева важење Дефиниције 3.2.

3.2 Диференцијални облик закона кретања за Марковљеве процесе

Како је истакнуто у претходном одељку, динамичке фамилије, односно полугрупе које се тичу Марковљевих процеса генерисане су одговарајућим временски зависним, односно независним генераторима. Отуда је природно поставити питање: како изгледа генератор квантних Марковљевих процеса, $\mathcal{L}_t$ у (3.29)?

Одговор на горње питање даје следећи теорем [12, 13]:

Теорем 3.5. *Квантна мастер једначина је Марковљева акко може бити записана у облику ($\hbar = 1$)*

$$\frac{d\hat{\rho}_S(t)}{dt} = -i[\hat{H}(t), \hat{\rho}_S(t)] + \sum_k \gamma_k(t) \left[\hat{V}_k(t)\hat{\rho}_S(t)\hat{V}_k^\dagger(t) - \frac{1}{2}\{\hat{V}_k^\dagger(t)\hat{V}_k(t), \hat{\rho}_S(t)\} \right], \tag{3.32}$$

где су $\hat{H}(t)$ и $\hat{V}_k(t)$ временски зависни оператори, $\hat{H}(t)$ је ермитски оператор а $\gamma_k(t) \geq 0$ за свако k и t.

Оператор $\hat{H}(t)$ није само хамилтонијан квантног отвореног система $\mathcal{S}$, већ садржи у себи ренормализационе чланове као последицу интеракције отвореног система са окружењем - такозвани Лембов (*Lamb*) и Старков (*Stark*) померај, који потичу од окружења на $T = 0$, односно $T \neq 0$, редом. Оператори $\hat{V}_k(t)$ су тзв. Линдбладови (*Lindblad*) оператори, а $\gamma_k(t)$ су "функције пригушења", које се могу односити на процесе квантне дисипације или квантне декохеренције.

Ова квантна мастер [8] једначина позната је под називом *GKSL*[9] мастер једначина [13].

Дакле, марковљевост динамике изједначава се са следећим обликом генератора:

$$\mathcal{L}\hat{\rho}_S(t) = -i[\hat{H}(t), \hat{\rho}_S(t)] + \sum_k \gamma_k(t) \left[\hat{V}_k(t)\hat{\rho}_S(t)\hat{V}_k^\dagger(t) - \frac{1}{2}\{\hat{V}_k^\dagger(t)\hat{V}_k(t), \hat{\rho}_S(t)\} \right], \tag{3.33}$$

---

[8] Квантна мастер једначина је уопштење појма мастер једначине која се, пре свега, среће у класичној статистичкој физици. Квантна мастер једначина тиче се свих матричних елемената статистичког оператора, док се мастер једначина тиче само дијагоналних елемента у матрици статистичког оператора.

[9] По ауторима који су до ње дошли: *Gorini*, *Kossakowsk*i, *Sudarshan* и *Lindblad*.

односно облика

$$\mathcal{L}\hat{\rho}_S(t) = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_S(t)] + \sum_k \gamma_k \left[\hat{V}_k \hat{\rho}_S(t) \hat{V}_k^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{V}_k^\dagger \hat{V}_k, \hat{\rho}_S(t)\} \right], \tag{3.34}$$

где је (3.34) специјалан случај (3.33) када је време хомогено за подсистем и имамо хомогени Марковљев процес када генератор не зависи експлицитно од времена – квантна мастер једначина (3.34) позната је под називом Линдбладова квантна мастер једначина. Генератор (3.34) је инваријантан на унитарну трансформацију скупа Линдбладових оператора. То значи да трансформација: $\sqrt{\gamma_k}\hat{V}_k \to \sqrt{\gamma_k'}\hat{V}_k' = \sum_j u_{kj}\sqrt{\gamma_j}\hat{V}_j$ неће изменити облик (3.34).

У доказу теорема 3.5, који овде неће бити дат, кључна претпоставка је да су особине динамичке мапе исте за сваки тренутак t_1, $t_0 \leq t_1 \leq t_2$, односно да је стање целине облика $\hat{\rho}_S(t_1) \otimes \hat{\rho}_E(t_1)$. Ова апроксимација често је уносила забуну у анализу Марковљевих отворених квантних система јер се стицао утисак да целина мора бити у некорелисаном стању за сваки временски тренутак еволуције, односно да је интеракција система са окружењем слаба – што у општем случају не мора да важи. У наредном одељку ће бити истакнуто да се *GKSL* облик мастер једначине може добити у случају који је на неки начин комплементаран случају слабе интеракције, тзв. *singular coupling limit* [13].

Није наодмет подвући да се једначином (3.32) описује динамика отвореног система у лимесу слабе или јаке интеракције и да је као таква апроксимација *егзактне мастер једначине* (3.16).

Будући да је егзактна мастер једначина, у пракси, нерешива, квантна Марковљева мастер једначина је добродошла апроксимација јер израз (3.32) тиче се широког скупа диференцијалних једначина кретања за разноврсне физичке системе, од којих су многи темељно експериментално изучени: електромагнетно поље у шупљини, стимулисано и спонтано зрачење атома [33], на пример.

На слици 3.2 приказан је однос еволуција за целину и подсистем, који важе универзално, без обзира да ли је у питању Марковљева динамика или не.

$$\begin{tikzcd}
\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E \arrow[r, "\text{Унитарна еволуција}"] \arrow[d, "tr_E"'] & \hat{\rho}(t) = \hat{U}(t,0)[\hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E]\hat{U}^{+}(t,0) \arrow[d, "tr_E"'] \\
\hat{\rho}_S(0) \arrow[r, "\text{Динамичка мапа}"'] & \hat{\rho}_S(t) = \mathcal{E}(t,0)\hat{\rho}_S(0) \arrow[d, Leftrightarrow] \\
& \frac{d\hat{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} tr_E[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]
\end{tikzcd}$$

Слика 3.2: Дијаграм показује однос еволуција за целину и за подсистем. Са десне стране, доле, назначена је еквиваленција закона кретања у интегралној и диференцијалној форми.

Могућа негативност $\gamma_k(t)$ функција у мастер једначини (3.32) значи да динамика није комплетно позитивна, па последично ни Марковљева, односно бар за неке временске тренутке је, како се каже, немарковљева. То је еквивалентно тврђењу да еволуција отвореног квантног система $\mathcal{E}_{(t_2,t_0)} = \mathcal{E}_{(t_2,t_1)}\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}$ из Дефиниције 3.2 нема особину комплетне позитивности за међумапу $\{\mathcal{E}_{(t_2,t_1)}, t_2 \geq t_1 \geq t_0\}$ за сваки тренутак t_1[10]. У овоме се види и мотивација дефинисања Марковљевих процеса преко двопараметарских фамилија – нису немарковљевски процеси искључиво они који су описани мастер једначинама са временски зависним γ_k како се често сматра(ло) у постојећој литератури. Што ће рећи, на немарковљевост гледа се као на својство динамике отвореног квантног система које није стриктно повезано са самим обликом мастер једначине. Овиме постаје јаснији интерес који постоји за, до сада представљено, аксиоматско, изучавање марковљевости, јер пружа путоказ ка питањима везаним за немарковљеву динамику, а све на ригорозним, математичким основама, в. нпр. [34]. У овом тренутку, динамике које нису Марковљеве тема су актуелних истраживања у теорији отворених квантних система, јер радна дефиниција (хипотеза) немарковављевости подразумева проток информација од и ка отвореном систему (супротно од Дефиниције 3.2), што је пресудно за понашање квантног хардвера и квантно-информатичке технологије засноване на томе.

У овом раду ће од интереса, поглавито, бити Марковљева динамика квантног система описива динамичком полугрупом, односно одговарајућим мастер једначинама које су записиве у горе поменутој Линдбладовој форми, са генератором (3.34).

Међутим, аксиоматски приступ успоставља математичку основу теорије отворених квантних система, али не пружа увид у детаље динамике (хамилтонијан, стање сложеног система, стање окружења, јачина интеракције са окружењем, температура окружења и др.) који су последица физичког моделовања. Прилаз који то омогућава базира на тзв. пројекционом методу Накаџиме-Цванцига који је представљен у наредном одељку.

3.3 Пројекциони метод Накаџиме-Цванцига

Метод који ће овде бити представљен увели су Накаџима [35] и Цванциг [36] а савремено представљање метода може се наћи у [12, 13, 37]. Метод се тиче извођења општег облика динамике отворених квантних система полазећи од микроскопског модела хамилтонијана сложеног система $S + E$, без феноменолошких, физички неоправданих и сумњивог значења, претпоставки, каква је Борнова апроксимација у стандардном приступу [12].

По овом методу, на композитном Хилбертовом простору $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, уводе се пројектори (суупероператори који делују на простору стања целине $\mathcal{S}+\mathcal{E}$), $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, са особинама идемпотентности $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$ и $\mathcal{PQ} = \mathcal{QP} = 0$, а у складу са, на пример, следећом дефиницијом:

$$\mathcal{P}\hat{\rho} = tr_E(\hat{\rho}) \otimes \hat{\rho}_E, \tag{3.35а}$$

$$\mathcal{Q}\hat{\rho} = (\mathcal{I} - \mathcal{P})\hat{\rho}, \tag{3.35б}$$

при чему $\hat{\rho} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ где је $\hat{\rho} \equiv \hat{\rho}_{S+E}$ ради краћег писања и $\hat{\rho}_E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{E})$ је фиксирано стање

---

[10] Треба имати у виду да у тренутку писања овог текста не постоји јединствена дефиниција немарковљевости. Поменуто дефинисање немарковљевости може се наћу у [34], на пример.

окружења које се најчешће бира да буде канонско стање купатила са модулом расподеле $\beta = 1/kT$:

$$\hat{\rho}_E = \hat{\rho}_{\mathrm{th}} = e^{-\beta \hat{H}_E} \left(tr e^{-\beta \hat{H}_E} \right)^{-1},$$

чиме метод постаје знатно једноставнији. Важно је нагласити да стање окружења не сме бити уведено узимањем трага по систему, $tr_S(\hat{\rho})$, јер би то водило нелинеарности супероператора $\mathcal{P}$ а отуда и нелинеарности квантне мастер једначине.

Захтева се да пројекција $\mathcal{P}\hat{\rho}$ *садржи све потребне информације* о редукованом стању $\hat{\rho}_S$ подсистема $\mathcal{S}$, док $\mathcal{Q}\hat{\rho}$ пројекција не носи никакве информације о квантном отвореном систему. Другачије речено, све што се о подсистему $\mathcal{S}$ може сазнати садржано је у статистичком оператору $\hat{\rho}_S = tr_E \mathcal{P} \hat{\rho}$.

Полазећи од Лиувиј-фон Нојманове једначине (3.1) за сложени систем $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ ($\hat{V}_{SE} \equiv \hat{V}$ опет ради краћег писања) ($\hbar = 1$)

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\imath[\hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{V}, \hat{\rho}(t)], \tag{3.36}$$

и деловањем пројекционих оператора следи:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\hat{\rho}(t) = -\imath\mathcal{P}[\hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{V}, \hat{\rho}(t)], \tag{3.37}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\hat{\rho}(t) = -\imath\mathcal{Q}[\hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{V}, \hat{\rho}(t)]. \tag{3.38}$$

Прелазећи на интеракциону слику,

$$\hat{\tilde{\rho}}(t) = e^{\imath(\hat{H}_S + \hat{H}_E)t} \hat{\rho}(t) e^{-\imath(\hat{H}_S + \hat{H}_E)t},$$

и узимајући у обзир да важи:

$$\begin{aligned} tr_E[\hat{\tilde{\rho}}(t)] &= tr_E \left[e^{\imath(\hat{H}_S + \hat{H}_E)t} \hat{\rho}(t) e^{-\imath(\hat{H}_S + \hat{H}_E)t} \right] \\ = e^{\imath \hat{H}_S t} tr_E \left[e^{\imath \hat{H}_E t} \hat{\rho}(t) e^{-\imath \hat{H}_E t} \right] e^{-\imath \hat{H}_S t} &= e^{\imath \hat{H}_S t} tr_E[\hat{\rho}(t)] e^{-\imath \hat{H}_S t} = \hat{\tilde{\rho}}_S(t), \end{aligned} \tag{3.39}$$

следи да су пројекциони оператори инваријантни у односу на овакву трансформацију, па из (3.37) и (3.38) следи [12, 13]:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(t) = -\imath\mathcal{P}[\tilde{V}(t), \hat{\tilde{\rho}}(t)], \tag{3.40}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(t) = -\imath\mathcal{Q}[\tilde{V}(t), \hat{\tilde{\rho}}(t)]. \tag{3.41}$$

Увођењем нотације $\mathcal{V}(t) \cdot \equiv -\imath[\tilde{V}(t), \cdot]$ и идентичног супероператора $\mathcal{I} = \mathcal{P} + \mathcal{Q}$ између

$\mathcal{V}(t)$ и $\hat{\tilde{\rho}}(t)$ последње две једначине могу бити записане као:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(t) = \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(t) + \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(t), \tag{3.42}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(t) = \mathcal{Q}\mathcal{V}(t)\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(t) + \mathcal{Q}\mathcal{V}(t)\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(t). \tag{3.43}$$

Формалним интеграљењем (3.42) следи:

$$\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(t) = \mathcal{P}\hat{\rho}(0) + \int_0^t ds\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(s) + \int_0^t ds\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(s). \tag{3.44}$$

Хомогена диференцијална једначина, која се тиче (3.43), је:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(t) = \mathcal{Q}\mathcal{V}(t)\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(t),$$

и има решење дато пропагатором:

$$\mathcal{G}(t,s) = \mathcal{T}e^{\int_s^t dt'\mathcal{Q}\mathcal{V}(t')},$$

где је $\mathcal{T}$ оператор временског уређења.

Знајући ово, опште решење за (3.43) ће бити облика:

$$\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(t) = \mathcal{G}(t,0)\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(0) + \int_0^t ds\mathcal{G}(t,s)\mathcal{Q}\mathcal{V}(s)\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(s). \tag{3.45}$$

Замењујући ово решење у (3.42) следи:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(t) = \mathcal{P}\hat{\rho}(0) &+ \int_0^t ds\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(s) + \int_0^t ds\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{G}(s,0)\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(0) \\ &+ \int_0^t ds\int_0^s du\mathcal{P}\mathcal{V}(s)\mathcal{G}(s,u)\mathcal{Q}\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(u).\end{aligned} \tag{3.46}$$

што је интегрална верзија такозване *генералисане Накаџима-Цванцигове мастер једначине*:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(t) &= \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(t) + \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{G}(t,0)\mathcal{Q}\hat{\tilde{\rho}}(0) + \\ &+ \int_0^t du\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{G}(t,u)\mathcal{Q}\mathcal{V}(u)\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(u).\end{aligned} \tag{3.47}$$

Да би се упростила ова једначина користе се две претпоставке. Прва је да важи

$\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{P} = 0$, што значи:

$$\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{P}\hat{\hat{\rho}}(t) = -\imath tr_E[\hat{\hat{V}}(t), \hat{\hat{\rho}}_S \otimes \hat{\hat{\rho}}_E] \otimes \hat{\hat{\rho}}_E = -\imath \left[tr_E\left(\hat{\hat{V}}(t)\hat{\hat{\rho}}_E\right), \hat{\hat{\rho}}_S\right] \otimes \hat{\hat{\rho}}_E = 0,$$

и што имплицира $tr_E\left(\hat{V}\hat{\rho}_E\right) = 0$, односно узимајући у обзир интеракциони хамилтонијан облика (3.53), значи да важи $tr_E\hat{B}_k\hat{\rho}_E = 0$, што је скоро увек испуњено у пракси [13].

Друга претпоставка тиче се почетног стања сложеног система: $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0)$, односно $\mathcal{Q}\hat{\rho}(0) = 0$, што је потребно да би динамичка мапа била универзална (УДМ), видети теорем 3.2.

Због ових двеју претпоставки други и трећи члан у (3.47) отпадају и следи интегро-диференцијална једначина:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\hat{\hat{\rho}}(t) = \int_0^t du \mathcal{K}(t,u)\mathcal{P}\hat{\hat{\rho}}(u), \tag{3.48}$$

где је кернел интегралног оператора мастер једначине:

$$\mathcal{K}(t,u) = \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{G}(t,u)\mathcal{Q}\mathcal{V}(u). \tag{3.49}$$

Да би мастер једначина (3.48) имала облик који гарантује марковљевост динамике, потребно је трансформисати десну страну израза (3.48) у генератор облика (3.33), односно (3.34) за хомогене Марковљеве процесе. Оно што се чини као најједноставнија могућност је да се претпостави да се $\mathcal{K}(t,u)$ понаша као делта функција у односу на $\hat{\hat{\rho}}(u)$ чиме се укида интеграција. Да би то било могуће, нужно је да типично време система $\mathcal{S}$, τ_S, буде много дуже од времена карактеристичног за окружење, τ_E, које карактерише којом брзином опада $\mathcal{K}(t,u)$ када $|t-u| \gg 1$.

Испоставља се да је то могуће у *граничним* случајевима за које важи $\tau_S/\tau_E \to \infty$, [13]:

- *Лимес слабе интеракције.* Запишимо интеракцију као $V \to \alpha V$, где α представља константу куповања. Пошто је претпоставка да је то мала величина, са њеним варирањем и $\hat{\hat{\rho}}(u)$ ће се мењати споро, па ће бити $\tau_S \to \infty$, односно $\tau_S/\tau_E \to \infty$ за τ_E фиксирано.

- *Лимес јаке интеракције.* Ово је, на неки начин комплементаран случај претходном, јер овде $\tau_E \to 0$, што је само по себи довољно да се $\mathcal{K}(t,u)$ понаша као делта функција.

У овом раду, ће пре свега од интереса бити лимес слабог куповања, што је представљено у следећем одељку.

Ови услови који воде закону кретања који има облик Марковљеве мастер једначине (3.34), као и чињеница да дефиниција (3.35а) даје тензорски производ стања облика $\hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E$, замењује Борнову апроксимацију поменуту у одељку 3.1 и тиме одбацује њена погрешна физичка тумачења.

Наиме, као што је у Одељку 3.1 напоменуто, захтев да стање целине $\mathcal{S}+\mathcal{E}$ буде у сваком тренутку приближно тензорски производ стања подсистема протумачен је као последица слабе интеракције у $S+E$ систему, а физички је "објашњено" кратким памћењем окружења. Интуитивно, сматра се да Борнова апроксимација подразумева, не само слабу интеракцију, већ и важење марковљевости динамике само за временске интервале који морају бити дужи од времена које је потребно окружењу да "заборави" динамику, чиме се обезбеђује временска локалност динамике (која је очигледна у (3.33), односно у (3.34)). Временска локалност је у методу Накаџиме-Цванцига обезбеђена условом оштро опадајућег кернела (3.49). Доња граница временских интервала за које има смисла марковљевост се у методу Накаџиме-Цванцига такође не може избећи а дефинисана је карактеристичним временом за окружење, које је горе означено са τ_E.

Тако, може се рећи да метод Накаџиме-Цванцига обезбеђује систематичан, физички непротивуречан приступ у добијању Марковљеве динамике, како за слабе, тако и за јаке интеракције, али не и за "просечно" јаке интеракције у изолованом систему $\mathcal{S}+\mathcal{E}$. У овом контексту сада Борнова апроксимација постаје згодна досетка да би се математички дошло до Марковљеве динамике, али са физичким садржајем ограниченим на слабе интеракције. Другим речима, Накаџиме-Цванцига метод, за сада, нема алтернативу за физички непротивуречан и општи приступ динамици отворених система, били они Марковљеви, или не.

Међутим, поступак пројектовања тачног стања има за последицу губљење информације о сложеном систему и, чини се, неповратно води немогућности дубљег физичког увида у одговор на питање физичког оправдања за приближни тензорски производ стања целине $\mathcal{S}+\mathcal{E}$ у сваком тренутку, што је сходно до сада реченом потребан услов да динамика отвореног квантног система буде Марковљева, Дефиниција 3.2.

3.4 Лимес слабе интеракције

Чинећи експлицитном константу интеракције $\hat{V} \to \alpha\hat{V}$ (отуда и $\mathcal{V} \to \alpha\mathcal{V}$) и развијајући кернел (3.49) по α, у лимесу слабе интеракције следи:

$$\mathcal{K}(t,s) = \alpha^2 \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{Q}\mathcal{V}(s) + \mathcal{O}(\alpha^3), \tag{3.50}$$

што заједно са условом $\mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{P} = 0$ даје Борнову апроксимацију једначине (3.48):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(t) = \alpha^2 \int_{t_0}^{t} ds \mathcal{P}\mathcal{V}(t)\mathcal{V}(s)\mathcal{P}\hat{\tilde{\rho}}(s).$$

Из последње једначине, након операције трага по степенима слободе окружења и користећи, у претходном одељку уведену, дефиницију $\mathcal{V}(t)\cdot \equiv -\imath[\tilde{V}(t), \cdot]$, следи:

$$\frac{d}{dt}\hat{\tilde{\rho}}_S(t) = -\alpha^2 \int_{t_0}^{t} ds tr_E[\hat{\tilde{V}}(t), [\hat{\tilde{V}}(s), \hat{\tilde{\rho}}_S(s) \otimes \hat{\rho}_{th}]]. \tag{3.51}$$

Приметити да није потребно да се претпоставља да је стање у сваком временском тренутку еволуције $\hat{\rho}_{\mathrm{th}}$: стање облика $\hat{\tilde{\rho}}_S(s) \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{th}}$ појављује се као *последица примене пројекционог оператора.*

Без губљења општости може се за почетни временски тренутак узети $t_0 = 0$ а сменом варијабле s са $t-s$ у горњи интеграл постаје

$$\frac{d}{dt}\hat{\tilde{\rho}}_S(t) = -\alpha^2 \int_0^t dstr_E[\hat{\tilde{V}}(t), [\hat{\tilde{V}}(t-s), \hat{\tilde{\rho}}_S(t-s) \otimes \hat{\rho}_{\text{th}}]].$$

Очекује се да ова једначина важи у лимесу $\alpha \to 0$, с тим што је у лимесу промена $\hat{\tilde{\rho}}_S$ је све мања и мања: да би се стекао увид у динамику згодно је извршити рескалирање времена фактором α^2 – у супротном десна страна горње једначине тежи нули. Према томе, у лимесу $\alpha \to 0$ горња граница интеграције узима се да је бесконачна. Са друге стране, да би интеграл остао конвергентан, функције $tr_E[\hat{\tilde{V}}(t), [\hat{\tilde{V}}(t-s), \hat{\rho}_{\text{th}}]]$ морају да опадају довољно брзо, што ће бити случај ако су поменуте функције непериодичне. То је испуњено ако окружење има бесконачан број степени слободе, јер у супротном постоји коначно време рекуренције.

Како се стање $\hat{\tilde{\rho}}_S$ мења веома споро у лимесу $\alpha \to 0$, може се узети за константно у оквиру временског интервала τ_E у околини $s = 0$ где је израз $tr_E[\hat{\tilde{V}}(t), [\hat{\tilde{V}}(t-s), \hat{\rho}_{\text{th}}]]$ различит од нуле и тада се добија:

$$\frac{d}{dt}\hat{\tilde{\rho}}_S(t) = -\int_0^\infty dstr_E[\hat{\tilde{V}}(t), [\hat{\tilde{V}}(t-s), \hat{\tilde{\rho}}_S(t) \otimes \hat{\rho}_{\text{th}}]]. \tag{3.52}$$

Претходно речено ослања се на тзв. Дејвисову (*Davies*) теорему, која даје довољне услове за егзистенцију лимеса слабе интеракције, уз потребан услов о бесконачном броју степени слободе окружења [13].

Будући да је почетно стање облика $\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_S(t_0) \otimes \hat{\rho}_{\text{th}}$, природно је очекивати (у складу са Одељком 3.1) да је еволуција система $\mathcal{S}$ описана комплетно позитивном мапом. Али, последња једначина (3.52) не гарантује комплетну позитивност еволуције, па испоставља се да је нужно увођење додатне претпоставке.

Наиме, интеракциони хамилтонијан може бити записан као:

$$\hat{V} = \sum_k \hat{A}_k \otimes \hat{B}_k, \tag{3.53}$$

при чему сваки $\hat{A}_k$ може бити разложен на суму својствених оператора супероператора $[\hat{H}_S, \cdot]$

$$\hat{A}_k = \sum_\omega \hat{A}_k(\omega), \tag{3.54}$$

где је

$$[\hat{H}_S, \hat{A}_k(\omega)] = -\omega \hat{A}_k(\omega). \tag{3.55}$$

Са друге стране, комплексно конјуговање даје:

$$[\hat{H}_S, \hat{A}_k^\dagger(\omega)] = \omega \hat{A}_k^\dagger(\omega),$$

а будући да је $\hat{V}$ ермитски оператор, у интеракционој слици ће бити

$$\hat{\tilde{V}}(t) = \sum_{\omega,k} e^{-i\omega t}\hat{A}_k(\omega) \otimes \hat{\tilde{B}}_k(t) = \sum_{\omega,k} e^{i\omega t}\hat{A}_k^\dagger(\omega) \otimes \hat{\tilde{B}}_k^\dagger(t).$$

Замењујући горњу декомпозицију за $\hat{\tilde{V}}(t-s)$ преко $\hat{A}_k(\omega)$ и $\hat{\tilde{V}}(t)$ преко $\hat{A}_k^\dagger(\omega)$ у једначину (3.53), а након развијања комутатора следи:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\tilde{\rho}}_S(t) = \sum_{\omega,\omega'}\sum_{k,\ell} & e^{i(\omega'-\omega)t}\Gamma_{k\ell}(\omega)[\hat{A}_\ell(\omega)\hat{\tilde{\rho}}_S(t), \hat{A}_k^\dagger(\omega')] \\ & + e^{i(\omega-\omega')t}\Gamma_{\ell k}^*(\omega)[\hat{A}_\ell(\omega'), \hat{\tilde{\rho}}_S(t)\hat{A}_k^\dagger(\omega)],\end{aligned} \tag{3.56}$$

где су уведене величине:

$$\begin{aligned}\Gamma_{k\ell}(\omega) &= \int_0^\infty ds e^{i\omega s}\mathrm{Tr}\left[\hat{\tilde{B}}_k^\dagger(t)\hat{\tilde{B}}_\ell(t-s)\hat{\rho}_{\mathrm{th}}\right] \\ &= \int_0^\infty ds e^{i\omega s}\mathrm{Tr}\left[\hat{\tilde{B}}_k^\dagger(s)\hat{B}_\ell\hat{\rho}_{\mathrm{th}}\right],\end{aligned} \tag{3.57}$$

при чему је последњи ред последица тога што $\hat{\rho}_{\mathrm{th}}$ комутира са $e^{i\hat{H}_E t}$.

У једначини (3.56) чланови са различитим фреквенцијама брзо осцилују у околини нуле све док важи $|\omega' - \omega| \gg \alpha^2$, па користећи тзв. секуларну апроксимацију у лимесу слабе интеракције добија се:

$$\frac{d}{dt}\hat{\tilde{\rho}}_S(t) = \sum_{\omega}\sum_{k,\ell}\Gamma_{k\ell}(\omega)[\hat{A}_\ell(\omega)\hat{\tilde{\rho}}_S(t), \hat{A}_k^\dagger(\omega)] + \Gamma_{\ell k}^*(\omega)[\hat{A}_\ell(\omega), \hat{\tilde{\rho}}_S(t)\hat{A}_k^\dagger(\omega)]. \tag{3.58}$$

Матрица $\Gamma_{k\ell}(\omega)$ може се разложити на збир ермитске и косоермитске матрице

$$\Gamma_{k\ell}(\omega) = \frac{1}{2}\gamma_{k\ell}(\omega) + iS_{k\ell}(\omega),$$

при чему су

$$S_{k\ell}(\omega) = \frac{1}{2i}[\Gamma_{k\ell}(\omega) - \Gamma_{\ell k}^*(\omega)],$$

и

$$\gamma_{k\ell}(\omega) = \Gamma_{k\ell}(\omega) + \Gamma_{\ell k}^*(\omega) = \int_{-\infty}^\infty ds e^{i\omega s} tr\left[\hat{\tilde{B}}_k^\dagger(s)\hat{B}_\ell\hat{\rho}_{\mathrm{th}}\right],$$

ермитске матрице. Тада једначина (3.58) добија следећи облик:

$$\frac{d}{dt}\hat{\tilde{\rho}}_S(t) = -i[\hat{H}_{\mathrm{LS}}, \hat{\tilde{\rho}}_S(t)] + \mathcal{D}[\hat{\tilde{\rho}}_S(t)], \tag{3.59}$$

где је

$$\hat{H}_{\mathrm{LS}} = \sum_{\omega} \sum_{k,\ell} S_{k\ell} \hat{A}_k^{\dagger}(\omega) \hat{A}_{\ell}(\omega),$$

ермитски оператор који комутира са сопственим хамилтонијаном отвореног система $\hat{H}_S$, као последица релације (3.55). Оператор $\hat{H}_{\mathrm{LS}}$ познат је под називом Лембов померај[11], јер ренормализује енергијске нивое сопственог хамилтонијана система, а као последица интеракције система са окружењем. Тзв. дисипатор, $\mathcal{D}$, у (3.59) дат је изразом:

$$\mathcal{D}[\hat{\tilde{\rho}}_S(t)] = \sum_{\omega} \sum_{k,\ell} \gamma_{k\ell}(\omega) \left[\hat{A}_{\ell}(\omega) \hat{\tilde{\rho}}_S(t) \hat{A}_k^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2} \{ \hat{A}_k^{\dagger}(\omega) \hat{A}_{\ell}(\omega), \hat{\tilde{\rho}}_S(t) \} \right]. \tag{3.60}$$

Враћајући се на Шредингерову слику, мастер једначина тада гласи:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = -i[\hat{H}_S + \hat{H}_{\mathrm{LS}}, \hat{\rho}_S(t)] + \mathcal{D}[\hat{\rho}_S(t)]. \tag{3.61}$$

Може се показати да $\Gamma_{k\ell}(\omega)$ у (3.60) чине позитивну матрицу за свако ω [12,13]. Позитивна матрица може бити дијагонализована уз помоћ унитарне трансформације, чији су матрични елементи u_{kl}: својствене вредности на дијагонали обележимо са γ_k. Уводећи нове операторе $\hat{A}_l = \sum_k u_{kl} \hat{V}_k$ добија се форма дисипатора каква је у (3.34), односно Линдбладова квантна мастер једначина.

То значи да (3.61) гарантује комплетну позитивност динамике отвореног система и дефинише одговарајућу Марковљеву мастер једначину, односно комплетно-позитивну полугрупу.

3.5 Појам квантне декохеренције

Како је већ у првој глави истакнуто, реални системи, поред структуре, између осталог, поседују још један атрибут, а то је отвореност, в. Дефиницију 3.1. Део квантне теорије отворених система где је од интереса међуделовање отвореног система и његовог окружења, са *одређеним типом* интеракције (в. доле), назива се теоријом декохеренције [11, 37].

Израз "декохеренција" у литератури се користи за различите, мада у понечему сродне, процесе као што су квантна дисипација, квантна дифузија, квантно мерење, декохеренција у Журековој (*Zurek*) теорији декохеренције и друго [11, 37]. Свима њима заједничко је гашење вандијагоналних елемената редукованог статистичког оператора (у датој репрезентацији) за *отворени* (под)систем, што је елементарни појам процеса декохеренције. Овде ће од интереса бити искључиво значење декохеренције које је увео Журек и које је дато следећом дефиницијом:

---

[11] На овом месту термин Лембов померај користи се у ширем смислу, док у ужем смислу користи се када је окружење на $T = 0$. Лембов померај у ширем смислу обухвата и Старков померај који се односи на случај окружења $T \neq 0$.

Дефиниција 3.3. *Под процесом декохеренције подразумева се динамичко успостављање окружењем индукованих, ефективних* ***суперселекционих правила*** *на простору стања отвореног квантног система.*

Суперселекциона правила подразумевају да простор стања система $\mathcal{S}$, којег се та правила и тичу, може бити разложен на ортогоналну суму својих потпростора:

$$\mathcal{H}_S = \oplus_n \mathcal{H}_n. \tag{3.62}$$

Дакле, процес декохеренције успоставља динамичку забрану суперпозиције стања која припадају различитим потпросторима (суперселекционим секторима[12]), па је стање подсистема описано статистичким оператором.

Постојање суперселекционих сектора је динамички индуковано одговарајућом интеракцијом између система и окружења $\hat{H}_{S+E}$ ($\hat{H}_S$ и $\hat{H}_E$ су сопствени хамилтонијани система и окружења, редом):

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{S+E}, \tag{3.63}$$

која је задата у следећем облику:

$$\hat{H}_{S+E} = \sum_{n,m} \gamma_{nm} \hat{P}_{Sn} \otimes \hat{\Pi}_{Em} + \hat{H}' \tag{3.64}$$

где су $\hat{P}_{Sn}$ и $\hat{\Pi}_{Sm}$ пројектори система и окружења, а $\hat{H}'$ је члан по норми мали у односу на први члан и не комутира са пројекторима. Овај последњи члан може се занемарити [11].

Под практично опште коришћеном претпоставком да је интеракција у сложеном систему $\mathcal{S}+\mathcal{E}$ доминантна у односу на сопствене хамилтонијане система и окружења, оператор унитарне еволуције гласи:

$$\hat{U}(t) \cong \hat{U}_{int}(t) = e^{-\frac{\imath t}{\hbar}\hat{H}_{S+E}},$$

па је стање целине систем+окружење:

$$|\Psi(t)\rangle_C = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\lambda}_m |\varphi_m\rangle_S \otimes |\chi_m(t)\rangle_E. \tag{3.65}$$

Управо пројектори система $\hat{P}_{Sn}$ одређују разлагање простора стања (3.62), а сваки базис прилагођен овој декомпозицији назива се базисом бројача[13] („*pointer basis*”). За стања која припадају базису бројача захтева се да буду *робусна*, односно релативно стабилна у току међуделовања система са окружењем, при чему динамика целине $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ је и даље

---

[12] Како је познато, суперселекциона правила последица су запажања да суперпозиције произвољних стања не морају бити оствариве у природи: на пример, суперпозиција стања фотона и електрона, суперпозиција стања честица са различитим наелектрисањима и др.

[13] Тај базис чине ортогонална, или приближно ортогонална стања. Приближна ортогоналност односи се на случај када у интеракцији (3.64) није занемарен мали члан $\hat{H}'$, в. [11].

унитарна. Овај захтев се, формално, изражава на следећи начин:

$$\hat{U}(t)|\varphi_m\rangle_S \otimes |\chi\rangle_E = |\varphi_m\rangle_S \otimes |\chi_m(t)\rangle_E. \tag{3.66}$$

За стања реалног окужења (тј. за окружење са, практично, бесконачним бројем степени слободе) испоставља се да су приближно ортогонална, тј. у питању је ефективна ортогоналност [11]:

$$\lim_{t\to\infty} {}_E\langle\chi_n(t)|\chi_m(t)\rangle_E \approx \delta_{nm},$$

на основи чега може се очекивати квазидијагонална форма за статистички оператор система.

Горе поменути суперселекциони потпростори су јединствени, док базис бројача није: јасно је да се из потпростора који фигуришу у (3.62) могу (у принципу) издвојити различити базиси.

Декомпозиција на ортогоналне потпросторе непосредно омогућује увођење тзв. "опсервабле бројача" чији су својствени потпростори баш они који су дефинисани декомпозицијом (3.62). У спектралном запису, опсервабла бројача ће гласити:

$$\hat{\mathcal{A}}_S = \sum_n \mathfrak{a}_n \hat{P}_{Sn},$$

са особином да је испуњена следећа једнакост:

$$[\hat{\mathcal{A}}_S \otimes \hat{I}_E, \hat{H}_{S+E}] = 0. \tag{3.67}$$

Све опсервабле чији својствени базиси су адаптирани на декомпозицију (3.62) онда комутирају са опсерваблом $\hat{\mathcal{A}}_S$ док међусобно не морају да комутирају. Поменуто комутирање опсервабли слично је комутирању варијабли у класичној физици, па за опсерваблу бројача каже се да је носилац *приближних* класичних особина отвореног система а њено постојање може се сматрати за алтернативну дефиницију процеса декохеренције.

Истакнуто је да је класичност приближна, што захтева додатни коментар. Речено је да опсервабле које комутирају са опсерваблом бројача не морају међусобно да комутирају, што је у нескладу са класичном физиком где све опсервабле (варијабле) подсистема комутирају – отуда приближност класичности. Приближна класичност коју успоставља процес декохеренције може се посматрати и из перспективе стања, тачније горе наглашених робусних стања: робустност се сматра основном феноменолшком особином класичних стања. Робусна стања која припадају различитим супереселекционим потпросторима међусобно декохерирају и представљају међусобно различива стања, што је особина класичних система. Физички то значи да мерење на отвореном систему не води нарушењу суперселекционих правила, *осим* ако је у питању мерење неке опсервабле на отвореном систему која не комутира са опсерваблом бројача. Мерењем такве опсервабле била би успостављена *нова супереслекциона правила*, која би одређивала "неку другу класичност", што говори да је класичност уведена декохеренцијом условна.

Дакле, процес декохеренције издваја оне степене слободе који се "понашају класично" и успоставља њихову приближну (условну, делимичну) класичност, односно класичну реалност[14].

Није наглашено, али систем $\mathcal{S}$ сам по себи може имати структуру: процес декохеренције, у принципу, може се тицати, или појединих степени слободе (подсистема), или свих степени слободе. Намеће се питање да ли се може предвидети структура која ће бити робусна на утицај окружења, у духу релације (3.66), односно о структури о којој може да се говори као о (приближно) класичној?

У литератури која се тиче теорије декохеренције често се прећутно претпоставља да, будући да су реални системи (са или без структуре) отворени, да је одвијање процеса декохеренције универзална појава. Међутим, испоставља се да се о универзалности не може говорити, што је показано у [38, 39], односно да се може дефинисати ефективни потребни услов за одвијање процеса декохеренције – испоставља се да су особине интеракционог хамилтонијана од суштинског значаја. Реч је о следећим особинама: а) Сепарабилност интеракционог хамилтонијана и б) "ненарушавајући (*non-demolition*) карактер", $[\hat{H}_{int}(t), \hat{H}_{int}(t')] = 0$ (t и t' су различити временски тренуци).

Пре него се формулише поменути потребни услов, потребни су следећи теорем и једна лема [11]:

Теорем 3.6. *Полазећи од општег записа:*

$$\hat{H}_{S+E} = \sum_{i,j} \sum_{m_i,n_j} C_{m_i n_j} \hat{A}_{Si}^{m_i} \otimes \hat{B}_{Ej}^{n_j} \tag{3.68}$$

интеракциони хамилтонијан могуће је (неједнозначно) преписати у облик:

$$\hat{H}_{S+E} = \sum_{k} \hat{C}_{Sk} \otimes \hat{D}_{Ek}, \tag{3.69}$$

где опсервабле $\hat{C}_{Sk} = \sum_{i,m_i} \alpha_{m_i}^{(k)} \hat{A}_{Si}^{m_i}$ *и* $\hat{D}_{Ek} = \sum_{j,n_j} \beta_{n_j}^{(k)} \hat{B}_{Ej}^{n_j}$ *чине скупове линеарно независних опсервабли система, тј. окружења, редом.*

Лема 3.1. *Интеракциони хамилтонијан облика* (3.69) *је* ***сепарабилан****, акко важе оба услова:*

$$[\hat{C}_{Sk}, \hat{C}_{Sk'}] = 0, \quad \forall k, k',$$

$$[\hat{D}_{Sk}, \hat{D}_{Sk'}] = 0, \quad \forall k, k'.$$

Јасно је да је горе наведени интеракциони хамилтонијан (3.64) приближно сепарабилан (и води приближном базису бројача и приближној опсервабли бројача) те занемаривањем малог члана може се говорити о егзактно сепарабилном интеракционом хамилтонијану, што је често коришћена апроксимација.

Сада се може исказати потребни услов за одигравање процеса декохеренције следећим теоремом [38, 39]:

---

[14] Ово се може исказати и на следећин начин: процес декохеренције уводи приближну класичу реалност за отворени подсистем и не може се говорити о егзактној класичности јер би то значило да је проблем мерења решен, односно да се из тог егзактно класичног система може добити максимум класичних информација.

Теорем 3.7. *Интеракција у дводелном систему која је сепарабилна и која испуњава услов* $[\hat{H}_{S+E}(t), \hat{H}_{S+E}(t')] = 0$ *за произвољне временске тренутке ефективни је потребни услов за одвијање процеса декохеренције.*

Овај, последњи, теорем успоставља правило да за несепарабилне интеракционе хамилтонијане[15] нема процеса декохеренције, и то у принципу. Дакле, не може се за сваки отворени квантни систем очекивати одвијање процеса декохеренције: декохеренције по правилу нема за несепарабилне хамилтонијане, као и за хамилтонијане који нису *non-demolition*.

Наравно, интеракциони хамилтонијан део је целокупног хамилтонијана. Када се говори само о интеракционом хамилтонијану подразумева се да су сопствени хамилтонијани система и окружења мали по норми у односу на интеракциони хамилтонијан. Ако су по нормама сопствени и интеракциони хамилтонијан приближни, онда је сепарабилност целокупног хамилтонијана довољан услов за одвијање процеса декохеренције [38, 39].

Није наодмет поновити: по свом физичком значењу, процес декохеренције успоставља приближну класичну реалност за отворени систем; робусна стања (макар приближно) не мењају се под утицајем окружења што се сматра основном феноменолошком особином класичних система. Будући да теорем 3.7 обезбеђује потребне услове за одвијање процеса декохеренције, сепарабилност интеракције појављује се као *плаузабилни критеријум* за дефинисање границе између подсистема у дводелној структури, границе која се за класичне системе подразумева.

Згодно је ово исказати на једном месту, као критеријум [17, 18]:

Критеријум 3.1. *За дводелну структуру сепарабилност интеракционог хамилтонијана може послужити као критеријум у одређивању границе међу подсистемима, што је формално исказано знаком* $\otimes$ *који фигурише у дефиницији Хилбертовог простора стања сложенога система.*

Дакле, ако је и задата извесна декомпозиција дводелног система, тек након потврде да се процес декохеренције може одиграти има смисла третирати подсистеме као приближно класично реалне. Неодигравање декохеренције указује на немогућност успостављања границе између отвореног квантног система и његовог окружења, односно да су подсистеми $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ неразличиви. Шта се овде подразумева под неразличивошћу захтева додатно објашњење.

Нека су задате линеарне канонске трансформације (упоредити са записом (1.4)):

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{Dm} &= \hat{\xi}_m(\hat{x}_{Ai}, \hat{p}_{Ai}; \hat{X}_{Bj}, \hat{P}_{Bj}) \\ \hat{\pi}_{Dm} &= \hat{\pi}_m(\hat{x}_{Ai}, \hat{p}_{Ai}; \hat{X}_{Bj}, \hat{P}_{Bj}) \end{aligned} \tag{3.70}$$

---

[15] Треба нагласити да сепарабилност, односно несепарабилност хамилтонијана, нема утицаја на успостављање квантне сплетености, онако како то стоји у једнакости (3.65), што је предуслов да би уопште могло да се говори о декохеренцији. Заправо, стање (3.65) подразумева ваљано дефинисану структуру. Међутим, само за сепарабилни интеракциони хамилтонијан има смисла говорити о добро дефинисаним степенима слободе: неодвијање процеса декохеренције би онда указивало да су изабрани степени слободе “вештачки”.

и

$$\begin{aligned}\hat{\Xi}_{En} &= \hat{\Xi}_n(\hat{x}_{Ai}, \hat{p}_{Ai}; \hat{X}_{Bj}, \hat{P}_{Bj}) \\ \hat{\Pi}_{En} &= \hat{\Pi}_n(\hat{x}_{Ai}, \hat{p}_{Ai}; \hat{X}_{Bj}, \hat{P}_{Bj})\,, \end{aligned} \tag{3.71}$$

које повезују опсервабле нове декомпозиције $\mathcal{C} = \mathcal{D} + \mathcal{E}$ са опсерваблама старе декомпозиције, $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Претпоставимо да је интеракциони хамилтонијан у старој декомпозицији био несепарабилне врсте, а да је резултат трансформација сепарабилни интеракциони хамилтонијан у новој декомпозицији. Са друге стране, на основи Критеријума 3.1, у новој декомпозицији може се говорити о подсистемима, односно о локалним опсервablama дефинисаних на одговарајућим просторима стања подсистема $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$. На основи једнакости (3.70) и (3.71), са друге стране, у општем случају, не може се очекивати да мерење опсервабли у новој декомпозицији омогући посредно мерење опсервабли које се тичу старе декомпозиције (разлог је некомутирање опсервабли са леве стране једнакости (3.70) и (3.71)) – што би било значење израза "неразличиви" из претходног пасуса: другачије речено систем је недељив у односу не декомпозицију $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

На крају, важно је подвући да, колико је познато, процес декохеренције не зависи од тога да ли се разматрају Марковљеви или немарковљеви процеси.

4

Неки резултати студија квантних структура

Првенствена намена ове главе је да дâ кратак преглед неких резултата тзв. студија квантних структура. Од интереса је однос појма структуре и ЛКТ које их варирају са једне стране и појмова као што су, на пример, квантне корелације и процес декохеренције, са друге стране.

Истраживања о квантним структурама су у зачетку [1, 40], али већ су се издвојили неки резултати који чине основу ове дисертације.

На почетку биће речи о једном општем квантно-механичком правилу, тзв. релативности квантне сплетености (“*entanglement relativity*”) или краће *ER* [41–47], и то посебно за дводелне системе.

Теорем 4.1. *Нека ја задато стање целине* $|\Phi\rangle$ *које је у односу на тензорску факторизацију* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ *(тј. у питању је структура* $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$*) облика* $|\chi\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B$*. Тада, за неку другу факторизацију укупног Хилбертовог простора стања* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_D$*, која је индукована ЛКТ, стање* $|\Phi\rangle$ *је, по правилу, сплетено. То јест, важи једнакост:*

$$|\chi\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B = |\Phi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n,m} c_i |i\rangle_C \otimes |j\rangle_D.$$

Доказ. Посматрајмо следеће четири опсервабле $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ и $\hat{D} = \hat{A} - \hat{B}$ и уведимо корелациону функцију $Q(\hat{A}, \hat{B}, |\Phi\rangle)$ дефинисану изразом:

$$Q(\hat{A}, \hat{B}, |\Phi\rangle) = \langle\Phi|\hat{A}\hat{B}|\Phi\rangle - \langle\Phi|\hat{A}|\Phi\rangle\langle\Phi|\hat{B}|\Phi\rangle. \tag{4.1}$$

Нека се опсервабле $\hat{A}$ и $\hat{B}$ тичу различитих фактор простора стања, односно нека је $\hat{A} \equiv \hat{A} \otimes \hat{I}_B$ и $\hat{B} \equiv \hat{I}_A \otimes \hat{B}$. Тада, из израза (4.1) следи да ће корелациона функција бити једнака нули за стање $|\Phi\rangle$ које је тензорски производ стања за факторизацију $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ – доказ овога је тривијалан када се у (4.1) смени једнакост $|\Phi\rangle = |\chi\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B$. Ако пак то није случај, закључује се да у систему има корелација. Дакле, нулта вредност корелационе функције није довољан услов да је стање тензорски производ. Али, ненулта вредност корелационе функције је довољан услов да стање није тензорски производ, односно да у систему има корелација.

Сада, како лако следи, $\hat{C}\hat{D} = \hat{A}^2 \otimes \hat{I}_B - \hat{I}_A \otimes \hat{B}^2$, корелациона функција

$$\begin{aligned} Q(\hat{C}, \hat{D}, |\Phi\rangle) &= \langle\Phi|\hat{C}\hat{D}|\Phi\rangle - \langle\Phi|\hat{C}|\Phi\rangle\langle\Phi|\hat{D}|\Phi\rangle = \\ &= (\Delta\hat{A})^2 - (\Delta\hat{B})^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

у општем случају.

Као што се види, опсервабле $\hat{C}$ и $\hat{D}$ нису прилагођене тензорској факторизацији $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, па отуда $Q(\hat{C}, \hat{D}, |\Phi\rangle) \neq 0$ није провера постојања корелација за ту факторизацију. Али, за неку другу тензорску факторизацију $\mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_D$, за коју морају постојати опсервабле типа $\hat{C}$ и $\hat{D}$, резултат $Q(\hat{C}, \hat{D}, |\Phi\rangle) \neq 0$ говори о постојању корелација за нову структуру $\mathcal{S} = \mathcal{C} + \mathcal{D}$. Другим речима, $Q(\hat{C}, \hat{D}, |\Phi\rangle) \neq 0$ имплицира да чисто стање $|\Phi\rangle$ целине $\mathcal{S}$, које је тензорски производ у односу на структуру $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, типично није тензорски производ (већ је сплетено стање) за практично сваку другу структуру. ■

Дакле, за сложени систем који може бити декомпонован као $\mathcal{S} = \mathcal{C}+\mathcal{D}$ или као $\mathcal{S} = \mathcal{A}+\mathcal{B}$ важи следећа једнакост:

$$|\chi\rangle_A|\nu\rangle_B = |\Phi\rangle_S = \sum_{\alpha=1}^{p} \sqrt{\lambda}_\alpha|\alpha\rangle_C \otimes |\alpha\rangle_D, \tag{4.3}$$

при чему је са десне стране стање записано у ШКФ (в. (2.1)); и лева и десна страна односе се на исти временски тренутак. Оно што је потребно уочити је да доказ последњег теорема не одбацује могућност да нека стања имају тензорску факторизацију за више структура. Теорем указује да се то, типично, не очекује, тј. имајући у виду огромност Хилбертовог простора, број стања на које се израз (4.2) не односи је занемарљив у односу на број стања на које се теорем односи.

Теорем 4.1, заправо, тврди да свако чисто стање неког сложеног система има квантну сплетеност, макар за једну дводелну структуру тог система. Односно, теорем мења стандардну перспективу која сплетеност везује за стања квантног система и успоставља следеће: квантна сплетеност не тиче се квантног система, па ни квантних стања система, *већ тиче се дводелне квантне структуре сложеног система* – квантна сплетеност је "особина" структуре и ничега другог. Још интутивније [43]: постоји сплетеност за практично свако стање дводелног система.

Сада, када је успостављено *ER* правило, а будући да је квантна сплетеност потребан услов за постојање декохеренције, природно је поставити питање да ли релативност сплетености повлачи са собом "релативност процеса декохеренције"? Другачије изказано: какве су физичке последице (пре)структурирања сложених система на одвијање или неодвијање процеса декохеренције? Неки резулати у вези са претходним питањем кратко су представљени у следеће две тачке.

- У овој тачки, од интереса ће бити и глобалне и локалне ЛКТ (в. Главу 1), услед којих "оригинална" $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ структура прелази у алтернативну структуру, $\mathcal{S}' + \mathcal{E}'$. На основи дискусије у Глави 1, овим структурама је заједнички Хилбертов простор, хамилтонијан и јединствено квантно стање у сваком временском тренутку.

  Питање постављено раније сада се може исказати: испитати одвијање процеса декохеренције у алтернативној структури $\mathcal{S}' + \mathcal{E}'$, ако су задате одговарајуће ЛКТ.

Како је показано у Глави 3, извођење Накаџима-Цванциг мастер једначине за отворени подсистем $\mathcal{S}$ подразумева да је почетно стање целине $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E$ и да је окружење топлотно купатило, тј. описиво стањем $\hat{\rho}_E = \hat{\rho}_{th} = e^{-\beta \hat{H}_E}/tr_E e^{-\beta \hat{H}_E}$, при чему је $\hat{H}_E$ хамилтонијан окружења а β тзв. модуо канонске расподеле.

Међутим, како смо видели, свака ЛКТ, типично, води ка промени корелација између подсистема, односно важи $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E \neq \hat{\rho}_{S'} \otimes \hat{\rho}_{E'}$, в. Главу 6 за детаље[1]. Поред овога, ново окружење, $\mathcal{E}'$ не мора бити у термалном стању – штавише, не мора бити ни у стационарном стању, иако $\mathcal{E}$ јесте у топлотној равнотежи. Дакле, почетно стање за нову структуру садржи корелације, што не иде у прилог Марковљевој динамици подсистема, а нити комплетној позитивности динамике подсистема. Како, уобичајено, ЛКТ уводе нове интеракционе чланове у хамилтонијан, могуће је да и самом новом окружењу, $\mathcal{E}'$, постоје интеракције између "честица". И ово су озбиљна **ограничења** у извођењу Марковљеве мастер једначине за $\mathcal{S}'$ подсистем.

Иако општег одговара на постављени задатак (за сада) нема, за тзв. класу линеарних модела [2], може се рећи нешто више [48].

Један од најпознатијих представника линеарних модела је чувени модел Калдеире-Легета (*Caldeira, Leggett*) за квантно Брауново кретање:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_S^2}{2m_S} + V(\hat{x}_S) + \sum_i \left(\frac{\hat{p}_{Ei}^2}{2m_{Ei}} + \frac{m_{Ei}\omega_{Ei}^2 \hat{x}_{Ei}^2}{2} \right) \pm \hat{x}_S \sum_i \kappa_i \hat{x}_{Ei} \equiv \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{SE} \tag{4.4}$$

а на основи индекса јасно је да се има у виду полазна, $\mathcal{S} + \mathcal{E}$, структура.

Овај модел ваљано описује динамику тзв. Браунове честице (БЧ), чији центар масе описује Брауново кретање: унутрашњи степени слободе нису од интереса. Једноставности ради, анализира се једнодимензионална (1Д) БЧ (приметити да је и запис (4.4) прилагођен 1Д систему) која може бити моделована као слободна честица или као линеарни хармонијски осцилатор. Окружење БЧ обично се моделује као скуп неинтерагујућих линеарних хармонијских осцилатора који се налазе у топлотној равнотежи.

Интеракција

$$\hat{H}_{SE} = \pm \hat{x}_S \sum_i \kappa_i \hat{x}_{Ei} \tag{4.5}$$

између система и окружења је билинеарна (у литератури се користе верзије са оба предзнака, што не утиче на резултате), а јачина интеракције одређена је константама κ_i.

Под претпоставком да је почетно стање сложеног система $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ тензорски производ, да је окружење описано канонском расподелом, да је интеракција $\hat{H}_{SE}$ слаба, видети

---

[1] Реч је о релативности квантних корелација, правилу које уопштава у овој глави уведено *ER* правило.

[2] Под линеарним моделима подразумевају се модели где су сопствени хамилтонијани система и окружења квадратни, интеракција билинеарна и у окружењу нема интеракције међу конституентима.

Одељак 3.4, може се извести [12] (немарковљева) мастер једначина Калдеире-Легета:[3]

$$\frac{d\hat{\rho}_S(t)}{dt} = -\frac{\imath}{\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\rho}_S(t)] - \frac{\imath\gamma}{\hbar}[\hat{x}_S, \{\hat{p}_S, \hat{\rho}_S(t)\}] - \frac{2m_S\gamma k_B T}{\hbar^2}[\hat{x}_S, [\hat{x}_S, \hat{\rho}_S(t)]]; \tag{4.6}$$

која важи у домену високих температура и овде је записана у Шредингеровој слици. Витичасте заграде означавају антикомутатор; други члан у (4.6) тиче се квантне дисипације, док је последњи члан декохеренцијски.

Уведимо сада глобалне ЛКТ дефинисане на следећи начин:

$$\hat{X}_{CM} = \sum_i m_i \hat{x}_i / M, \quad \hat{\rho}_{Rl} = \hat{x}_i - \hat{x}_j, \quad l(\equiv \{i,j\}) = 1, 2, ...N-1, \tag{4.7}$$

одакле следи инверзна трансформација:

$$\hat{x}_i = \hat{X}_{CM} + \sum_{l=1}^{N-1} \omega_{li}\hat{\rho}_{Rl} \quad \text{и} \quad \hat{x}_1 \equiv \hat{x}_S, \tag{4.8}$$

са реалним коефицијентима ω.

Стављањем израза (4.8) у хамилтонијан (4.4), добија се алтернативна структура $\mathcal{S}' + \mathcal{E}'$ (при томе је $\mathcal{S}' \equiv CM$ и $\mathcal{E}' \equiv R$ у ознакама из прве главе) чији хамилтонијан гласи [48]:

$$\hat{H} = \hat{H}_{S'} + \hat{H}_{E'} + \hat{H}_{S'E'}, \tag{4.9}$$

са следећим члановима:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{S'} &= \frac{\hat{P}_{S'}^2}{2M} + \frac{M\Omega_{S'}^2\hat{x}_{S'}^2}{2} \\ \hat{H}_{E'} &= \sum_i \left(\frac{\hat{p}_{E'i}^2}{2\mu_i} + \frac{\mu_i \nu_{E'i}^2 \hat{\rho}_{E'i}^2}{2} + \hat{V}_{E'} \right) \\ \hat{H}_{S'E'} &= \pm\hat{x}_{S'} \sum_i \sigma_i \hat{\rho}_{E'i}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где је $\hat{V}_{E'} = \sum_{i\neq j} [C_{ij}\hat{p}_{E'i}\hat{p}_{E'j}/\mu_i\mu_j + (\Omega_{ij} + \omega_{Si}\Omega_j)\hat{\rho}_{E'i}\hat{\rho}_{E'j}]$; $C_{ij} = m_{E(i+1)}m_{E(j+1)}/M$ је тзв. масени поларизациони члан а $\Omega_i = \sum_j \kappa_j\omega_{ij}$, док $\Omega_{ij} = \sum_k m_{Ek}\omega_{Ek}^2\omega_{ik}\omega_{jk}/2$.

Као што се види, хамилтонијани (4.4) и (4.10) слични су до на члан $\hat{V}_{E'}$ који говори о томе да има интеракције међу степенима слободе новог окружења $\mathcal{E}'$. Овде нећемо

---

[3] У литератури се за ову мастер једначину може наћи да се назива Марковљевом, а разлог је тај што је приликом њеног извођења коришћен низ претпоставки од којих је једна тзв. Марковљева апроксимација која подразумева да стање система не зависи од претходне историје. Међутим, мастер једначина о којој је реч не може се записати у Линдбладов облик, в. Одељак 3.2, што значи да није Марковљева. А додавањем једног члана који је мали на високој температури, (4.6) добија Линдбладов облик [12].

улазити у детаље како изгледају сви чланови у (4.10), већ ћемо истаћи да је подсистем $\mathcal{S}'$ линеарни хармонијски осцилатор чак иако је подсистем $\mathcal{S}$ слободна честица.

Сличност хамилтонијана (4.4) и (4.10) не гарантује да ће се и у алтернативној структури одигравати процес декохеренције – разлог су горе поменута ограничења у извођењу мастер једначине за $\mathcal{S}'$ подсистем.

Међутим, постоји начин да се ова ограничења заобиђу. Наиме, увођењем "нормалних координата" за ново окружење $\mathcal{E}'$, $\hat{Q}_{E'i}$, и одговарајућих опсервабли импулса, $\hat{P}_{E'i}$:

$$\hat{Q}_{E'i} = \sum_m \alpha_{mi}\hat{x}_{E'm}, \quad \hat{P}_{E'i} = \sum_n \beta_{ni}\hat{p}_{E'n}, \quad [\hat{Q}_{E'i}, \hat{P}_{E'j}] = \imath\hbar\delta_{ij}, \tag{4.11}$$

Хамилтонијан (4.10) добија следећи облик:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{S'} &= \frac{\hat{P}^2_{S'}}{2M} + \frac{M\Omega^2_{S'}\hat{x}^2_{S'}}{2} \\
\hat{H}_{E'} &= \sum_i \left(\frac{\hat{P}^2_{E'i}}{2} + \frac{\lambda_i^2\hat{Q}^2_{E'i}}{2} \right) \\
\hat{H}_{S'E'} &= \pm\hat{x}_{S'} \sum_i \sigma'_i \hat{Q}_{E'i}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Дакле, полазећи од оригиналне структуре, након глобалних трансформација (4.8), а након тога локалних (4.11), стиже се до структуре $\mathcal{S}''$

$$\mathcal{S} = \{\hat{x}_S, \hat{x}_{Ei}\} \to \mathcal{S}' = \{\hat{x}_{S'}, \hat{x}_{E'i}\} \to \mathcal{S}'' = \{\hat{x}_{S'}, \hat{Q}_{E'i}\}, \tag{4.13}$$

чији је хамилтонијан изоморфан полазном (4.4). Иако је стање окружења $\mathcal{E}'$ измењено локалном трансформацијом (4.11), то не мари, јер од интереса је динамика подсистема $\mathcal{S}'$, а операција трага је базис-независна.

Будући да је успостављен изоморфизам хамилтонијана структура $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}''$, а Брауново кретање не зависи од почетних корелација у систему [12, 48], закључује се да је подсистем $\mathcal{S}'$ такође Браунова честица. Односно, како за подсистем $\mathcal{S}$ има декохеренције, онда је одвијање процеса декохеренције за $\mathcal{S}'$ подсистем доказано (наравно време декохеренције и рекуренције (очекивано време повратка у полазно стање) за ова два подсистема нису исти).

И ето користи од структурне анализе: за структуру $\mathcal{S}' + \mathcal{E}'$, за коју се идући стандардним путем теорије отворених квантних система практично ништа не би могло рећи због раније помињаних ограничења, добијена је одговарајућа мастер једначина за $\mathcal{S}'$ подсистем.

- Декомпозиција сложеног система $\mathcal{C}$ на различите подсистеме $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, или $\mathcal{D}+\mathcal{E}$, може помоћи у избегавању квантне декохеренције [55]. Квантна декохеренција је главна сметња у раду квантног хардвера, те отуда стоји на путу изградњи скалабилног квантног рачунара.

У борби против декохеренције постоје различити методи, од којих су неки: корекција грешака (*Error correction codes*) [15, 49–51], избегавање декохеренције посебном препарацијим стања кубита (*Error avoiding codes*) [15, 53], декохеренцијом-индуковано суспрезање декохеренције (ДИСД) метод [54] и др. Метод о коме ће овде бити речи [55] не заснива се на фиксираној структури сложеног система, што је заједничка карактеристика претходно поменутих метода.

Зато су од интереса ЛКТ записане у општој форми, (3.70) и (3.71): што значи да се прелази са структуре $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ на $\mathcal{D}+\mathcal{E}$, а може и супротном смеру – по претпоставци, ЛКТ (3.70) и (3.71) имају дефинисане инверзне трансформације. Јасно је да важи $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{C}=\mathcal{D}+\mathcal{E}$, а није наодмет подсетити се да, што се квантне механике затворених система тиче, обе структуре су равноправне.

Посматрајмо сада структуру $\mathcal{C}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$ као отворен систем. Даље, претпоставимо да само подсистем $\mathcal{A}$ интерагује са окружењем $\mathcal{U}$. Одговарајући хамилтонијан гласи:

$$\hat{H}_{CU}=\hat{H}_A+\hat{H}_B+\hat{H}_U+\hat{H}_{AB}+\hat{H}_{AU}. \tag{4.14}$$

Са друге стране, канонске транформације (3.70) и (3.71) уводе нове степене слободе у сложеном систему $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}=\mathcal{D}+\mathcal{E}$, па је хамилтонијан тада:

$$\hat{H}_{CU}=\hat{H}_D+\hat{H}_E+\hat{H}_U+\hat{H}_{DE}+\hat{H}_{(D+E)U}. \tag{4.15}$$

Није наодмет истаћи да се, у овом случају, ЛКТ тичу отвореног система, тј. да су локалне трансформације.

У зависности од спектралне форме интеракционог члана[4], $\hat{H}_{AU}$ ($\hat{H}_{AU}=\hat{H}_{(D+E)U}$), може се очекивати одвијање процеса декохеренције на структури $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ – тачније на подсистему $\mathcal{A}$. Из (3.67) следи да у овом случају важи $[\hat{A}_A\otimes\hat{I}_U,\hat{H}_{A+U}]=0$ што значи да може се говорити о базису бројача, односно робусним стањима подсистема $\mathcal{A}$ – крајње стање за структуру $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ ће бити облика:

$$|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B. \tag{4.16}$$

Упркос одвијању процеса декохеренције за структуру $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, може бити сплетености стања за структуру $\mathcal{D}+\mathcal{E}$, и у општем случају важи:

$$\sum_i q_i|\chi_i\rangle_D|\nu_i\rangle_E, \tag{4.17}$$

---

[4] Сетимо се да је сепарабилна спектрална форма интеракције $\hat{H}_{SE}=\sum_{i,j}\gamma_{ij}\hat{P}_{Si}\otimes\hat{\Pi}_{Ej}$ истакнута као ефективни потребни услов за постојање базиса бројача на отвореном подсистему $\mathcal{S}$ – што су управо стања у којима ће се подсистем стохастички налазити услед утицаја окружења.

тј. стање алтернативне структуре је, типично, квантно сплетено и стоји једнакост:

$$|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B = \sum_i q_i|\chi_i\rangle_D|\nu_i\rangle_E. \tag{4.18}$$

Што се декомпозиције $\mathcal{D}+\mathcal{E}$ тиче, интеракциони хамилтонијан $\hat{H}_{(D+E)U}$ може индуковати базис бројача $|\psi\rangle_{DE}$ који не мора бити сепарабилно стање јер стања $|\psi\rangle_{DE}$ образују базис (који се не може састојати само од сепарабилиних стања). Са друге стране, за очекивати је сплетено стање за $\mathcal{D}+\mathcal{E}$ структуру имајући у виду релацију (4.18) и релативност сплетености (ER). Зато се каже да је сплетеност стања са десне стране једнакости (4.18) типична.

Општа процедура за избегавање квантне декохеренције би се могла укратко формулисати овако: уместо локалних квантних опсервабли на $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ структури, могу се разматрати композитне (глобалне) опсервабле које се тичу $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ структуре. Сада, ове композитне опсервабле су локалне (в. Увод у квантне структуре физичких система за појам локалних и композитних опсервабли и њихове међусобне релативности услед различитих декомпозиција сложеног система) у односу на декомпозицију $\mathcal{D}+\mathcal{E}$, што значи да квантна сплетеност на десној страни једнакости (4.18) може бити од користи за квантно-информатичко процесирање.

На основи реченог у овом поглављу следи и специфична критика Еверетове (*Everett*) интерпретације квантне механике (*MWI*) [56].

5

Појам локалног времена

Док је класична физика заснована на појму апсолутног (Њутновог) времена (тј. временски интервал између два догађаја је исти у свим системима референције) релативистичка физика је концепт времена, као и простора, учинила релативним, везаним за референтни систем.

Стандардна квантна механика ослања се на класични концепт времена: то је скаларна величина из које следи постојање динамике система. Има ли смисла говорити о апсолутном (глобалном) времену за изоловани систем, имајући у виду универзалност Шредингеровог закона, а у оквиру нерелативистичке квантне механике? Исто питање је и у релативистичком контексту: за сваки референтни систем, време се сматра универзалним, глобалним, тј. истим за све подсистеме посматране из тог референтног система.

Са друге стране, мотивисана теоријом релативности, проистекла је идеја о увођењу посебног временског параметра за сваку фолијацију[1] у сложеном систему[2] са циљем да се избегне употреба хиперповрши симултаних догађаја (мисли се на хиперповрш у простору Минковског (*Minkowski*) коју чине догађаји који се дешавају у истом временском тренутку за датог посматрача). Тиме би сваком подсистему било придружено "локално" време.

На пример, на терену квантне механике, то би могло да значи уместо [58]:

$$\psi(t, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n), \tag{5.1}$$

употреба таласне функције:

$$\phi(t_1, \boldsymbol{x}_1, \ldots, t_n, \boldsymbol{x}_n). \tag{5.2}$$

Дакле, идеја локалног времена није нова и данас је актуелна у различитим, додуше не многобројним облицима. Овде ће бити речи о једној посебној идеји која има корен

---

[1] Фолијација је посебан начин "дељења" простор-времена на хиперповрши просторног типа, које чине догађаји у простору Минковског (*Minkowski*) за које не може се наћи референтни систем у којем би се поменути догађаји одигравали у истој тачки.

[2] Како је познато, формулација релативистичке механике система честица проблематична је управо због релативизације појмова простора и времена. На пример, описивање судара два електрона у релативистичкој квантној механици захтева Диракову једначину за два електрона. Испоставља се да таква једначина не задовољава услов релативистичке коваријантности. Као излаз из тога Дирак је предложио увођење *many-time* теорије по којој сваки електрон има "сопствено" време и задовољава "сопствену" Диракову једначину [57].

у структури многочестичних система и тумачењу такозваног Енсовог теорема у теорији многочестичног расејања [59–66].

Квантна теорија расејања је теорија која описује прелазе између стања система у континуалном делу спектра енергије.

У временској независној теорији задатак се своди на решавање својственог проблема:

$$(E - \hat{H}_0 - \hat{V})|\Psi\rangle = 0, \tag{5.3}$$

где је $E > 0$, а $|\Psi\rangle$ је својствено стање целокупног хамилтонијана $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ са енергијом E; претпоставља се да је испуњено $\lim_{r\to\infty} V(|\vec{r}|) = 0$.

Међутим, решавање својственог проблема (5.3) је све, само не једноставно – чак и за два тела. Тим пре ако у расејању учествују више "честица" могу се очекивати математички проблеми.

Испоставља се да хамилтонијан $\hat{H}$ може, у принципу, имати два спектра: дискретни (везана стања) и континуални (нормализабилна стања расејања). Укупни Хилбертов простор је ортогонални збир Хилбертовог простора ($\mathcal{H}_p$) којег чине стања из дискретног спектра и Хилбертовог простора стања из континуалног дела спектра ($\mathcal{H}_c$), односно $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_c$. Хилбертов простор $\mathcal{H}_c$ чине стања долазних и одлазних честица, односно њима придружени потпростори $\mathcal{H}_c^{in}$ и $\mathcal{H}_c^{out}$. Ако је испуњена једнакост $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_c^{in} = \mathcal{H}_c^{out}$ каже се да је теорија расејања *асимптотски комплетна.* Стања из $\mathcal{H}_c^{in}$ и $\mathcal{H}_c^{out}$ нису међусобно ортогонална – будући да граде матрицу (оператор) расејања S – што би повлачило са собом да је S нулти оператор, односно да нема расејања. Асимптотска комплетност има за последицу унитарност оператора расејања S. Физички, асимптотска комплетност значи да честица која се налази у упадном снопу, мора се наћи и у излазном снопу, и да је то потпуно сигуран догађај. Тако, на неки начин, асимптотска комплетност је стандардна (полазна) претпоставка теорије расејања, са физичке тачке гледишта.

Али, ригорозно доказивање асимптотске комплетности је комплексан математички проблем[3] и део је савремених математичких истраживања, нарочито у функционалној анализи.

Метод за решавање проблема асимптотске комплетности, за широку класу потенцијала, је дао математико-физичар Енс [59, 60]. Његов метод заснован је на кластеровању сложеног система (наравно, чине га честице које учествују у расејању, па, алтернативно, може се говорити "многочестични систем") што је основ за систематско решење када су у питању и дугодометне и краткодометне интеракције (ознака $V \equiv V_d + V_k$, каква је коришћена и у (5.3)).

Многочестични систем може имати велики број кластеризација. На пример, троделни систем $\mathcal{S} = 1 + 2 + 3$ може бити структуиран на следеће начине: $\mathcal{S}_1 = \{1, 2, 3\}$,
$\mathcal{S}_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \mathcal{S}_3 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \mathcal{S}_4 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\mathcal{S}_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ при чему "$\{*\}$" заграде означавају један кластер. Дакле, структуре $\mathcal{S}_i, i = 2, 3, 4$ су различите дводелне структуре сложеног система $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_5$ је троделна структура док $\mathcal{S}_1$ декомпозиција представља сложени систем без структуре, односно један кластер.

---

[3] Проблем асимптотске комплетности је део и класичне теорије расејања, с тим што је простор стања фазни простор који са собом носи специфичне математичке суптилности у поређењу са Хилбертовим простором. Заједничко и за квантну и класичну теорију расејања је да су честице које учествују у процесу стабилне.

За сваку од кластеризација од интереса је структура “центар маса + релативни (унутрашњи) степени слободе (*CM+R*)” многочестичног система. За R систем обично се узимају Јакобијеве (*Jacobi*) “координате” [67]. Ако се разматра хамилтонијан који садржи двочестичне интеракције зависне само од растојања међу честицама, онда све те интеракције у (*CM+R*) структури појављују се у облику спољашњих поља за неке степене слободе система (R); појам поља, за разлику од интеракције, уведен је у Глави 3.

Многочестично расејање подразумева задатак узимања у обзир свих могућих кластеризација (структура добијених груписањем) једног многочестичног система. За сваки кластер уводи се *CM+R* структура и расејање се тиче расејања центара маса за дати кластер. Иста слика се понавља за све могуће кластере. Физички, ти кластери могу бити атоми, молекули, или неке “елементарне” честице. Расејање у многочестичном систему се тиче расејања центара маса подсистема у свим могућим кластеризацијама целине.

Проблем многочестичног расејања у теоријском моделу потиче од чињенице да за сваку кластеризацију поменути центри маса морају бити невезани један за други, то јест представљати независне (квантне) честице (невезана стања центара маса – *unbound states*). Поставља се питање како то испунити, истовремено, за све кластеризације. У једном кластеру једне кластеризације може бити веза које су забрањене за неке кластере неке друге кластеризације. Одговор на последње питање је у, поменутом, Енсовом методу.

Посматрајмо сада *затворени* систем $\mathcal{S}$ од N честица са хамилтонијаном $\hat{H}$ и Хилбертовим простором стања $\mathcal{H}$. Нека су оператори положаја и импулса појединих честица $\hat{x}_i$ и $\hat{p}_i$, при чему важи: $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \imath\hbar\delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3, ..., N$. Систем може бити подељен на кластере тако да се кластер састоји од 1 до N честица. Елементарном структуром ћемо називати кластеризацију где је у сваком кластеру само једна честица:

$$\mathcal{S}_e = \{\{1\}, \{2\}, ..., \{N\}\}. \tag{5.4}$$

Сада, нека је од интереса структура $\mathcal{S}_b$ са k кластера, $\mathcal{S}_b = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$, тако да је N_i честица у i-том кластеру а важи да је $\sum_i^k N_i = N$. За сваки кластер уведимо опсерваблу положаја центра масе и Јакобијеве релативне опсервабле положаја: $\hat{X}^b_{CMi}$ и $\hat{x}_l^{C_{bi}}$, редом, где је $l = 1, 2, 3..., N_i - 1$. На тај начин дефинисане су опсервабле унутар сваког кластера, за дату структуру $\mathcal{S}_b$, $\hat{x}^b = \{\hat{x}^{C_{b1}}, \hat{x}^{C_{b2}}, ..., \hat{x}^{C_{bk}}\}$.

За скуп опсервабли положаја центара маса појединачних центара маса Јакобијеве трансформације координата дефинишу центар масе целе структуре и Јакобијеве опсервабле релативног положаја између самих кластера, $\{\hat{x}_{b1}, \hat{x}_{b2}, ..., \hat{x}_{bk}\}$. Одговарајуће опсервабле импулса, $\hat{p}^l$ и $\hat{p}_l$, па је комутатор за релативне опсервабле положаја међу кластерима и одговарајућих импулса дата једнакошћу $[\hat{x}_i^l, \hat{p}_j^{l'}] = \imath\hbar\delta_{ij}\delta_{ll'}$, и слично за опсервабле унутар самих кластера.

Целокупни Хилбертов простор стања онда се факторише на следећи начин:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{CM} \otimes \mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}^b, \tag{5.5}$$

где је $\mathcal{H}_b$ Хилбертов простор међукластерских опсервабли, $\mathcal{H}^b$ Хилбертов простор унутаркластерских опсервабли.

Бирајући за референтни систем центар масе целог система, односно бирајући да је

$\hat{X}_{CM} = 0$, факторизација (5.5) прелази у:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}^b. \tag{5.6}$$

при чему важи $b \neq b'$, $\mathcal{H}_b \neq \mathcal{H}_{b'}$ и $\mathcal{H}^b \neq \mathcal{H}^{b'}$, док $\mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}^b = \mathcal{H}_{b'} \otimes \mathcal{H}^{b'}$.

Хамилтонијан укупног система, за структуру (5.4), у компактном запису, је (са стандардном скраћеницом $\hat{x}_{ij} = \hat{x}_i - \hat{x}_j$):

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \hat{T}_i + \sum_{i \neq j = 1}^{N} V(|\hat{x}_{ij}|), \tag{5.7}$$

где $\hat{T}$ ознака за кинетичку енергију, а потенцијали V су двочестичне интеракције између честица.

Може се показати да за b-ту структуру, хамилтонијан прилагођен декомпозицији (5.6) гласи [61, 62]:

$$\hat{H} = \hat{T}_b \otimes \hat{I}^b + \hat{I}_b \otimes \hat{H}_0^b + \hat{V}^{(b)}; \tag{5.8}$$

при чему је $\hat{T}$ кинетички члан, $\hat{H}_0$ је сопствени хамилтонијан а $\hat{V}^{(b)}$ обухвата све могуће (у кластерима и међу кластерима) интеракције у b-тој структури.

За хамилтонијан целине, (5.8), који је једнозначно дефинисан, увек постоје јасно разграничени дискретни и континуални спектар. Дискретни спектар једнозначно дефинише скуп (ортогоналних) пројектора који одговарају везаним стањима (*bound states*). По дефиницији, расејање се описује одбацивањем стања која припадају потпростору Хилбертовог простора који одговара дискретним својственим вредностима. Оно што од Хилбертовог простора (ХП) преостаје одговара континуалном спектру и назива се скуп "стања расејања (СР)" (*scattering states*). Тада су сва стања од интереса само СР, која су нормализабилна, али нису својствена за хамилтонијан.

Процедура одбацивања везаних стања заснива се на увођењу пројектора који пројектују на дискретни део спектра и пројектора који пројектују на континуални део спектра [63]; обележимо ове последње са $\tilde{P}_b^{M_b^m}$, где је индекс m од важности јер пребројава временске тренутке, а индекс b односи се на b-ту структуру, $\mathcal{S}_b$.

Сада се може формулисати теорем:

Теорем 5.1. *[Енсов теорем] За свако квантно стање $|\Psi\rangle$ и широку класу потенцијала $\hat{V}$ важи:*

$$\left\| \left(\frac{\hat{x}_b}{t_m} - \hat{v}_b \right) \tilde{P}_b^{M_b^m} e^{-\frac{\imath t_m \hat{H}}{\hbar}} |\Psi\rangle \right\| \to 0. \tag{5.9}$$

Ознаке: $\hat{v}_b = \mu_b^{-1} \hat{p}_b$ "оператор брзине" и μ_b је ознака за дијагоналну матрицу на чијој дијагонали се налазе међукластерске редуковане масе које се јављају приликом Јакобијевих трансформација. Лимес у (5.9) значи да $m \to \pm\infty$ за сваку структуру осим за структуру која се састоји од једног кластера, $k = 1$. Ознака за норму је стандардна $\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$, при чему је $\langle \psi | \psi \rangle$ скаларни производ у Хилбертовом простору. Израз (5.9) обухвата сва могућа расејања за затворени систем $\mathcal{S}$, док су хамилтонијан, $\hat{H}$, и временски тренуци, t_m, *заједнички за све структуре.* Коначне вредности индекса m[4] не дају једнозначно локално време, већ за $m \to \pm\infty$ при чему је за наведене вредности индекса m лимес у Енсовом теорему монотон, тј. нема рекуренције. У пракси довољно велики и индекс m и индекс $m+1$ задовољавају Енсов теорем, па постоји неодређеност временског[5] тренутка t_m, што је запажање од значаја за каснију разраду схеме локалног времена (в. релацију (9.6)).

Једну посебну интерпретацију Енсовог теорема дао је математичар Китада [64–66]: унитарни оператор временске еволуције генерисан је хамилтонијаном, али физичка природа броја t, којег у стандардној квантној механици називамо временом у Њутновом смислу, не мора бити *a priori* дефинисана. Овакав отклон од стандардне предрасуде о универзалном, њутновском, времену одмах води идеји: Време није фундаментални појам већ последица динамике коју генерише хамилтонијан. За један хамилтонијан имамо само једно време, па отуда:

$$\boxed{1 \text{ хамилтонијан} \Leftrightarrow 1 \text{ време.}}$$

То јест, један затворени квантни систем, једно време. И при томе време је дефинисано само *асимптотски.* За коначне вредности t, Енсов теорем важи само приближно. Отуда: сваки (макар приближно) затворени систем који се описује (макар приближно) Шредингеровим законом, има своје време које протиче другачије од свих других система. Сви степени слободе затвореног система имају исто време. Динамика свемира као целине прерасподељује скоро-затворене системе а отуда и одговарајућа локална времена.

Из израза (5.9) који је заједнички за све струкутуре (кластеризације) може се прочитати, а у складу са интерпретацијом Китаде, да мерењем $\hat{x}_b$ и $\hat{v}_b$ оператора и добијањем одговарајућих очекиваних вредности, $\langle\hat{x}_b\rangle$ и $\langle\hat{v}_b\rangle$, може се дати процена (локалног) времена за целокупни систем:

$$\frac{\langle\hat{x}_b\rangle}{\langle\hat{v}_b\rangle} \sim t. \tag{5.10}$$

Коначно, да би се утврдило локално време и правила у вези са њим, све што је неопходно записано је у хамилтонијану система сходно следећим правилима:

(а) Системи са различитим хамилтонијанима (различити број честица, различите врсте честица или различите врсте интеракција међу честицама) имају различита локална времена;

(б) Системи који међусобно интерагују имају заједничко локално време;

(в) Било која два слабо интерагујућа система који имају независне унитарне динамике немају заједничко време;

(г) Локално време односи се и на (апстрактно замишљено) међусобно идентичне многочестичне системе, све док су такви системи међусобно независни – овиме је имплицитно исказан однос ансамбла и локалног времена за елемент ансамбла.

---

[4] Примећује се дискретност индекса – то је стога што доказ теорема није познат за континуално t.

[5] Ово је један аспект неодређености времена у схеми локалног времена. Неодређеност времена је и последица важења *no-cloning* теорема, као и ансамбалског приступа који је ће у главама 9 и 10 бити подразумеван.

Последице правила (а)-(г) су:

- Ако два система која немају исто локално време почну да интерагују, тада дефинишу почетни тренутак $t = 0$ од којег њихово заједничко локално време почиње да тече; типичне ситуације: квантно мерење, јака интеракција у квантној декохеренцији;
- Ако је интеракција испод неког прага јачине, онда системи остају приближно затворени један за други и не деле заједничко време. Ово треба разликовати од појма "слаба интеракција" у теорији отворених система. "Слаба интеракција" је "јака" у смислу појма локалног времена, али је за неке практичне потребе "слаба". Дакле, систем када интерагује са окружењем, то је јака интеракција (изнад неког прага) у смислу схеме локалног времена;
- Када се два система која деле исто локално време довољно далеко разиђу, и њихова интеракција падне испод горе поменуте границе, онда они постају независни и сваки од њих стиче своје локално време.

У даљем раду (мисли се на излагање у Глави 9 и Глави 10) горе наведена правила ће бити сматрана универзалним квантно-механичким правилима.

II Истраживачки део рада и резултати

6

Релативност квантног дискорда

Потрага за квантно-информатичким ресурсима и начинима за њихово оперативно коришћење је у средишту савремених квантно-механичких истраживања. Откриће квантног дискорда отворило је нови правац у истраживању квантно-информатичког процесирања [25, 26, 68, 69].

У Глави 4 истакнута је релативност квантне сплетености (ER) – свако чисто стање неког сложеног (дводелног) система има квантну сплетеност, макар за једну дводелну структуру тог система. Подсетимо се да формално то гласи (видети теорем 4.1):

$$|i\rangle_1|j\rangle_2 = \sum_{\alpha,\beta} C^{ij}_{\alpha\beta}|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B, \quad C_{\alpha\beta} \neq a_\alpha b_\beta, \sum_{\alpha,\beta} C^{ij}_{\alpha\beta} C^{i'j'}_{\alpha\beta} = \delta_{ii'}\delta_{jj'}, \tag{6.1}$$

где се лева страна односи на декомпозицију $1+2$, док је са десне стране алтернативна декомпозиција $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ сложеног система; други део (6.1) је услов нормираности стања. Што се ове главе тиче, излагање ће се тицати, пре свега, система са континуалним степенима слободе.

Са друге стране, квантни дискорд [23–26] уводи појам квантних корелација које нису сводиве на квантну сплетеност, осим ако је у питању чисто стање. Чиста стања су градивни елементи квантних мешаних стања, па се намеће питање: има ли смисла говорити о релативности квантног дискорда?

Посматрајмо $1+2$ структуру сложеног система $\mathcal{C}$. Једнострани дискорд $\mathcal{D}^{\rightarrow}_{1:2} = 0$ (в. стање (2.27)) акко је стање сложеног система, $\hat{\rho}_C$, облика:

$$\hat{\rho}_C = \sum_k p_k |k\rangle_1\langle k| \otimes \hat{\rho}_{2k}, \quad \sum_k p_k = 1. \quad \langle k|k'\rangle = \delta_{kk'} \tag{6.2}$$

а важи и да је $\mathcal{D}^{\leftarrow}_{1:2} \neq 0$.

Увођење $\hat{\rho}_{2k} = \sum_l \omega^k_l |\chi^k_l\rangle_2\langle\chi^k_l|$, $\sum_l \omega^k_l = 1, \forall k$ у једначину (6.2) даје следеће стање:

$$\hat{\rho}_C = \sum_{k,l} p_k \omega^k_l |k\rangle_1\langle k| \otimes |\chi^k_l\rangle_2\langle\chi^k_l|. \tag{6.3}$$

Коришћењем релативности сплетености, (6.1), уведимо у разматрање алтернативну структуру $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ у разматрање.

Ако би било узето да је, у супротности са (6.1), стање обеју структура тензорски производ $|k\rangle_1|\chi_l^k\rangle_2 = |k\rangle_A|\phi_l^k\rangle_B, \forall k$ онда би стање за структуру $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ гласило:

$$\hat{\rho}_C = \sum_k p_k |k\rangle_A\langle k| \otimes \hat{\rho}_{Bk}, \quad \sum_k p_k = 1, \tag{6.4}$$

тј. било би истог облика као и стање (6.2); јасно и за стање (6.4) по аналогији важи $\mathcal{D}^{\rightarrow}_{A:B} = 0$.

Ако се, пак, узме у обзир релативност сплетености, (6.1), онда је стање за алтернативну структуру облика:

$$\hat{\rho}_C = \sum_{k,l,\alpha,\beta} p_k \omega_l^k C^{kl}_{\alpha\beta} C^{kl*}_{\alpha\beta'} |\alpha\rangle_A\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle_B\langle\beta| + \sum_{k,l,\alpha\neq\alpha',\beta\neq\beta'} p_k \omega_l^k C^{kl}_{\alpha\beta} C^{kl*}_{\alpha'\beta'} |\alpha\rangle_A\langle\alpha'| \otimes |\beta\rangle_B\langle\beta'|. \tag{6.5}$$

Да би стање (6.5) било облика (6.3), односно да би важило $\mathcal{D}^{\rightarrow}_{A:B} = 0$, други сабирак на десној страни израза (6.5) мора бити идентички нула, формално:

$$\sum_{k,l,\alpha\neq\alpha',\beta\neq\beta'} p_k \omega_l^k C^{kl}_{\alpha\beta} C^{kl*}_{\alpha'\beta'} |\alpha\rangle_A\langle\alpha'| \otimes |\beta\rangle_B\langle\beta'| = 0.$$

Обзиром да су стања облика $|\alpha\rangle_A\langle\alpha'| \otimes |\beta\rangle_B\langle\beta'|$ линеарно независна, једнакост нули је могућа под условом

$$\sum_{k,l} p_k \omega_l^k C^{kl}_{\alpha\beta} C^{kl*}_{\alpha'\beta'} = 0, \forall\alpha\neq\alpha', \forall\beta\neq\beta'. \tag{6.6}$$

Једнакост (6.6) је у ствари систем симултаних једначина, при чему је број једначина једнак броју комбинација за индексе $\alpha\neq\alpha'$ и $\beta\neq\beta'$. За дводелни систем са континуалним степепенима слободе овај број је бесконачан.

Са друге стране, постоји слобода у избору коефицијената p_k и ω_l^k, што поред услова нормирања $\sum_{\alpha,\beta} C^{kl}_{\alpha\beta} C^{k'l'*}_{\alpha\beta} = \delta_{kk'}\delta_{ll'}$ (из (6.1)) смањује број израза који у (6.6) могу да буду симултано задовољени. Дакле, не могу се искључити стања облика (6.4) за обе структуре $1+2$ и $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Али, и поред тога, за сваку комбинацију коефицијената $C^{kl}_{\alpha\beta}$ који задовољавају (6.6) има неограничен број варијација коефицијената p_k и ω_l^k који не задовољавају услов (6.6). То значи, да у пракси, можемо занемарити стања која задовољавају (6.6), односно стања са нултим једностраним дискордом за пар струкутура $1+2$ и $\mathcal{A}+\mathcal{B}$.

Што се тиче двостраног дискорда (који је већи од једностраног дискорда), за структуру $1+2$, биће једнак нули ако је стање сложеног система облика (упоредити са (2.26)):

$$\hat{\rho}_C = \sum_{kl} p_{kl} |k\rangle_1\langle k| \otimes |l\rangle_2\langle l|, \quad \sum_{k,l} p_{kl} = 1. \tag{6.7}$$

Опет, ако се претпостави неважење релативности сплетености, односно да важи једнакост $|k\rangle_1|l\rangle_2 = |k\rangle_A|l\rangle_B, \forall k,l$ и за алтернативну структуру $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ ће стање бити облика (6.7).

Али, заменом $|k\rangle_1|l\rangle_2$ са десном страном једнакости (6.1) у стање (6.7) следи:

$$\hat{\rho}_C = \sum_{k,l,\alpha,\beta} p_{kl}|C^{kl}_{\alpha\beta}|^2|\alpha\rangle_A\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle_B\langle\beta| + \sum_{k,l,\alpha\neq\alpha',\beta\neq\beta'} p_{kl}C^{kl}_{\alpha\beta}C^{kl*}_{\alpha'\beta'}|\alpha\rangle_A\langle\alpha'| \otimes |\beta\rangle_B\langle\beta'|. \tag{6.8}$$

Да би стање (6.8) било класично-класично и за $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ структуру потребно је да буде задовољен следећи услов:

$$\sum_{k,l} p_{kl}C^{kl}_{\alpha\beta}C^{kl*}_{\alpha'\beta'} = 0, \forall\alpha \neq \alpha', \forall\beta \neq \beta'. \tag{6.9}$$

Једнакост (6.9) је специјалан случај система једначина (6.6) па је број стања који задовољава (6.9) практично занемарљив. Као и у случају једностраног дискорда, могу се занемарити стања која имају нулти двострани дискорд и за структуру $1+2$ и за структуру $\mathcal{A}+\mathcal{B}$.

Зато се може рећи да су квантне корелације свеприсутне у квантним системима: ако нема корелација за полазну структуру (дискорд је нула) онда за алтернативну структуру практично увек има квантних корелација (дискорд различит од нуле). Отуда термин "релативност квантних корелација" (*quantum correlation relativity – QCR*). Дакле, *QCR* је последица универзално важеће квантне механике и формално може се исказати уз помоћ следеће релације (а слично овоме и за једнострани дискорд):

$$\begin{aligned}\sum_k p_k|k\rangle_1\langle k| \otimes |k\rangle_2\langle k| &= \sum_{k,l,\alpha,\beta} p_{kl}|C^{kl}_{\alpha\beta}|^2|\alpha\rangle_A\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle_B\langle\beta| \\ &+ \sum_{k,l,\alpha\neq\alpha',\beta\neq\beta'} p_{kl}C^{kl}_{\alpha\beta}C^{kl*}_{\alpha'\beta'}|\alpha\rangle_A\langle\alpha'| \otimes |\beta\rangle_B\langle\beta'|. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Другим речима: квантне ("некласичне") корелације карактеристика су структуре сложеног система, што је закључак аналоган ономе који већ постоји за релативност квантне сплетености (*ER*), в. Главу 2. Будући да квантни дискорд обухвата и квантну сплетеност, може се рећи да је *QCR* уопштење појма *ER*, уз напомену да је *QCR* потребан услов за постојање *ER*.

Међутим, претходни закључак није добијен на основи ригорозног доказа: *QCR* је плаузабилна тврдња која, чини се, не оставља много простора изузецима. На путу ригорозном доказу стоје бар две препреке. Оно што је једна од препрека заправо је сам квантни дискорд – квантни дискорд није канонска мера квантних корелација. Дакле, за почетак, потребна је канонска мера (ако постоји) квантних корелација – мера коју, по свој прилици, није једноставно изнаћи. Друга препрека потиче од проблема утврђивања квантне сепарабилности[1], за који се зна да спада у тешке проблеме теорије комплексности[2] [70]. Решавање система једначина (6.6) и (6.9) спада у примере *QUSEP*-а, што би значило

---

[1] Тзв. *quantum separability problem* или *QUSEP* скраћено.

[2] Заправо, реч је о проблему који се назива *NP-hard*, а за такве проблеме сумња се (мада није доказано), да не могу се решити (извршити) на рачунару у полиномском времену.

да је решавање таквих система једначина рачунарски (мисли се на класичне рачунаре) неизводиво.

Иако допушта изузетке, закључак о *QCR* има своју оперативну вредност: да би се искористиле квантне корелације у систему, као информатички ресурс, није потребна препарација стања у полазној структури система. Бирањем одговарајућих локалних опсервабли за алтернативну структуру, у којој по правилу има корелација, отвара се могућност за процесирање на квантним системима.

Како је било поменуто на почетку ове главе, од интереса за излагање били су системи са континуалним степенима слободе. Разлог томе је што се ЛКТ формулишу углавном за такве системе, док за дискретне системе (који су, доминантно од интереса што се задатака квантне информатике тиче) правих ЛКТ и нема. На терену дискретних степени слободе од интереса су тривијалне ЛКТ (в. Главу 1), какво је прегруписавање кубита. О таквом пример је већ било речи: в. Главу 1, о квантној телепортацији.

Дакле, релативност квантних корелација може се очекивати и користити у сложеним квантним системима независно од тога какви степени слободе су у питању. Правило о *QCR*, такође, независно је од тога да ли се разматрају (не)Марковљеви системи.

Релативност квантних корелација сада се појављује као темељ свих области, тема и задатака који се тичу квантних корелација, као што су дефинисање "класичности", квантно-информатичко процесирање, одвијање декохеренције, прелаз са "квантног на класично", квантно заснивање феноменолошке термодинамике итд.

7

Нека ограничења пројекционог метода Накаџиме-Цванцига

Реални (сложени) системи непрекидно измењују конституенте са окружењем. Оваква ситуација је добро описана у класичној статистичкој физици[1], за систем у термодинамичкој равнотежи, великим канонским ансамблом. Оно што класична физика подразумева је то да додавање или одузимање неког броја честица систему не мења принципијелно (већ само нумерички) динамику физичког система. Тако је, на пример, и са класичним Брауновим кретањем: Браунова честица има око себе молекуле флуида који образују слој око честице и непрестано се лепе на честицу или напуштају њену површину.

Управо је квантно Брауново кретање [12, 28] згодан пример којим могу да се истакну разлике које се јављају између класичног и квантног описа система који размењују честице са окружењем.

Разматрајмо хамилтонијан Калдеире-Легета, за једнодимензионални систем $\mathcal{S}$ са окружењем $\mathcal{E}$ које се састоји од неинтерагујућих линеарних хармонијских осцилатора:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{SE}, \tag{7.1}$$

где су чланови у (7.1) следећи:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_S &= \sum_{i=1}^{N_S} \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i\neq j=1}^{N_S} V(|\hat{x}_i - \hat{x}_j|), \\
\hat{H}_E &= \sum_{\alpha=1}^{N_E} \left(\frac{\hat{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2} m_\alpha \omega_\alpha^2 \hat{x}_\alpha^2 \right), \\
\hat{H}_{SE} &= \hat{X}_{CM} \otimes \sum_{\alpha=1}^{N_E} \kappa_\alpha \hat{x}_\alpha;
\end{aligned} \tag{7.2}$$

---

[1] Поређења ради, у квантној статистичкој физици, велики канонски ансамбл је доминантно у употреби у односу на друге типове ансамбла.

латинични индекси односе се на систем, а грчки на окружење. V стоји за интеракције унутар система, а $\hat{X}_{CM} = \sum_{i=1}^{N_S} m_i \hat{x}_i / M$ је опсервабла центра маса система чија укупна маса је $M = \sum_{i=1}^{N_S} m_i$. Систем има N_S а окружење N_E честица. Овде је важно приметити да су у запису сопственог хамилтонијана система у (7.2) експлицитно присутни степени слободе самог система за разлику од записа (4.4). Наравно, оба хамилтонијана описују исту физичку ситуацију – запис (7.1), односно (7.2) је погоднији за дискусију у овој глави.

Нека сада $i_\circ$-та честица система $\mathcal{S}$ пређе у окружење. Онда, уместо система $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ имамо системе $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus i_\circ$ и $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup i_\circ$, што је пример прегруписавања честица, формално записиво као:

$$\{\mathcal{S}, \mathcal{E}\} \rightarrow \{\mathcal{S}', \mathcal{E}'\}. \tag{7.3}$$

Сложени систем $\mathcal{C}$, као целина гледано остаје нетакнут, $\mathcal{S} + \mathcal{E} = \mathcal{C} = \mathcal{S}' + \mathcal{E}'$.

Хамилтонијан, након трансформације (7.3), добија следећи облик:

$$\hat{H} = \hat{H}_{S'} + \hat{H}_{E'} + \hat{H}_{S'E'}, \tag{7.4}$$

где су

$$\begin{aligned} \hat{H}_{S'} &= \sum_{i=1}^{N_S-1} \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i\neq j=1}^{N_S-1} V(|\hat{x}_i - \hat{x}_j|), \\ \hat{H}_{E'} &= \hat{H}_E + \frac{\hat{p}_{i_\circ}^2}{2m_{i_\circ}} + \frac{1}{M}\hat{x}_{i_\circ} \otimes \sum_{\alpha=1}^{N_E} \kappa_\alpha \hat{x}_\alpha, \\ \hat{H}_{S'E'} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N_S-1} m_i \hat{x}_i \otimes \sum_{\alpha=1}^{N_E} \kappa_\alpha \hat{x}_\alpha + \sum_{j=1}^{N_S-1} V(|\hat{x}_{i_\circ} - \hat{x}_j|). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Два модела (7.1) и (7.4) могу се сматрати сличан један другоме под следећим условима:

i. За $N_S \gg 1$, целокупна маса $M \approx M' = \sum_{i=1}^{N_S-1} m_i$,

ii. За велико M (тј. M'), може се занемарити последњи члан у $\hat{H}_{E'}$ или могу се увести нормалне координате за ново окружење $\mathcal{E}'$,

iii. Ако се "додатак" $\sum_{j=1}^{N_S-1} V(|\hat{x}_{i_\circ} - \hat{x}_j|)$ у интеракционом члану $\hat{H}_{S'E'}$ може узети за пертурбацију.

Класична интуиција налаже да се, након упрошћења i.-iii., могу очекивати сличне динамике за подсистеме $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$. Али, показаћемо да у квантном домену оваква интуиција нема оправдања.

Како је речено у Глави 3, пројекциони метод Накаџиме-Цванцига је основни метод за извођење једначине кретања за квантни отворени подсистем $\mathcal{S}$. Подсетимо се – уводе се пројектори[2] $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ тако да важи:

$$\mathcal{P}\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E, \tag{7.6}$$

са особинама $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ и $\mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P}$ такав да $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$. Пројекција (7.6) садржи све потребне информације о редукованом стању, $\hat{\rho}_S(t)$, подсистема $\mathcal{S}$. При свему овоме важи $\hat{\rho}_E \neq tr_S\hat{\rho}$, јер у супротном добија се нелинеарна мастер једначина.

Али, како смо видели у претходној глави, ако је стање полазне структуре $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ облика $\hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E$, онда се по *QCR* правилу за алтернативну структуру $\mathcal{S}' + \mathcal{E}'$, типично, очекују квантне корелације, тј. важи:

$$\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E = \sum_i \lambda_i \hat{\rho}_{S'i} \otimes \hat{\rho}_{E'i}, \quad \sum_i \lambda_i = 1. \tag{7.7}$$

Обзиром да релативност квантних корелација (*QCR*) не имплицира релативност сплетености (*ER*), у овој глави ће од интереса бити *ER*:

$$|\phi\rangle_S \otimes |\chi\rangle_E = \sum_i c_i |i\rangle_{S'} \otimes |i\rangle_{E'}, \tag{7.8}$$

тј. *ER* је довољно за постојање *QCR*.

Поред тога што стање "новог окружења", $\mathcal{E}'$, више не мора бити термално, корелације у новој структури могу довести у питање и комплетну позитивност динамике подсистема $\mathcal{S}'$ – о чему је већ било речи у — Глави 4. Из овога се наслућује ограничење пројекционог метода: познавање динамике подсистема $\mathcal{S}$ није довољно да би се могла извести динамика алтернативног отвореног система $\mathcal{S}'$. Што се тиче алтернативне структуре, мора се кренути од почетка, што је заиста у супротности са класичном интуицијом.

Будући да додавање и одузимање једне или више честица отвореном систему представља пример тривијалних ЛКТ (прегруписавање сложеног система), од интереса је испитати какве су последице и нетривијалних ЛКТ на примену пројекционог метода. Дакле, преструктурирање $\mathcal{S} + \mathcal{E} = \mathcal{C} = \mathcal{S}' + \mathcal{E}'$, надаље, значи да су у питању произвољне ЛКТ.

У вези са последњим питањем су следеће две леме.

Лема 7.1. *Важење*

$$tr_E \mathcal{Q}\rho(t) = tr_E(\hat{\rho}(t) - \mathcal{P}\hat{\rho}(t)) = tr_E(\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E) = 0, \quad \forall t. \tag{7.9}$$

за динамику подсистема $\mathcal{S}$ *имплицира неважење*

$$tr_{E'} \mathcal{Q}\hat{\rho}(t) = tr_{E'}(\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E) = 0, \forall t, \tag{7.10}$$

---

[2] Комплетности ради, треба напоменути да се у литератури могу наћи и пројекције дефинисане на следећи начин: (i) $\mathcal{P}\hat{\rho}(t) = \sum_n (tr_E \hat{P}_{Sn}\hat{\rho}(t)) \otimes \hat{\rho}_{En}$, (ii) $\mathcal{P}\hat{\rho}(t) = \sum_i (tr_E \hat{P}_{Ei}\hat{\rho}(t)) \otimes \hat{P}_{Ei}$ са произвољним ортогоналним пројекторима за подсистем $\mathcal{E}$. Али, пројекција дефинисана са (7.6) је од најшире употребе што се тиче основа квантне теорије отворених система.

и обратно.

Доказ.

Полазећи од $tr_E \mathcal{Q}\hat{\rho}(t) = 0, \forall t$, потребно је изнаћи услове под којима ће бити испуњено $tr_{E'}\mathcal{Q}\hat{\rho}(t) = 0, \forall t$. Јасно, пројектор $\mathcal{Q}$ односи се само на $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ декомпозицију.

Дефиниција $\mathcal{Q}$ подразумева дефиницију пројектора $\mathcal{P}$, која је овде опет дата ради прегледности излагања:

$$\mathcal{P}\hat{\rho} = (tr_E\hat{\rho}) \otimes \hat{\rho}_E. \tag{7.11}$$

Разматраћемо засебно случајеве А. чистог и Б. мешаног стања за сложени систем.

А. Чисто стање: $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, за које важи $tr_E\mathcal{Q}|\Psi\rangle\langle\Psi| = 0$.

Нека је чисто стање задато у (нееднозначној) Шмитовој форми:

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle_S |i\rangle_E, \tag{7.12}$$

одакле следи $\hat{\rho}_S = tr_E|\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_i p_i |i\rangle_S\langle i|$, $p_i = |c_i|^2$, а стање окружења је представљено статистичким оператором $\hat{\rho}_E$. Већ је било речи о томе да је у квантној теорији отворених система уобичајено да се стање окружења задаје, типично, као стационарно стање (што знатно упрошћава процедуру извођења мастер једначине), па је стога $\hat{\rho}_E = \sum_\alpha \pi_\alpha |\alpha\rangle_E\langle\alpha|$ (записано у својој спектралној форми).

Имајући у виду последње напомене и да се стања окружења у (7.12) могу записати као $|i\rangle = \sum_\alpha C_{i\alpha}|\alpha\rangle_E, \forall i$, стање целине, $|\Psi\rangle$, тада гласи:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,\alpha} c_i C_{i\alpha} |i\rangle_S |\alpha\rangle_E, \tag{7.13}$$

где морају бити задовољени услови нормирања:

$$\sum_i |c_i|^2 = 1 = \sum_\alpha \pi_\alpha, \sum_\alpha |C_{i\alpha}|^2 = 1, \forall i. \tag{7.14}$$

Тада пројекција $\mathcal{Q}$ даје:

$$\mathcal{Q}|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Psi\rangle\langle\Psi| - \sum_{i,\alpha} p_i \pi_\alpha |i\rangle_S\langle i| \otimes |\alpha\rangle_E\langle\alpha|. \tag{7.15}$$

Уведимо у разматрање алтернативну структуру $\mathcal{S}' + \mathcal{E}'$, чије ће стање због релативности сплетености (ER) бити:

$$|i\rangle_S |\alpha\rangle_E = \sum_{m,n} D^{i\alpha}_{mn} |m\rangle_{S'} |n\rangle_{E'}, \tag{7.16}$$

и при томе мора бити задовољен систем једначина:

$$\sum_{m,n} D^{i\alpha}_{mn} D^{i'\alpha'*}_{mn} = \delta_{ii'}\delta_{\alpha\alpha'}. \tag{7.17}$$

Стављајући (7.13) и (7.16) у (7.15) следи:

$$\sum_{m,m'n,n'} [\sum_{i,i',\alpha,\alpha'} c_i C_{i\alpha} c^*_{i'} C^*_{i'\alpha'} D^{i\alpha}_{mn} D^{i'\alpha'*}_{m'n'} - \sum_{i,\alpha} p_i \pi_\alpha D^{i\alpha}_{mn} D^{i\alpha\ *}_{m'n'}] |m\rangle_{S'}$$
$$\langle m'| \otimes |n\rangle_{E'} \langle n'|. \tag{7.18}$$

Након узимања трага по степенима слободе окружења $\mathcal{E}'$, добија се:

$$\sum_{m,m'} \{ \sum_{i,\alpha,n} \sum_{i',\alpha'} c_i C_{i\alpha} c^*_{i'} C^*_{i'\alpha'} D^{i\alpha}_{mn} D^{i'\alpha'*}_{m'n} - p_i \pi_\alpha D^{i\alpha}_{mn} D^{i\alpha*}_{m'n} \} |m\rangle_{S'} \langle m'|. \tag{7.19}$$

Према томе, важи еквиваленција:

$$tr_{E'} \mathcal{Q} |\Psi\rangle\langle\Psi| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,\alpha,n} [\sum_{i',\alpha'} c_i C_{i\alpha} c^*_{i'} C^*_{i'\alpha'} D^{i\alpha}_{mn} D^{i'\alpha'*}_{m'n} - p_i \pi_\alpha D^{i\alpha}_{mn} D^{i\alpha*}_{m'n}]$$
$$= 0, \forall m, m'. \tag{7.20}$$

Уводећи скраћеницу, $\Lambda^m_n \equiv \sum_{i,\alpha} c_i C_{i\alpha} D^{i\alpha}_{mn}$, прегледности ради, може се писати:

$$tr_{E'} \mathcal{Q} |\Psi\rangle\langle\Psi| = 0 \Leftrightarrow A_{mm'} \equiv \sum_n [\Lambda^m_n \Lambda^{m'*}_n - \sum_{i,\alpha} p_i \pi_\alpha D^{i\alpha}_{mn} D^{i\alpha*}_{m'n}] = 0, \forall m, m'. \tag{7.21}$$

Уочити да је

$$\sum_m A_{mm} = 0, \tag{7.22}$$

што је еквивалентно са $tr \mathcal{Q} |\Psi\rangle\langle\Psi| = 0$.

Б. Мешано стање.

Нека је сада стање целине задато мешаним, сепарабилним стањем, са одговарајућим спектралним формама статистичких оператора подсистема $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$:

$$\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i \hat{\rho}_{Si} \hat{\rho}_{Ei}, \quad \hat{\rho}_{Si} = \sum_m p_{im} |\chi_{im}\rangle_S \langle \chi_{im}|, \hat{\rho}_{Ei} = \sum_n \pi_{in} |\phi_{in}\rangle_E \langle \phi_{in}|. \tag{7.23}$$

За горње стање, (7.23), важи $tr_E \mathcal{Q} \hat{\rho} = 0$, како сам пројекциони метод тражи. На основи особина пројекционих оператора, јасно је да мора да важи $\hat{\rho}_E = \sum_q \omega_q |\psi_q\rangle_E \langle\psi_q| \neq tr_S\hat{\rho}$ а при томе стање подсистема је $\mathcal{S}$, $tr_E\hat{\rho} = \sum_p \kappa_p|\varphi_p\rangle_S\langle\varphi_p|$.

Да би све горе речено о стањима целине и подсистема важило, морају бити задовољени услови:

$$\sum_i \lambda_i = 1 = \sum_p \kappa_p = \sum_q \omega_q, \quad \sum_m p_{im} = 1 = \sum_n \pi_{in}, \forall i. \tag{7.24}$$

Користећи опет ER:

$$|\chi_{im}\rangle_S|\phi_{in}\rangle_E = \sum_{a,b} C_{ab}^{imn}|a\rangle_{S'}|b\rangle_{E'}, |\varphi_p\rangle_S|\psi_q\rangle_E = \sum_{a,b} D_{ab}^{pq}|a\rangle_{S'}|b\rangle_E, \tag{7.25}$$

где морају да буду задовољена ограничења

$$\sum_{a,b} C_{ab}^{imn}C_{ab}^{im'n'*} = \delta_{mm'}\delta_{nn'}, \quad \sum_{a,b} D_{ab}^{pq}D_{ab}^{p'q'*} = \delta_{pp'}\delta_{qq'}, \tag{7.26}$$

онда по аналогији са чистим стањем (под А.) следи

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}\hat{\rho} = \hat{\rho} - (tr_E\hat{\rho}) \otimes \hat{\rho}_E = \sum_{a,a',b,b'} \{ \sum_{i,m,n} \lambda_i p_{im}\pi_{in} C_{ab}^{imn}C_{a'b'}^{imn*} - \\ - \sum_{p,q} \kappa_p\omega_q D_{ab}^{pq}D_{a'b'}^{pq*}\}|a\rangle_{S'}\langle a'| \otimes |b\rangle_{E'}\langle b'|.\end{aligned} \tag{7.27}$$

Дакле,

$$\begin{aligned}tr_{E'}\mathcal{Q}\hat{\rho} = 0 \Leftrightarrow \Lambda_{aa'} \equiv \sum_{i,m,n,b} \lambda_i p_{im}\pi_{in} C_{ab}^{imn}C_{a'b}^{imn*} - \\ - \sum_{p,q,b} \kappa_p\omega_q D_{ab}^{pq}D_{a'b}^{pq*} = 0, \forall a, a'.\end{aligned} \tag{7.28}$$

и опет је за $a = a'$:

$$\sum_a \Lambda_{aa} = 0, \tag{7.29}$$

што је еквивалентно услову $tr_{E'}\mathcal{Q}\hat{\rho} = 0$.

Важење једнакости (7.10) подразумева важење једнакости (7.21), односно (7.28) за чиста и мешана стања, редом. Као што се види, и (7.21) и (7.28) представљају системе симултаних једначина. Иако су партикуларна решења ових система могућа, скуп стања у Хилбертовом простору за која је то могуће практично је занемарљив (видети Главу 6). То значи да, ако важи једнакост (7.9), онда је једнакост (7.10) испуњена за занемарљив број временских тренутака еволуције сложеног система. Како се улоге (7.9) и (7.10) могу заменити, добија се обрнут закључак, што комплетира доказ.

■

Интуитивно, лема 7.1 говори о томе да оно што је “ирелевантна пројекција”, односно информација за једну структуру, *садржи* релевантне информације за подсистемско стање алтернативне структуре. Или другачије: узимање трага по степенима слободе подсистема $\mathcal{E}$, обухвата степене слободе $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{E}'$ подсистема.

Лема 7.2. *Пројектори, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ који се тичу полазне и алтернативне структуре, редом, не комутирају, односно важи:*

$$[\mathcal{P}, \mathcal{P}']\hat{\rho}(t) \neq 0, \tag{7.30}$$

за највећи број тренутака еволуције сложеног система.

Доказ.

Стављајући да је $\hat{\rho}_P(t) \equiv \mathcal{P}\hat{\rho}(t)$ и $\hat{\rho}_{P'}(t) \equiv \mathcal{P}'\hat{\rho}(t)$ и *препостављајући супротно* од онога што лема тврди, имамо: $\mathcal{P}\hat{\rho}_{P'}(t) = \mathcal{P}'\hat{\rho}_P(t), \forall t$.

Користећи дефиниције пројектора, следи $\mathcal{P}\hat{\rho}_{P'}(t) = tr_E\hat{\rho}_{P'}(t) \otimes \hat{\rho}_E = \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E$, док са друге стране важи $\mathcal{P}'\hat{\rho}_P(t) = tr_{E'}\hat{\rho}_P(t)\otimes = \hat{\sigma}_{S'}(t) \otimes \hat{\sigma}_{E'}$. Пошто је комутатор по претпоставци једнак нули, следи једнакост: $\hat{\sigma}_{S'}(t) \otimes \hat{\sigma}_{E'} = \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E, \forall t$. Како је динамика непрекидна у времену, *QCR* имплицира да последња једнакост, заправо, неће бити задовољена током еволуције за највећи број временских тренутака. Дакле, уз занемарљив број изузетака, следи да полазна претпоставка доказа је погрешна, што потврђује изказ леме. ■

Лема 7.2 говори о томе да се сложени систем не може наћи у стању $\hat{\rho}(t)$, тако да је за произвољан временски тренутак, испуњено $\mathcal{P}\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_P(t) = \mathcal{P}'\hat{\rho}(t)$. Или, информације добијене пројектовањем, за подсистеме $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$, међусобно су искључиве.

До сада речено има за последицу да се динамика подсистема у алтернативној структури не може дедуковати на основи познавања динамике отвореног подсистема у полазној структури за заједнички временски интервал $[0, t]$ са фикираним почетним стањем $\hat{\rho}(t = 0)$ за целину $\mathcal{C}$. Формално то се записује као $tr_{E'}d\mathcal{P}\hat{\rho}(t)/dt \neq d\hat{\rho}_{S'}(t)/dt$ (при чему се подразумева да важи $\hat{\rho}_{S'}(t) = tr_{E'}\hat{\rho}(t)$).

Леме 7.1 и 7.2 односе се на све врсте пројекција и говоре о томе да пројекциони метод има своје ограничење. Све ово односи се и на системе са дискретним и на системе са континуалним степенима слободе и произвољан избор линеарних канонских трансформација. Истакнуто ограничење пројекционог метода није у несагласности са квантном теоријом отворених система нити са основама самог метода Накаџиме-Цванцига, већ иде у прилог томе да пројекциони метод није подесан када су у питању задаци који се тичу преструктурирања сложених система.

Отуда и важна лекција за примену опште теорије отворених система: почетни, или накнадно учињен, избор структуре целине “систем+окружење” ставља ограничења на информације које се тичу алтернативних структура. Како је то у несагласју са класичном интуицијом и резоновањем, неопходни су квантитативни критеријуми за ближе одређивање (не)ваљаности класичне интуиције и поимања физичког света.

8

Асимптотске структуре пара неинтерагујућих модова

Током досадашњег излагања на више места истакнуто је да стандардна квантна механика затворених сложених система све (потенцијалне) структуре третира као једнако могуће. Са друге стране, у Одељку 3.5 успостављен је критеријум за приближну класичност степени слободе подсистема: одвијање процеса декохеренције, за шта је сеперабилност хамилтонијана потребан услов [38,39]. Отуда, дефиниција отвореног система, аутоматски дефинише окружење. Оно што је обележје поменутог критеријума је да се тиче декохеренције у Журековом смислу [11]. Али, у пракси, на отвореном систему не мора се одвијати само процес декохеренције: у игри може бити и квантна дисипација, на пример.

Модел који се разматра у овој глави тиче се два неинтерагујућа линеарна хармонијска осцилатора (две моде) од којих сваки има своје окружење са којим интерагује. Почетна структура од интереса је:

$$(1 + \mathcal{E}_1) + (2 + \mathcal{E}_2), \tag{8.1}$$

при чему су фреквенције ω_1, ω_2 и масе m_1, m_2 првог и другог осцилатора, редом.

Одговарајући простор стања структуре (8.1) је $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, а хамилтонијан који одговара овој физичкој ситуацији гласи $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, $\hat{H}_i = \hat{p}_i^2/2m_i + m_i\omega_i^2\hat{x}_i^2/2$, $i = 1, 2$.

Динамика сваког осцилатора описана је међусобно независним мастер једначинама [71]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}_1 &= \kappa_1(2\hat{a}_1\hat{\rho}_1\hat{a}_1^\dagger - a_1^\dagger\hat{a}_1\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1), \\ \dot{\hat{\rho}}_2 &= \kappa_2(2\hat{a}_2\hat{\rho}_2\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2), \end{aligned} \tag{8.2}$$

где су $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i^\dagger$, $i = 1, 2$) креациони и анахилациони оператори, а $\kappa_i, i = 1, 2$ су дисипациони параметри (*damping parameters*). Почетно стање два осцилатора је облика $\hat{\rho}_{12}(0) = \hat{\rho}_1(0) \otimes \hat{\rho}_2(0)$.

Горње мастер једначине представљају тзв. амплитудско пригушење (*amplitude damping* или скраћено *AD*) и специјалан су случај опште мастер једначине за амплитудски процес када је окружење на апсолутној нули [13,72]. Ове *AD* мастер једначине су у Линдбладовој форми и овде су записане у интеракционој слици, при чему је изостављен Лембов померај.

Како је речено у Глави 3, диференцијалном облику кретања (тј. мастер једначини) одговара закон кретања у интегралној форми, односно одговарајућа Краусова декомпозиција:

$$\hat{\rho}_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{K}_n^i(t)\hat{\rho}_i(0)\hat{K}_n^{i\dagger}(t), \quad i = 1, 2 \tag{8.3}$$

при чему је задовољена релација комплетности $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{K}_n^{i\dagger}(t)\hat{K}_n^i(t) = \hat{I}_i, i = 1, 2, \forall t$.

За AD процес, (8.2), Краусови оператори су облика [72–74]:

$$\hat{K}_n^i(t) = \sqrt{\frac{(1 - e^{-2\kappa_i t})^n}{n!}} e^{-\kappa_i t \hat{N}_i} \hat{a}_i^n; \quad \hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \quad i = 1, 2. \tag{8.4}$$

Еволуција може бити представљена и у Хајзенберговој (*Heisenberg*) слици, где опсервабле “носе” промену у времену:

$$\hat{A}_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{K}_n^{i\dagger}(t)\hat{A}_i(0)\hat{K}_n^i(t), \quad i = 1, 2. \tag{8.5}$$

Као једна од могућности, да би се наставило даље, је да се бесконачна сума апроксимира тако што се узме првих неколико чланова у суми; овде то неће бити рађено, већ ће бити изведен егзактан рачун.

Да би се упростило писање, надаље ће бити испуштени индекси који се односе на појединачни осцилатор, јер за сваки важи исто.

Замењући једнакост (8.4) у (8.5) следи:

$$\hat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - e^{-2\kappa t})^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n} e^{-\kappa t \hat{N}} \hat{A}(0) e^{-\kappa t \hat{N}} \hat{a}^n. \tag{8.6}$$

Користећи познате везе у формализму линеарног хармонијског осцилатора:

$$\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \imath \left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \tag{8.7}$$

јасно је да за прорачун еволуције оператора положаја и импулса осцилатора (и одговарајућих квадрата) у Хајзенберговој слици потребно уместо $\hat{A}(0)$ баратати операторима $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ и $\hat{a}^\dagger\hat{a}$.

У даљем рачуну, од интереса ће бити уопштена Бејкер-Хауздорфова (*Baker, Hausdorff*) лема [75]:

$$e^{-s\hat{A}} \hat{B} e^{-s\hat{A}} = \hat{B} - s\{\hat{A}, \hat{B}\} + \frac{s^2}{2!}\{\hat{A}, \{\hat{A}, \hat{B}\}\} - \frac{s^3}{3!}\{\hat{A}, \{\hat{A}, \{\hat{A}, \hat{B}\}\}\} + ... \tag{8.8}$$

са стандардном антикомутаторском ознаком $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.

Применом (8.8) следе једнакости:

$$e^{-\kappa t\hat{N}}\hat{a}e^{-\kappa t\hat{N}} = e^{-\kappa t}\hat{a}e^{-2\kappa t\hat{N}}, \quad e^{-\kappa t\hat{N}}\hat{a}^\dagger e^{-\kappa t\hat{N}} = e^{-\kappa t}\hat{a}^\dagger e^{-2\kappa t\hat{N}}. \tag{8.9}$$

Враћајући (8.9) у (8.6) и још увек држећи општу ознаку за оператор, следи:

$$\hat{A}(t) = e^{\pm\kappa t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-e^{-2\kappa t})^n}{n!}\hat{a}^{\dagger n}\hat{A}(0)e^{-2\kappa t\hat{N}}\hat{a}^n \tag{8.10}$$

где је у експоненту позитиван предзнак за оператор $\hat{a}$, односно негативан за $\hat{a}^\dagger$.

За $\hat{A} \equiv \hat{a}^\dagger$ директно се добија, користећи релацију комплетности:

$$\hat{a}^\dagger(t) = e^{-\kappa t}\hat{a}^\dagger\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-e^{-2\kappa t})^n}{n!}\hat{a}^{\dagger n}e^{-2\kappa tN}\hat{a}^n = e^{-\kappa t}\hat{a}^\dagger; \tag{8.11}$$

а за $\hat{a}(t)$ следи:

$$\hat{a}(t) = e^{\kappa t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-e^{-2\kappa t})^n}{n!}[\hat{a}^{\dagger n}, a]e^{-2\kappa tN}\hat{a}^n + e^{\kappa t}\hat{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-e^{-2\kappa t})^n}{n!}\hat{a}^{\dagger n}e^{-2\kappa tN}\hat{a}^n. \tag{8.12}$$

Уз помоћ познате релације $[\hat{a}^{\dagger n}, \hat{a}] = -n\hat{a}^{\dagger n-1}$ једнакост (8.12) постаје:

$$\hat{a}(t) = -e^{\kappa t}\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(1-e^{-2\kappa t})^n}{n!}\hat{a}^{\dagger n-1}e^{-2\kappa tN}\hat{a}^n + e^{\kappa t}\hat{a}. \tag{8.13}$$

Лако се доказује (диференцирањем релације комплетности по n) да важи једнакост $\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(1-e^{-2\kappa t})^n}{n!}\hat{a}^{\dagger n-1}e^{-2\kappa tN}\hat{a}^n = (1-e^{-2\kappa t})\hat{a}$, па коначно следи:

$$\hat{a}(t) = e^{-\kappa t}\hat{a}. \tag{8.14}$$

Сасвим слично рачунају се и оператори: $\hat{a}^2(t)$, $\hat{a}^{\dagger 2}(t)$ и $(\hat{a}^\dagger\hat{a})(t)$, а коначни изрази гласе:

$$\begin{aligned}\hat{a}^2(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\hat{K}_n^\dagger(t)\hat{a}^2\hat{K}_n(t) = e^{-2\kappa t}\hat{a}^2\\ \hat{a}^{\dagger 2}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\hat{K}_n^\dagger(t)\hat{a}^{\dagger 2}\hat{K}_n(t) = e^{-2\kappa t}\hat{a}^{\dagger 2}\\ (\hat{a}^\dagger\hat{a})(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\hat{K}_n^\dagger(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{K}_n(t) = e^{-2\kappa t}\hat{a}^\dagger\hat{a}. \end{aligned}\tag{8.15}$$

Знајући временску еволуцију оператора креације и анихилације, а на основи горе поменуте везе са опсерваблама положаја и импулса осцилатора, биће:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}(t) = e^{-\kappa t}\hat{x}, \quad \hat{p}(t) = e^{-\kappa t}\hat{p},\\
&\hat{x}^2(t) = e^{-2\kappa t}\hat{x}^2 + \frac{\hbar}{2m\omega}(1 - e^{-2\kappa t})\\
&\hat{p}^2(t) = e^{-2\kappa t}\hat{p}^2 + \frac{m\hbar\omega}{2}(1 - e^{-2\kappa t}).
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Из (8.16) се непосредно добијају асимптотска решења:

$$\lim_{t\to\infty}\hat{x}(t) = 0 = \lim_{t\to\infty}\hat{p}(t), \lim_{t\to\infty}\hat{x}^2(t) = \frac{\hbar}{2m\omega}, \lim_{t\to\infty}\hat{p}^2(t) = \frac{m\hbar\omega}{2}, \tag{8.17}$$

на основи којих лако се рачунају стандардна одступања опсервабли положаја и импулса осцилатора, односно одговарајућа релација неодређености:

$$\lim_{t\to\infty}\Delta\hat{x}(t)\Delta\hat{p}(t) = \frac{\hbar}{2}. \tag{8.18}$$

Стања која задовољавају (8.18) су тзв. стања минималне неодређености: у координатној репрезентацији то су гаусијани (*Gauss*) (у литератури позната и као Сударшан-Глауберова (*Sudarshan, Glauber*) кохерентна стања).

Са друге стране, корелациона функција $Q = \langle\hat{A}_1\hat{A}_2\rangle - \langle\hat{A}_1\rangle\langle\hat{A}_2\rangle$, указује на могуће присуство корелација у сложеном систему $1+2$ који се налази у стању $\hat{\rho}_{12}$; индекс опсервабле $\hat{A}_i, i = 1, 2$ указује на који подсистем се опсервабла односи. Нулта вредност корелационе функције, $Q = 0$, није довољна (иако јесте потребна) да би се закључило да је стање сложеног система без корелација било које врсте, односно тензорски производ стања подсистема. Бирајући опсервабле $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ из скупова $\{\hat{x}_1, \hat{p}_1\}$ и $\{\hat{x}_2, \hat{p}_2\}$, редом, могу се формирати корелационе функције Q_{ij} за различите комбинације.

Будући да је еволуција изражена у Хајзенберговој слици, од интереса је временски зависна корелациона функција, $Q(t) = \langle\hat{A}_1(t)\hat{A}_2(t)\rangle - \langle\hat{A}_1(t)\rangle\langle\hat{A}_2(t)\rangle$. Како је нађено да је типична временска зависност опсервабли за први и други осцилатор, $\hat{A}_1(t) = e^{-\kappa_1 t}\hat{A}_1(0)$ и $\hat{A}_2(t) = e^{-\kappa_2 t}\hat{A}_2(0)$, редом, јасно је да важи:

$$\lim_{t\to\infty} Q_{12}(t) = \lim_{t\to\infty}(\langle\hat{A}_1(t)\hat{A}_2(t)\rangle - \langle\hat{A}_1(t)\rangle\langle\hat{A}_2(t)\rangle) = \lim_{t\to\infty} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}Q_{12}(0) = 0. \tag{8.19}$$

Од интереса је асимптотско понашање система из разлога што је за Марковљеве (какав се у овој глави изучава) системе утврђено да су некласичне корелације (двострани дискорд различит од нуле) у дводелним структурама свеприсутне, осим у лимесу бесконачног времена. Другим речима, нема наглог нестајања дискорда (*discord sudden death*) у коначним временским тренуцима [76].

Са друге стране је резулат да за гаусијанска стања важи да је дискорд нула само акко је стање дводелног система тензорски производ [77]. Дакле, у случају дводелних гаусијанских система нулта вредност корелационе функције је и потребна и довољна за закључак да у систему нема никаквих корелација. Зато је од важности нагласити да овде разматрани амплитудски процес има особину да чува гаусијански карактер стања на које делује [78].

Сада је јасно да изрази (8.18) и (8.19) воде закључку да је асимптотско стање ($t \to \infty$) две моде тензорски производ гаусијанских стања са минималном неодређеношћу.

8.1 Алтернативни степени слободе

Разматрајмо другу декомпозицију сложеног система $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, са простором стања $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ и хамилтонијаном $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_{AB}$.

Нека су нови степени слободе $\hat{X}_A$ и $\hat{\xi}_B$ и њима конјуговане опсервабле импулса $\hat{P}_A$ и $\hat{\pi}_B$ повезане са полазним степенима слободе следећим ЛКТ:

$$\begin{aligned} \hat{X}_A &= \sum_i \alpha_i \hat{x}_i, \hat{P}_A = \sum_j \gamma_j \hat{p}_j \\ \hat{\xi}_B &= \sum_m \beta_m \hat{x}_m, \hat{\pi}_B = \sum_n \delta_n \hat{p}_n. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Нови степени слободе морају да задовољавају комутационе релације $[\hat{X}_A, \hat{P}_A] = \imath\hbar$, $[\hat{\xi}_B, \hat{\pi}_B] = \imath\hbar$, због чега важе следеће везе:

$$\sum_i \alpha_i \gamma_i = 1 = \sum_i \beta_i \delta_i, \quad \sum_i \alpha_i \delta_i = 0 = \sum_i \beta_i \gamma_i. \tag{8.21}$$

Приметимо да су горње ЛКТ локалног карактера, тј. тичу се само степени слободе отвореног система. Иако не уводе интеракцију између нових подсистема ($\hat{H}_{AB} = 0$), оне мењају карактер интеракције са окружењем[1]. Ово се лако може видети користећи инверзне трансформације од (8.20) и замењујући их у Краусове операторе (8.4): следи да је $\hat{K}^1_m \otimes \hat{K}^2_n \neq \hat{K}^A_p \otimes \hat{K}^B_q$. Другачије речено: локална окружења подсистема 1 и 2, постају заједничко окружење за подсистеме $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Алтернативна структура која је од интереса:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{E} \tag{8.22}$$

јасно говори о заједничком окружењу подсистема $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$; поредећи структуре (8.1) и (8.22), а на основи резултата Главе 7, јасно је да познавање динамике подсистема 1 у и 2 неће бити од важности за извођење динамике подсистема у алтернативној структури.

За структуру $1+2$ је било могуће радити са две независне мастер једначине јер за независна окружења и интеракцију $\hat{V} = \alpha \sum_k (\hat{A}^1_{Sk} \otimes \hat{B}^1_{Ek} + \hat{A}^2_{Sk} \otimes \hat{B}^2_{Ek})$ мастер једначина гласи (овде је реч о Марковљевом процесу, па отуда и Линдбладова форма мастер једна-

---

[1] То је и разлог што нису узете у обзир општије ЛКТ, тј. оне које "мешају" опсервабле положаја и импулса. На овај начин обезбеђено је, да штагод био разлог сличности/различитости структура $1+2$ и $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, то није интеракција међу подсистемима унутар структуре $\mathcal{A}+\mathcal{B}$.

чине) [13]:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}_{12}(t)}{dt} &= -\imath\sum_i[\hat{H}_i + \alpha^2\hat{H}_{LS}^{(i)}, \hat{\rho}_{12}(t)]\\ &+\alpha^2\sum_{\omega,i,k,l}\gamma_{kl}^{(i)}(\omega)\left[\hat{A}_k^{(i)}(\omega)\hat{\rho}_{12}(t)\hat{A}_l^{(i)\dagger}(\omega) - \frac{1}{2}\{\hat{A}_l^{(i)\dagger}(\omega)\hat{A}_k^{(i)}(\omega), \hat{\rho}_{12}(t)\}\right].\end{aligned}\tag{8.23}$$

Из (8.22), а користећи особине парцијалног трага (оператори $\hat{B}_1$ и $\hat{B}_2$ су произвољни оператори који се тичу система 1 и 2, редом) $\hat{\rho}_i = tr_j\hat{\rho}_{12}, i \neq j = 1, 2$, $tr_i[\hat{B}_j, \hat{\rho}_{12}] = 0, i = j$ и $tr_i[\hat{B}_j, \hat{\rho}_{12}] = [\hat{B}_j, \hat{\rho}_j]$ за $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, следе мастер једначине за подсистеме у структури $1 + 2$:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}_i(t)}{dt} &= -\imath[\hat{H}_i + \alpha^2\hat{H}_{LS}^{(i)}, \hat{\rho}_i(t)]\\ &+\alpha^2\sum_{\omega,k,l}\gamma_{kl}^{(i)}(\omega)\left[\hat{A}_k^{(i)}(\omega)\hat{\rho}_i(t)\hat{A}_l^{(i)\dagger}(\omega) - \frac{1}{2}\{\hat{A}_l^{(i)\dagger}(\omega)\hat{A}_k^{(i)}(\omega), \hat{\rho}_i(t)\}\right];\end{aligned}\tag{8.24}$$

то је општи запис мастер једначина (8.1) са анихилационим оператором као Линдбладовим оператором.

Строго говорећи, Краусови оператори за $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ структуру следе из одговарајуће мастер једначине, која мора бити изведена од почетка.

Али, у овом моделу декомпозиције који се разматра, познавање Краусових оператора за $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ структуру није ни потребно, јер је еволуција опсервабли дефинисана преко Краусове декомпозиције за коју ја важна бесконачна сума, а не експлицитан облик Краусових оператора:

$$\hat{A}_1(t)\hat{A}_2(t) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\hat{K}_m^{1\dagger}(t)\hat{A}_1(0)\hat{K}_m^1(t) \otimes \hat{K}_n^{2\dagger}(t)\hat{A}_2(0)\hat{K}_n^2(t).\tag{8.25}$$

Дакле проблеми везани за $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ структуру могу се заобићи користећи старе Краусове операторе и ЛКТ, (8.20), сада записане преко временски зависних оператора:

$$\hat{X}_A(t) = \sum_i\alpha_i\hat{x}_i(t), \hat{P}_A(t) = \sum_i\gamma_i\hat{p}_i(t), \hat{\xi}_B(t) = \sum_i\beta_i\hat{x}_i(t), \hat{\pi}_B(t) = \sum_i\delta_i\hat{p}_i(t).\tag{8.26}$$

На основи (8.26), пак, следи:

$$\hat{X}_A^2(t) = \sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j(\hat{x}_i\hat{x}_j)(t), \quad \hat{P}_A^2(t) = \sum_{i,j}\gamma_i\gamma_j(\hat{p}_i\hat{p}_j)(t),\tag{8.27}$$

и

$$\hat{\xi}_B^2(t) = \sum_{i,j}\beta_i\beta_j(\hat{x}_i\hat{x}_j)(t), \quad \hat{\pi}_B^2(t) = \sum_{i,j}\delta_i\delta_j(\hat{p}_i\hat{p}_j)(t)\tag{8.28}$$

где стоје скраћени записи: $(\hat{x}_i\hat{x}_j)(t) = \hat{x}_i(t)\hat{x}_j(t)$ и $(\hat{p}_i\hat{p}_j)(t) = \hat{p}_i(t)\hat{p}_j(t)$.

Из (8.26) и (8.27) рачуна се стандардно одступање:

$$\begin{aligned}\left(\Delta\hat{X}_A(t)\right)^2 &= tr_{12}\left[\sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j(\hat{x}_i\hat{x}_j)(t)\hat{\rho}_{12}(0)\right] - \left[tr_{12}\sum_i\alpha_i\hat{x}_i(t)\hat{\rho}_{12}(0)\right]^2 = \\ &= \sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j\left[\langle(\hat{x}_i\hat{x}_j)(t)\rangle - \langle\hat{x}_i(t)\rangle\langle\hat{x}_j(t)\rangle\right] = \\ &= \sum_i\alpha_i^2(\Delta\hat{x}_i(t))^2 + \sum_{i\neq j}(\alpha_i\alpha_j\langle(\hat{x}_i\hat{x}_j)(t)\rangle - \alpha_i\alpha_j\langle\hat{x}_i(t)\rangle\langle\hat{x}_j(t)\rangle) = \\ &= \sum_i\alpha_i^2(\Delta\hat{x}_i(t))^2. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Последња једнакост стоји зато што, за $i \neq j$, а имајући у виду локалност Краусових оператора за структуру $1+2$, важи да је $\langle(\hat{x}_i\hat{x}_j)(t)\rangle = \langle\hat{x}_i(t)\rangle\langle\hat{x}_j(t)\rangle$ уз подсећање да је почетно стање $\hat{\rho}_{12}(0) = \hat{\rho}_1(0)\otimes\hat{\rho}_2(0)$. Аналогно горњем рачуну, добијају се стандардна одступања за опсервабле $\hat{P}_A$, $\hat{\xi}_B$ и $\hat{\pi}_B$.

Тако, множењем стандардних одступања добијају се асимптотске вредности:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{X}_A(\infty)\Delta\hat{P}_A(\infty) &= \sqrt{\left(\frac{\alpha_1^2\hbar}{2m_1\omega_1}+\frac{\alpha_2^2\hbar}{2m_2\omega_2}\right)\left(\frac{\gamma_1^2 m_1\hbar\omega_1}{2}+\frac{\gamma_2^2 m_2\hbar\omega_2}{2}\right)} \geq \frac{\hbar}{2}, \\ \Delta\hat{\xi}_B(\infty)\Delta\hat{\pi}_B(\infty) &= \sqrt{\left(\frac{\beta_1^2\hbar}{2m_1\omega_1}+\frac{\beta_2^2\hbar}{2m_2\omega_2}\right)\left(\frac{\delta_1^2 m_1\hbar\omega_1}{2}+\frac{\delta_2^2 m_2\hbar\omega_2}{2}\right)} \geq \frac{\hbar}{2}.\end{aligned} \tag{8.30}$$

На основи *QCR* (односно *ER*) правила, очекује се да у структури $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ има квантних корелација што се може видети на основи корелационе функције, на пример:

$$Q_{AB}(t) = \langle\hat{X}_A(t)\hat{\xi}_B(t)\rangle - \langle\hat{X}_A(t)\rangle\langle\hat{\xi}_B(t)\rangle. \tag{8.31}$$

Замењујући (8.16) и (8.26) у горњи израз за $Q_{AB}(t)$ следи:

$$Q_{AB}(\infty) = \lim_{t\to\infty}\sum_{i,j}\left[(\hat{x}_i\hat{x}_j)(t) - \hat{x}_i(t)\hat{x}_j(t)\right] = \alpha_i\beta_i(\Delta\hat{x}_i(\infty))^2 = \alpha_1\beta_1\frac{\hbar}{2m_1\omega_1} + \alpha_2\beta_2\frac{\hbar}{2m_2\omega_2}, \tag{8.32}$$

што је довољно да се закључи да у систему има корелација, чак и у лимесу бесконачног времена.

Дакле, постојање корелација за квантну структура $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ значи да нема тензорског производа стања подсистема, ни асимптотски, те не може се говорити о различивости подсистема сложеног система $\mathcal{C}$ у овој декомпозицији: овакво понашање је све само није класично, па каже се да структура $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ није препозната од стране окружења као (приближно) класична.

У специјалном случају када су осцилатори једнаких маса ($m_1 = m_2 = m$) и фреквенција ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) и подсистем $\mathcal{A}$ игра улогу центра масе целине ($\alpha_1 = 1/2 = \alpha_2, \gamma_1 = 1 = \gamma_2$) а подсистем $\mathcal{B}$ игра улогу степени слободе релативне честице ($\beta_1 = 1 = -\beta_2, \delta_1 =$

$1/2 = -\delta_2$) добијају се једнакости на десној страни (8.30), $\Delta\hat{X}_A(\infty)\Delta\hat{P}_A(\infty) = \hbar/2$ и $\Delta\hat{\xi}_B(\infty)\Delta\hat{\pi}_B(\infty) = \hbar/2$, као и одсуство корелација $Q_{AB}(\infty) = 0$ у (8.32). Али, типично, занемарујући овај специјални случај, може се очекивати да стање декомпозиције $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ не води мимималној неодређености и да је стање корелисано.

Асимптотско квантно стање за структуру $1 + 2$ је класично, у смислу да је тензорски производ гаусијанских стања:

$$|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2, \tag{8.33}$$

стања која минимизују релације неодређености у структури $1 + 2$. Према томе, у асимптотском лимесу о пару $1 + 2$ може се размишљати као о два некорелисана, међусобно различива система, што је на неки начин дефиниција класичности. Са друге стране, обзиром на модел, за стања (8.33) може се рећи да образују приближни базис бројача, односно да су то робусна стања сложеног система – инваријантна на унитарну еволуцију целине. Приближни, јер су у питању кохерентна стања која образују тзв. *overcomplete* базис, где су вектори приближно ортогонални. Све ово је појачано закључком у [76], како је већ поменуто, да се за отворене Марковљеве системе класичност очекује асимптотски.

Окружење бира најкласичнију од свих структура, па на крају може се закључити да је класичност (или понашање налик на класично) ствар специјалне структуре сложеног система $\mathcal{C}$, где одлуку доноси окружење, тј. облик интеракције отвореног система са окружењем, за дату (сваку понаособ) структуру.

Тако, може се рећи да резултати ове главе потврђују очекивања, и интуицију, да за отворене системе, макар у дводелним (канонским) структурама, можемо очекивати привилеговану структуру. Није наодмет још једном истаћи – ово не важи за затворене сложене системе.

9

Јединствени базис бројача у схеми локалног времена

У Глави 5 било је речи о Енсовом методу у оквирима теорије асимптотске комплетности и многочестичног квантног расејања а потом је уведен појам локалног времена. Овде ће бити настављено са тумачањем које је Китада дао Енсовом теорему, са циљем да се изуче минималистичке (неинтерпретацијске) последице формализма локалног времена.

Подсетимо се: за један затворени квантни систем може се дефинисати само једно време, при чему је затвореном квантном систему придружен временски независан хамилтонијан (јасно, нема смисли говорити о изолованим системима, јер они подразмевају временски зависне хамилтонијане а што подразумева *a priori* дефинисано време). Појам локалног времена је проистекао из Китадиног тумачења Енсовог резултата:

$$\left\| \left(\frac{\hat{x}_b}{t_m} - \hat{v}_b \right) \tilde{P}_b^{M_b^m} e^{-\frac{\imath t_m}{\hbar} \hat{H}} |\Psi\rangle \right\| \to 0, \tag{9.1}$$

а лимес тиче се свих могућих кластеризација, обухвата све могуће ситуације расејања унутар затвореног система, пру чему су временски тренуци, t_m, као и задати хамилтонијан, заједнички за све могуће структуре добијене кластеризацијом.

Физичко тумачење једначине (9.1) је релативно једноставно, ако се има у виду веза:

$$(\hat{x} - t\hat{v}) e^{-\frac{\imath t \hat{T}}{\hbar}} = e^{-\frac{\imath t \hat{T}}{\hbar}} \hat{x}, \tag{9.2}$$

где су $\hat{x}$, $\hat{v}$ и $\hat{T}$ оператори положаја, брзине и кинетичке енергије, редом, једнодимензионалне слободне честице. То значи да је дејство на таласну функцију следеће:

$$e^{-\frac{\imath t \hat{T}}{\hbar}} \Psi(x) = \Psi(x + vt). \tag{9.3}$$

Отуда је природно интерпретирати параметар t који се појављује у (9.1) као локално време, које се може проценити мерењем опсервабли $\hat{x}_b$[1] и $\hat{v}_b$ на ансамблу, односно

$$\frac{\langle \hat{x}_b \rangle}{\langle \hat{v}_b \rangle} \sim t, \tag{9.4}$$

где су $\langle \hat{x}_b \rangle$ и $\langle \hat{v}_b \rangle$ очекиване вредности.

Локално време се, дакле, интерпретацијски уводи кроз лимес (9.1), па може се рећи да се време појављује као скривени параметар чија улога је, подсетимо се, регулисана следећим (у оквиру ове схеме) универзалним правилима:

(а) Системи са различитим хамилтонијанима (различити број честица, различите врсте честица или различите врсте интеракција међу честицама) имају различита локална времена,

(б) Системи који међусобно интерагују имају заједничко локално време,

(в) Било која два слабо интерагујућа система који имају независне унитарне динамике немају заједничко време,

(г) Локално време односи се и на међусобно (апстрактно замишљено) идентичне многочестичне системе, све док су такви системи међусобно независни – овиме је имплицитно исказан однос ансамбла и локалног времена за елемент ансамбла,

при чему су од интереса следеће последице горњих правила:

- Ако два система која немају исто локално време почну да интерагују, тада могу дефинисати почетни тренутак $t = 0$ од којег њихово заједничко локално време почиње да тече; типичне ситуације: квантно мерење, јака интеракција у квантној декохеренцији,

- Ако је интеракција испод неког прага јачине, онда системи остају приближно затворени један за други и не деле заједничко време. Ово треба разликовати од појма "слаба интеракција" у теорији отворених система. "Слаба интеракција" је "јака" у смислу појма локалног времена, али је за неке практичне потребе "слаба". Дакле, систем када интерагује са окружењем, то је јака интеракција (изнад неког прага) у смислу схеме локалног времена,

- Када се два система која деле исто локално време довољно далеко разиђу, и њихова интеракција падне испод горе поменуте границе, онда они постају независни и сваки од њих стиче своје локално време.

По стандардно важећој квантној механици, еволуција затвореног система описује се једначином кретања:

$$|\Psi(t_\circ)\rangle = \hat{U}(t_\circ)|\Psi(t=0)\rangle, \tag{9.5}$$

где је $\hat{U}(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}}$ а $\hat{H}$ је хамилтонијан сложеног система. Ако се (9.5) односи на процес квантног мерења или квантне декохеренције, онда $t_\circ$ означава временски тренутак када су

---

[1] Вероватно је јасно, али није наодмет нагласити: мерење међукластерске опсервабле, $\hat{x}_b$, описује расејање у датој структури.

ти процеси “завршени”, па лимес $t_\circ \to \infty$ формално гледано има смисла. Са друге стране, издвајање коначног временског тренутка $t_\circ$ је од значаја, јер за све временске тренутке који му претходе, нема смисла говорити о подсистемима сложеног система, а што следи из Критеријума 1 (в. Одељак 3.5): без одигране декохеренције нема добро дефинисаних подсистема.

Имајући у виду правило (г) одозго, у одређивању коначног временског тренутка $t_\circ$ постоји неодређеност Δt, па уместо једначине кретања (9.5) стоји једначина за мешано стање (у општем случају, смешана стања су неортогонална, што значи да се односе на некомутирајуће опсервабле)

$$\hat{\sigma} = \int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} \rho(t)|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|dt, \tag{9.6}$$

где временска густина вероватноће, $\rho(t)$, задовољава:

$$\int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} \rho(t)dt = 1, \int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} t\rho(t)dt = t_\circ. \tag{9.7}$$

За густину вероватноће захтева се да има следеће особине:

(1) Да буде симетрична у интервалу $[t_\circ - \Delta t, t_\circ + \Delta t]$.

(2) Временска густина вероватноће дозвољава одговарајући лимес $\rho(t) \to \delta(t)$, чиме може бити репродукован израз (9.5).

Неке ствари ваља посебно нагласити:

- Стање (9.6) је мешавина, како се каже, “прве врсте”, односно заиста је стање сложеног система, јер то је мешавина која није добијена операцијом трага по степенима слободе окружења, на пример, што би била мешавина “друге врсте”. Како је познато, мешавине друге врсте нису стања подсистема, већ погодан математички запис [11].
- Стање (9.6) тиче се затвореног система.
- Одређивање произвољног временског тренутка из интервала $[t_\circ - \Delta t, t_\circ + \Delta t]$ у принципу није могуће, јер би то било у нескладу са *no-cloning* теоремом чија је тврдња еквивалентна немогућности разликовања[2] неортогоналних стања било каквим мерним поступком, у принципу [15].

---

[2] Разликовање стања подразумева разликовање резултата мерења опсервабли на појединачном систему (не на ансамблу, где се увек могу разликовати). Зато, као последица, појам различивости стања везује се искључиво за (приближно) ортогонална стања, зато што се са вероватноћом 1 (на ансамблу) добија једна вредност мерене опсервабле. На пример, нека се мери опсервабла са недегенерисаним спектром (једноставности ради) $\hat{A} = \sum_i a_i \hat{P}_i = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|$. Онда је вероватноћа мерења својствене вредности a_i на стању $|a_i\rangle$ једнака јединици, тј. по дефиницији $w(\hat{A}, |a_i\rangle, a_i) = \langle a_i|\hat{P}_i|a_i\rangle = 1$. Али, за неко ортогонално стање из спектра, $|a_j\rangle$, важиће $w(\hat{A}, |a_j\rangle, a_i) = \langle a_j|\hat{P}_i|a_j\rangle = 0$ те се за ортогонална стања $|a_i\rangle$ и $|a_j\rangle$ каже да су различива.

- Временска неодређеност Δt не уводи неодређеност енергије. Сваки члан у једнакости (9.6) описује унитарну еволуцију, која због конзервативности хамилтонијана, подразумева одржање енергије $\langle\Psi(t)|\hat{H}|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(t=0)|\hat{H}|\Psi(t=0)\rangle$, па следи да је $tr\hat{\sigma}\hat{H} = const.$

По конструкцији, стање (9.6) је мешано, али за интервале времена за које важи $\Delta t \ll t_\circ$ може се писати:

$$\hat{\sigma} \approx \int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} \rho(t)\left(\hat{I} - \frac{\imath(t-t_\circ)}{\hbar}\hat{H}\right)|\Psi(t_\circ)\rangle\langle\Psi(t_\circ)|\left(\hat{I} + \frac{\imath(t-t_\circ)}{\hbar}\hat{H}\right)dt \approx |\Psi(t_\circ)\rangle\langle\Psi(t_\circ)| \quad (9.8)$$

са грешком реда величине $(\delta t/\hbar)^2 = (\frac{t-t_\circ}{\hbar})^2$, при чему је искоришћено својство нормирања густине вероватноће, в. (9.7). Обзиром да може се разматрати и $t_\circ \gg 1$, Δt не мора само по себи да буде мала величина, већ је довољно да задовољава $\Delta t \ll t_\circ$.

Са друге стране, у еволуцији затвореног система постоји минимално време које за дати систем одређује различива (ортогонална) стања кроз која систем пролази током еволуције. То време се процењује на следећи начин [79]:

$$\tau_{min} = \max\{\pi\hbar/2(\Delta\hat{H}), \pi\hbar/2(\langle\hat{H}\rangle_{t=0} - E_g)\}, \quad (9.9)$$

где је $\Delta\hat{H}$ стандардно одступање а E_g је ознака за основну енергију хамилтонијана. Процена (9.9) даје минималан временски интервал (тј. потребно, али не нужно и довољно време) за који би систем извршио прелаз из неког почетног стања у њему било које ортогонално стање. За временске интервале који су мањи од овог τ_{min}, стања кроз која пролази систем не могу се разлучити. За $\Delta t > \tau_{min}$, што се тиче стања (9.6), можемо издвојити три временска тренутка и стања која сходно [79] могу бити међусобно приближно ортогонална:

$$\hat{\sigma} = p_-|\Psi(t_\circ - \Delta t)\rangle\langle\Psi(t_\circ - \Delta t)| + p_\circ|\Psi(t_\circ)\rangle\langle\Psi(t_\circ)| + p_+|\Psi(t_\circ + \Delta t)\rangle\langle\Psi(t_\circ + \Delta t)|, \quad (9.10)$$

односно стања која се могу међусобно приближно разликовати.

У овој глави од интереса ће бити интервали времена Δt за које важи $\Delta t \to 0$ и то тако да не воде, ни једначини (9.8), ни једначини (9.10).

У складу са захтеваним особинама временске густине расподеле и једнакости (9.7) за функцију која ће је представљати бирамо Гаусову густину расподеле:

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda(t-t_\circ)^2}, \quad (9.11)$$

која се у лимесу $\lambda \to \infty$ понаша као Диракова делта функција. Дакле, циљ је *изабрати* што мање λ.

Стављајући изабрану функцију расподеле у (приближни) услов нормирања

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} e^{-\lambda(t-t_\circ)^2}dt \approx 1, \quad (9.12)$$

и након увођења пар смена, запис постаје једноставнији:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\lambda}\Delta t} e^{-z^2} dz \approx 1, \tag{9.13}$$

што је по дефиницији тзв. функција грешке (*error function*), $erf(\sqrt{\lambda}\Delta t)$. Ова функција има вредности приближно јединици већ за вредности аргумента $\sqrt{\lambda}\Delta t \gtrsim 1$ одакле следи $\Delta t \gtrsim \lambda^{-1/2}$, односно $\Delta t \gtrsim \lambda^{-1}$, за $\lambda \geqslant 1$.

Са друге стране, довољна је процена да је $\Delta t < \tau_{min}/2$ из чега следи $\Delta t < \tau_{min}$, што је потребан услов да стање није облика (9.10).

На основи горе реченог следи процена за неодређеност времена:

$$\tau_{min}/2 > \Delta t > \lambda^{-1}, \tag{9.14}$$

са којом Гаусова густина вероватноће (приближно) задовољава услов нормирања, тј. важи $\int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} \rho(t) dt \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) dt = 1$. Свакако, горњи избор за густину вероватноће није једини могући, али има практичних предности, јер олакшава прорачун, као што ће се видети касније[3].

У овој глави, од интереса је опис процеса декохеренције који се тиче и коначнодимензионалних система за које је карактеристичан дискретан енергијски спектар и везана стања: $\hat{H} = \sum_n h_n |n\rangle\langle n|$ је спектрална форма хамилтонијана за затворени систем који се састоји од коначног броја честица у коначном (ограниченом) делу простора.

За произвољно почетно стање $|\Phi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, унитарна еволуција даје:

$$\hat{U}(t_\circ) \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{\imath t_\circ h_n}{\hbar}} |n\rangle \equiv |\Psi(t_\circ)\rangle, \tag{9.15}$$

па ће одговарајуће мешано стање гласити:

$$\hat{\sigma} = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle\langle n| + \sum_{n \neq n'} c_n c_{n'}^* e^{-\frac{\imath t_\circ (h_n - h_{n'})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_n - h_{n'})^2}{4\hbar^2 \lambda}} |n\rangle\langle n'|. \tag{9.16}$$

За прорачун стања (9.16) искоришћен је Гаусов интеграл[4] $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2 + \imath J x} dx =$ $= (2\pi/a)^{1/2} \times e^{-J^2/2a}$, где су $a > 0$ и J реални бројеви. По дефиницији, стање $\hat{\sigma}$ је ермитски, позитиван оператор јединичног трага.

---

[3] Проширења, у смислу употребе негаусијанске густине вероватноће или моделски зависне густине вероватноће, јесу могућа, али неће бити од интереса у овом Раду.

[4] У суштини исти овакав прорачун коришћен је за добијање стања (9.92), в. стр. 110, па ће стога овде бити изостављен.

Из једначине (9.16) следи:

$$tr\hat{\sigma}^2 = \sum_{n,n'} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 e^{-\frac{(h_n - h_{n'})^2}{2\hbar^2\lambda}} < 1, \tag{9.17}$$

што показује да је стање $\hat{\sigma}$ мешано. Изрази $e^{-\frac{(h_n - h_{n'})^2}{4\hbar^2\lambda}}$ који се појављују у стању (9.16) могу да узимају вредности од 0 до 1.

За системе са малим бројем честица, који по правилу имају сиромашан енергијски спектар (мали број својствених вредности), већином могу се очекивати чланови са $e^{-\frac{(h_n - h_{n'})^2}{4\hbar^2\lambda}} \sim 1$, што значи да је стање приближно облика $|\Psi\rangle\langle\Psi| \cong \sum_n |c_n|^2 |n\rangle\langle n| +$ $+ \sum_{n\neq n'} c_n c_{n'}^* e^{-\frac{\imath t_\circ (h_n - h_{n'})}{\hbar}} |n\rangle\langle n'|$. Ово се може видети и на основи величине под називом фиделити (*fidelity*) која даје меру блискости стања $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ и дефинисана је изразом [15]:

$$\mathcal{F}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = tr\left[\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_1}\hat{\rho}_2\sqrt{\hat{\rho}_1}}\right]; \tag{9.18}$$

за блиска стања $\mathcal{F}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \sim 1$. Нека је $\hat{\rho}_1$ чисто стање (9.15), односно $\sqrt{\hat{\rho}_1} = \hat{\rho}_1 = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ и нека је $\hat{\rho}_2 = \hat{\sigma}$. Онда ће бити:

$$\mathcal{F}(\hat{\rho}_1, \hat{\sigma}) = tr\left[\sqrt{|\Psi\rangle\langle\Psi|\hat{\sigma}|\Psi\rangle\langle\Psi|}\right] = \sqrt{\langle\Psi|\hat{\sigma}|\Psi\rangle}\cancelto{1}{tr\left[\sqrt{|\Psi\rangle\langle\Psi|}\right]} = \sqrt{\langle\Psi|\hat{\sigma}|\Psi\rangle},$$

односно стављајући изразе (9.15) и (9.16) за стања, након краћег прорачуна добија се да је фиделити $\mathcal{F} = \sqrt{\sum_{n,n'} |c_n|^2 |c_{n'}|^2 e^{-\frac{(h_n - h_{n'})^2}{4\hbar^2\lambda}}} \simeq 1$. Дакле, за системе са малим бројем честица може се сматрати да су у приближно чистом стању што је у складу са уобичајеним резонавањем за "мале" системе: утицај окружења је незнатан и за систем се очекује очувана кохеренција.

Са друге стране, системи са великом бројем честица имају густ енергијски спектар, па континуални аналогон (лимес континуалне апроксимације) стању (9.16) гласи:

$$\hat{\sigma} = \int dEdE' \Psi(E)\Psi^*(E') e^{-\frac{\imath t_\circ (E-E')}{\hbar})} e^{-\frac{(E-E')^2}{4\hbar^2\lambda}} |E\rangle\langle E'|. \tag{9.19}$$

Обзиром на густину спектра, за неке енергијске нивое може се очекивати губитак кохеренције, $e^{-\frac{(E-E')^2}{4\hbar^2\lambda}} \ll 1$, што води квазидијагоналној форми за стање $\hat{\sigma}$ – другачије речено, чиста стања нису погодна за опис многочестичних система. Изрази аналогни (9.19) добро су познати у моделима теорије декохеренције.

Овде треба приметити да стања $|E\rangle$ нису нормализабилна, те нису од интереса што се тиче схеме локалног времена. Нормализабилна стања могу се добити процедуром огрубљења континуалног спектра, чиме се добијају приближна својствена стања. По дефиницији, ова процедура смањује број својствених вредности као и број чланова облика

$e^{-\frac{(h_n-h_{n'})^2}{4\hbar^2\lambda}}$ са малим разликама $|h_n - h_{n'}|$ у експоненту. Последње значи да се умањује кохеренција у сложеном систему. За системе са малим бројем својствених вредности оваква процедура није од користи, јер због сиромашног спектра, грешка које се уводи процедуром огрубљавања значајно мења информацијски садржај стања.

Дакле, за мале (спектрално гледано) системе очекује се приближно квантно понашање, док велики системи, типично, показују понашање које се може назвати приближно класичним (имајући у виду квазидијагоналну форму статистичког оператора и елементарну дефиницију процеса декохеренције). Квантно или класично понашање, видимо, није само ствар масе или просторних димензија система, већ и енергијских скала.

9.1 Схема локалног времена и процеси са доминантним интеракционим чланом

У овом одељку ће од интереса бити примена универзалних квантно-механичких правила датих на почетку ове главе за случај јаке интеракције у систему $\mathcal{O}+\mathcal{A}$.

Посматрајмо два система $\mathcal{O}$ и $\mathcal{A}$ који међусобно не интерагују – то значи да не морају да имају заједничко време. Интеракција у систему $\mathcal{O}+\mathcal{A}$ уводи нови хамилтонијан $\hat{H}_O+\hat{H}_A+\hat{H}_{int}$, где је $\hat{H}_{int}$ интеракциони члан. Време које се придружује систему $\mathcal{O}+\mathcal{A}$ различито је од времена подсистема $\mathcal{O}$ и $\mathcal{A}$ пре интеракције – почетак интеракције дефинише почетак новог локалног времена, што се формално записује са $t=0$.

У квантној декохеренцији и квантном мерењу од интереса су ситуације где интеракциони члан доминира, односно сопствени хамилтонијани могу бити занемарени: $\hat{H} = \hat{H}_O + \hat{H}_A + \hat{H}_{int} \approx \hat{H}_{int}$.

Нека је почетно стање целине облика $|\phi\rangle_O|\chi\rangle_A$ и нека је интеракциони хамилтонијан дат спектралном формом са реалним коефицијентима $h_{\alpha\beta}$:

$$\hat{H}_{int} = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}\hat{P}^O_\alpha \otimes \hat{\Pi}^A_\beta, \tag{9.20}$$

где су $\hat{P}$ и $\hat{\Pi}$ одговарајући пројектори на фактор просторе. Онда унитарна динамика даје сплетено стање:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_\alpha b_\alpha|\alpha\rangle_O|\chi_\alpha(t)\rangle_A, \tag{9.21}$$

где је

$$|\chi_\alpha(t)\rangle_A = \sum_\beta d_\beta e^{-\frac{\imath t h_{\alpha\beta}}{\hbar}}|\beta\rangle_A, \tag{9.22}$$

са следећим ознакама: $b_\alpha|\alpha\rangle_O = \hat{P}^O_\alpha|\phi\rangle_O$ и $d_\beta|\beta\rangle_A = \hat{\Pi}^A_\beta|\chi\rangle_A$; $\sum_\alpha|b_\alpha|^2 = 1 = \sum_\beta|d_\beta|^2$.

Замењујући једначину (9.21) у једначину за стање сложеног система, $\hat{\sigma} = \int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t}\rho(t)|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|dt$, добија се да је:

$$\hat{\sigma} = \sum_\alpha |b_\alpha|^2|\alpha\rangle_O\langle\alpha| \otimes \hat{\rho}^A_\alpha(t_\circ) + \sum_{\alpha\neq\alpha'} b_\alpha b^*_{\alpha'}|\alpha\rangle_O\langle\alpha'| \otimes \hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'}(t_\circ), \tag{9.23}$$

где је $t_\circ$ временски тренутак у коме је процес декохеренције (приближно) “завршен”.

У једначини (9.23) ознаке за стања су:

$$\hat{\rho}_\alpha^A = \sum_{\beta,\beta'} d_\beta d_{\beta'}^* e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'})^2}{4\hbar^2\lambda}} |\beta\rangle_A\langle\beta'|, \tag{9.24}$$

и

$$\hat{\rho}_{\alpha\alpha'}^A = \sum_{\beta,\beta'} d_\beta d_{\beta'}^* e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{\alpha\beta} - h_{\alpha'\beta'})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{\alpha\beta} - h_{\alpha'\beta'})^2}{4\hbar^2\lambda}} |\beta\rangle_A\langle\beta'|; \tag{9.25}$$

као што се види, статистички оператор $\hat{\rho}_\alpha^A$ је ермитски и позитиван са јединичним трагом, а особине ових статистичких оператора предмет су следеће леме.

Лема 9.1. *(i) Статистички оператори* $\hat{\rho}_\alpha^A$ *су међусобно ортогонални за већину временских тренутака* $t_\circ$*, што је формално записиво као* $\lim_{t_\circ\to\infty} \hat{\rho}_\alpha^A \hat{\rho}_{\alpha'}^A \approx 0, \forall\alpha \neq \alpha'$*; (ii) Траг оператора* $\hat{\rho}_{\alpha\alpha'}^A$ *је приближно нула за већину временских тренутака* $t_\circ$ *– формално:* $\lim_{t_\circ\to\infty} tr_A \hat{\rho}_{\alpha\alpha'}^A \approx 0, \forall\alpha \neq \alpha'$.

Доказ.

(i) Из једначине (9.24) за статистички оператор следе записи:

$$\hat{\rho}_\alpha^A = \sum_{\beta,\beta'} d_\beta d_{\beta'}^* e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'})^2}{4\hbar^2\lambda}} |\beta\rangle_A\langle\beta'|, \tag{9.26}$$

и

$$\hat{\rho}_{\alpha'}^A = \sum_{\beta'',\beta'''} d_{\beta''} d_{\beta'''}^* e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{\alpha'\beta''} - h_{\alpha'\beta'''})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{\alpha'\beta''} - h_{\alpha'\beta'''})^2}{4\hbar^2\lambda}} |\beta''\rangle_A\langle\beta'''|, \tag{9.27}$$

односно

$$\hat{\rho}_\alpha^A \hat{\rho}_{\alpha'}^A = \sum_{\beta,\beta',\beta'',\beta'''} d_\beta d_{\beta'}^* d_{\beta''} d_{\beta'''}^* e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'} + h_{\alpha'\beta''} - h_{\alpha'\beta'''})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'})^2 + (h_{\alpha'\beta''} - h_{\alpha'\beta'''})^2}{4\hbar^2\lambda}} \delta_{\beta'\beta''} |\beta\rangle_A\langle\beta'''|. \tag{9.28}$$

Након сумирања по β'' следи:

$$\hat{\rho}_\alpha^A \hat{\rho}_{\alpha'}^A = \sum_{\beta,\beta',\beta'''} d_\beta |d_{\beta'}|^2 d_{\beta'''}^* e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'} + h_{\alpha'\beta'} - h_{\alpha'\beta'''})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'})^2 + (h_{\alpha'\beta'} - h_{\alpha'\beta'''})^2}{4\hbar^2\lambda}} |\beta\rangle_A\langle\beta'''|, \tag{9.29}$$

па је одговарајући матрични елемент $(\hat{\rho}_\alpha^A \hat{\rho}_{\alpha'}^A)_{\beta\beta''}$ дат изразом

$$(\hat{\rho}_\alpha^A \hat{\rho}_{\alpha'}^A)_{\beta\beta''} = \sum_{\beta,\beta',\beta'''} d_\beta |d_{\beta'}|^2 d_{\beta'''}^* e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'} + h_{\alpha'\beta'} - h_{\alpha'\beta'''})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'})^2 + (h_{\alpha'\beta'} - h_{\alpha'\beta'''})^2}{4\hbar^2\lambda}} \delta_{\beta\beta} \delta_{\beta''\beta'''}. \tag{9.30}$$

Из (9.30), након груписања чланова, имамо

$$(\hat{\rho}^{A}_{\alpha}\hat{\rho}^{A}_{\alpha'})_{\beta\beta''} = d_{\beta}d^{*}_{\beta''}e^{-\frac{\imath t_{\circ}(h_{\alpha\beta}-h_{\alpha'\beta''})}{\hbar}}\sum_{\beta'}|d_{\beta'}|^{2}e^{-\frac{\imath t_{\circ}(h_{\alpha'\beta'}-h_{\alpha\beta'})}{\hbar}} \times$$

$$\times e^{-\frac{(h_{\alpha\beta}-h_{\alpha\beta'})^{2}+(h_{\alpha'\beta'}-h_{\alpha'\beta''})^{2}}{4\hbar^{2}\lambda}} \equiv d_{\beta}d^{*}_{\beta''}e^{-\frac{\imath t_{\circ}(h_{\alpha\beta}-h_{\alpha'\beta''})}{\hbar}}\zeta\chi, \tag{9.31}$$

где су уведене скраћенице: $0 < \epsilon_{\beta'} \equiv e^{-\frac{(h_{\alpha\beta}-h_{\alpha\beta'})^{2}+(h_{\alpha'\beta'}-h_{\alpha'\beta''})^{2}}{4\hbar^{2}\lambda}} \leq 1$, $\zeta \equiv \sum_{\beta'}|d_{\beta'}|^{2}\epsilon_{\beta'}$, $p_{\beta'} \equiv |d_{\beta'}|^{2}\epsilon_{\beta'}/\zeta$ и $\omega_{\beta'} \equiv (h_{\alpha'\beta'} - h_{\alpha\beta'})/\hbar$. Пошто важи $\sum_{\beta'} p_{\beta'} = 1$, функција $\chi \equiv \sum_{\beta'} p_{\beta'}e^{-\imath t_{\circ}\omega_{\beta'}}$ је позната амплитуда корелације која се јавља, на пример, у теорији декохеренције [80].

За довољно дуге временске интервале $[t, t+T]$ такве да $t_{\circ} \in [t, t+T]$ и $\alpha \neq \alpha'$, амплитуда корелација има следеће особине:

(а) Средња вредност амплитуде корелације задовољава $\lim_{T\to\infty}\langle\chi\rangle_{T} = 0$;

(б) Стандардно одступање задовољава $\lim_{T\to\infty}\langle|\chi|^{2}\rangle_{T} = 0$;

при чему се имају у виду типични многочестични модели система $\mathcal{A}$. Како је $\zeta \leq 1$, јасно је да због горњих особина амплитуде корелација следи важење тврђења под (i).
(ii) Из једначине (9.25) следи да је

$$tr_{A}\hat{\rho}^{A}_{\alpha\alpha'} = \sum_{\beta}|d_{\beta}|^{2}e^{-\frac{\imath t_{\circ}(h_{\alpha\beta}-h_{\alpha'\beta})}{\hbar}}e^{-\frac{(h_{\alpha\beta}-h_{\alpha'\beta})^{2}}{4\hbar^{2}\lambda}}, \tag{9.32}$$

где се на десној страни препознаје χ функција уведена у тачки (i), што значи да важи тврђење леме.

■

Доказ последње леме базира се на резултатима везаним за скоро-периодичне функције [11], за чију је примену потребан услов да је реч о многочестичним системима.

Лема 9.1 има за последицу стања подсистема:

$$\lim_{t_{\circ}\to\infty}\hat{\rho}^{O} = \lim_{t_{\circ}\to\infty}tr_{A}\hat{\sigma} = \sum_{\alpha}|b_{\alpha}|^{2}|\alpha\rangle_{O}\langle\alpha|, \hat{\rho}^{A} = tr_{O}\hat{\sigma} = \sum_{\alpha}|b_{\alpha}|^{2}\hat{\rho}^{A}_{\alpha}; \tag{9.33}$$

само када су у питању системи са неколико честица, опсервер може имати увид у целокупно стање (9.23).

Ортогоналност оператора $\hat{\rho}^{A}_{\alpha}$ у леми 9.1 имплицира да су и одговарајући носачи (в. фусноту на стр. 22) ортогонални. Користећи особине фон Нојманове ентропије (в. Главу 2) и једнакости (9.33) може се израчунати међусобна информација, $I(O : A)$, подсистема

$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, у формалном лимесу $t_\circ \to \infty$ ($\lim_{t_\circ\to\infty} \hat{\sigma} = \sum_\alpha |b_\alpha|^2 |\alpha\rangle_O\langle\alpha| \otimes \hat{\rho}^A_\alpha$):

$$I(O:A) = S(\hat{\rho}^O) + S(\hat{\rho}^A) - S(\hat{\sigma}) = S(\hat{\rho}^A) - \sum_\alpha |b_\alpha|^2 S(\hat{\rho}^A_\alpha) =$$
$$= H(|b_\alpha|^2) = -\sum_\alpha |b_\alpha|^2 \log|b_\alpha|^2 = H(O)\,. \tag{9.34}$$

Једнакост (9.34), у контексту теорије декохеренције, имплицира да окружење носи класичну информацију (овде систем $\mathcal{A}$) о стањима, $|\alpha\rangle_O$, отвореног система $\mathcal{O}$. У овом смислу може се рећи да окружење врши мерење на отвореном систему.

Међутим, оно што је један од проблема теорије мерења је тзв. проблем преферираног базиса (*the preferred-basis problem*) [81].

Нека је сплетено стање апарата и објекта мерења дато кроз ШКФ:

$$|\Phi\rangle_{O+A} = \sum_p c_p |p\rangle_O |p\rangle_A; \tag{9.35}$$

ово стање је јединствено само ако су одговарајући подсистемски статистички оператори комплетне опсервабле. У супротном, стање целине може се записати и као:

$$|\Phi\rangle_{O+A} = \sum_{p'} c_{p'} |p'\rangle_O |p'\rangle_A; \tag{9.36}$$

па чини се да је на једном истом систему, $\mathcal{O}$, истовремено, могуће мерити две опсервабле, $\hat{A} = \sum_p \lambda_p |p\rangle_O\langle p|$ и $\hat{B} = \sum_{p'} \lambda_{p'} |p'\rangle_O\langle p'|$, које у општем случају не комутирају. Поменути проблем може се исказати и на следећи начин: која опсервабла бива мерена? Наравно, проблем проистиче из тога што у пракси нема оваквих недоумица, тј. апарат је "конструисан" да мери одређену опсерваблу.

Следећа лема показује да у оквиру схеме локалног времена проблема са преферираним базисом нема.

Лема 9.2. *И мала смешаност стања дводелног многочестичног система обезбеђује јединствени базис бројача, односно опсерваблу бројача.*

Доказ. Пођимо од задатог стања (9.23):

$$\hat{\sigma} = \sum_{\alpha,\alpha'} b_\alpha b^*_{\alpha'} |\alpha\rangle_O\langle\alpha'| \otimes \hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'}(t_\circ), \tag{9.37}$$

и уведимо разлагање јединице које се тиче неког произвољног базиса система $\mathcal{O}$:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \sum_{\alpha,\alpha'} b_\alpha b^*_{\alpha'} \hat{I}_\nu |\alpha\rangle_O \langle\alpha'| \hat{I}_{\nu'} \otimes \hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'}(t_\circ) = \\ &= \sum_{\alpha,\alpha'} b_\alpha b^*_{\alpha'} (\sum_\nu |\nu\rangle\langle\nu|) |\alpha\rangle_O \langle\alpha'| (\sum_{\nu'} |\nu'\rangle\langle\nu'|) \otimes \hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'}(t_\circ) = \\ &= \sum_{\alpha,\alpha'} \sum_{\nu,\nu'} b_\alpha b^*_{\alpha'} c_{\alpha,\nu} c^*_{\alpha',\nu'} |\nu\rangle\langle\nu'| \otimes \hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'}(t_\circ),\end{aligned} \tag{9.38}$$

где је $c_{\alpha,\nu} = {}_O\langle\nu|\alpha\rangle_O$.
Последњи ред у (9.38) може се записати као $\hat{\sigma} = \sum_{\nu,\nu'} |\nu\rangle_O \langle\nu'| \otimes \hat{R}^A_{\nu\nu'}$, где је $\hat{R}^A_{\nu\nu'} =$
$= \sum_{\alpha,\alpha'} b_\alpha b^*_{\alpha'} c_{\alpha\nu} c^*_{\alpha'\nu'} \hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'}$.
По аналогији са лемом 9.1

$$tr\hat{R}^A_{\nu\nu'} = \sum_\alpha |b_\alpha|^2 c_{\alpha\nu} c^*_{\alpha\nu'} = {}_O\langle\nu| \left(\sum_\alpha |b_\alpha|^2 |\alpha\rangle_O \langle\alpha| \right) |\nu'\rangle_O. \tag{9.39}$$

Са друге стране, важи $\hat{R}^A_\nu = \sum_{\alpha,\alpha'} b_\alpha b^*_{\alpha'} c_{\alpha\nu} c^*_{\alpha'\nu} \hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'}$, и по аналогији за други скуп индекса $\hat{R}^A_{\nu'} = \sum_{\alpha'',\alpha'''} b_{\alpha''} b^*_{\alpha'''} c_{\alpha''\nu'} c^*_{\alpha'''\nu'} \hat{\rho}^A_{\alpha''\alpha'''}$, што даје

$$\hat{R}^A_\nu \hat{R}^A_{\nu'} = \sum_{\alpha,\alpha',\alpha'',\alpha'''} b_\alpha b^*_{\alpha'} b_{\alpha''} b^*_{\alpha'''} c_{\alpha\nu} c^*_{\alpha'\nu} c_{\alpha''\nu'} c^*_{\alpha'''\nu'} \hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'} \hat{\rho}^A_{\alpha''\alpha'''}. \tag{9.40}$$

Користећи идентитет $\hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'} \hat{\rho}^A_{\alpha''\alpha'''} = \delta_{\alpha'\alpha''} \hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'} \hat{\rho}^A_{\alpha'\alpha'''}$ једнакост (9.40) постаје:

$$\hat{R}^A_\nu \hat{R}^A_{\nu'} = \sum_{\alpha,\alpha'''} b_\alpha b^*_{\alpha'''} c_{\alpha\nu} c^*_{\alpha'''\nu'} \sum_{\alpha'} |b_{\alpha'}|^2 c^*_{\alpha'\nu} c_{\alpha'\nu'} (\hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'} \hat{\rho}^A_{\alpha'\alpha'''}), \tag{9.41}$$

односно одговарајући матрични елементи гласе:

$$\begin{aligned}(\hat{R}^A_\nu \hat{R}^A_{\nu'})_{\beta\beta'} &= \sum_{\alpha,\alpha'''} b_\alpha b^*_{\alpha'''} c_{\alpha\nu} c^*_{\alpha'''\nu'} \sum_{\alpha'} |b_{\alpha'}|^2 c^*_{\alpha'\nu} c_{\alpha'\nu'} (\hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'} \hat{\rho}^A_{\alpha'\alpha'''})_{\beta\beta'} = \\ &= \sum_{\alpha,\alpha'''} b_\alpha b^*_{\alpha'''} c_{\alpha\nu} c^*_{\alpha'''\nu'} \quad {}_O\langle\nu| \left(\sum_{\alpha'} |b_{\alpha'}|^2 (\hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'} \hat{\rho}^A_{\alpha'\alpha'''})_{\beta\beta'} |\alpha'\rangle_O \langle\alpha'| \right) |\nu'\rangle_O.\end{aligned} \tag{9.42}$$

За дегенерисани спектар подсистемског статистичког оператора $\hat{\rho}_O$ (нпр. бар две својствене вредности $|b_\alpha|^2$ су једнаке) може се наћи базис (нпр. за $|b_1|^2 = |b_2|^2$, одговарајући ортонормирани базис је $\{|\nu_1\rangle_O, |\nu_2\rangle_O, |\alpha\rangle_O, \alpha = 3, 4, 5, \dots\}$ где су прва два вектора линеарне комбинације вектора из потпростора који одговора дегенерисаној својственој вредности: $|\nu_i\rangle_O = \sum_{\alpha=1}^2 c_{i\alpha} |\alpha\rangle_O, i = 1, 2.$) за који је испуњено $tr\hat{R}^A_{\nu\nu'} = 0$, по захтеву леме 9.1. Али, ако је испуњен тај захтев ($\langle\nu| \diamond |\nu'\rangle \approx 0$), он не може истовремено да важи и за (9.42), из које, а на основи леме 9.1, следи $\langle\nu| \diamond |\nu'\rangle \not\approx 0$, а важи и обратно.

Са друге стране, лема 9.1 тврди да је услов $(\hat{R}^A_\nu \hat{R}^A_{\nu'})_{\beta\beta'} \approx 0$ задовољен за све комбинације индекса $\nu \neq \nu', \beta, \beta'$: у формалном лимесу $t_\circ \to \infty$. Како се лема 9.1 тиче многочестичних система, јасно је да је у питању огроман број једначина које морају да истовремено задовољавају задати услов. Дакле, намеће се закључак: не постоји алтернативни базис за који би лема 9.1 била испуњена. ■

Из доказа леме 9.2 следи да је у схеми локалног времена базис бројача јединствен, а самим тим и опсервабла бројача, $\hat{A}^O = \sum_\alpha a_\alpha \hat{P}^O_\alpha$, је јединствена. Закључак је независан од почетног стања система $\mathcal{O}$ и броја честица у систему $\mathcal{A}$ (сем да је испуњено $N \gg 1$). Овиме је уклоњена потреба за колапсом или утицајем окружења.

У теорији декохеренције постоји и формална схема где се уместо дводелног многочестичног система $\mathcal{O} + \mathcal{A}$ уводи троделна декомпозиција $\mathcal{O} + \mathcal{A} + \mathcal{E}$ и то тако да системи $\mathcal{O}$ и $\mathcal{E}$ не интерагују директно, а $\mathcal{E}$ је окружење апарата $\mathcal{A}$ [81]. Разлог оваквом приступу је чињеница да је сваки апарат, у пракси, отворен квантни систем. Са друге стране, троделна декомпозиција води ка ШКФ, која у општем случају не постоји за декомпозицију $\mathcal{O} + \mathcal{A} + \mathcal{E}$, али када постоји, онда је јединствена [82]. Јасно је да јединствена ШКФ решава проблем преферираног базиса, али онда остаје други проблем а то је да се стање система $\mathcal{O} + \mathcal{A}$ система добија узимањем трага по степенима слободе окружења што води мешавини друге врсте са систем $\mathcal{O} + \mathcal{A}$. Мешавине друге врсте нису стања (под)система [11], а то је уједно и слабо место теорије декохеренције. Целина је и даље у чистом стању:

$$\hat{U}(t) \sum_{\alpha,j} b_\alpha d_j |\alpha\rangle_O |\alpha\rangle_A |j\rangle_E = \sum_{\alpha,j} b_\alpha d_j e^{-\frac{\imath t h_{\alpha j}}{\hbar}} |\alpha\rangle_O |\alpha\rangle_A |j\rangle_E, \tag{9.43}$$

где је претпостављена јака интеракција између система $\mathcal{A}$ и $\mathcal{E}$, која успоставља ново локално време за целину $\mathcal{O} + \mathcal{A} + \mathcal{E}$.

По аналогији са дводелним случајем $\mathcal{O} + \mathcal{A}$, следи:

$$\hat{\sigma} = \sum_\alpha |b_\alpha|^2 |\alpha\rangle_O \langle\alpha| \otimes |\alpha\rangle_A \langle\alpha| \otimes \hat{\rho}^E_\alpha + \sum_{\alpha \neq \alpha'} b_\alpha b^*_{\alpha'} |\alpha\rangle_O \langle\alpha'| \otimes |\alpha\rangle_A \langle\alpha'| \otimes \hat{\rho}^E_{\alpha\alpha'}. \tag{9.44}$$

из чега је јасно да лема 9.1 важи *mutatis mutandis*.

Дакле, са становишта схеме локалног времена, што се тиче декохеренцији сличних процеса, довољно је разматрати дводелне структуре, како ће бити урађено у следећем одељку.

9.2 Неки типични модели теорије декохеренције и мерења

У овом одељку биће проанализирано укупно пет аналитички решивих модела, под претпоставком да је у дводелној структури интеракциони хамилтонијан облика $\hat{H}_{int} = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} \hat{P}^O_\alpha \otimes \hat{\Pi}^A_\beta$ и да неодређеност времена задовољава неједнакост $\tau_{min}/2 > \Delta t > \lambda^{-1}$. Другим речима, ради се о провери важења леме 9.1 за сваки од разматраних модела.

(а) Две честице спина $1/2$

Посматрајмо две честице спина 1/2 од којих једна игра улогу подсистема $\mathcal{O}$, а друга подсистема $\mathcal{A}$ и нека је њихов интеракциони хамилтонијан $\hat{H}_{int} = C\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z}$, са константом интеракције C. Имајући у виду спектралне форме оператора $\hat{S}_{1z} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi}^1_+ - \hat{\Pi}^1_-)$ и $\hat{S}_{2z} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi}^2_+ - \hat{\Pi}^2_-)$, спектрална форма интеракционог хамилтонијана тада је: $\hat{H}_{int} = \frac{C}{4}(\hat{\Pi}^1_+ \otimes \hat{\Pi}^2_+ - \hat{\Pi}^1_+ \otimes \hat{\Pi}^2_- - \hat{\Pi}^1_- \otimes \hat{\Pi}^2_+ + \hat{\Pi}^1_- \otimes \hat{\Pi}^2_-)$, односно, у погоднијем запису: $\hat{H}_{int} = (h_{++}\hat{\Pi}^1_+ \otimes \hat{\Pi}^2_+ + h_{+-}\hat{\Pi}^1_+ \otimes \hat{\Pi}^2_- + h_{-+}\hat{\Pi}^1_- \otimes \hat{\Pi}^2_+ + h_{--}\hat{\Pi}^1_- \otimes \hat{\Pi}^2_-)$. Својствена стања су $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$, са одговарајућим својственим вредностима $h_{++} = C/4 = h_{--}, h_{+-} = -C/4 = h_{-+}$, а најнижа, основна енергија система је $E_g = -C/4$.

Како је стање од интереса облика $\hat{\sigma} = \sum_\alpha |b_\alpha|^2 |\alpha\rangle_O\langle\alpha| \otimes \hat{\rho}^A_\alpha(t_\circ) + \sum_{\alpha\neq\alpha'} b_\alpha b^*_{\alpha'} |\alpha\rangle_O\langle\alpha'| \otimes \hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'}(t_\circ)$, потребно је наћи одговарајуће статистичке операторе за подсистем $\mathcal{A}$, односно другу честицу спина 1/2 у овом случају. Подсетимо се да су ти оператори облика (видети (9.24) и (9.25)):

$$\hat{\rho}^A_\alpha = \sum_{\beta,\beta'} d_\beta d^*_{\beta'} e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta'})^2}{4\hbar^2\lambda}} |\beta\rangle_A\langle\beta'|,$$

и

$$\hat{\rho}^A_{\alpha\alpha'} = \sum_{\beta,\beta'} d_\beta d^*_{\beta'} e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{\alpha\beta} - h_{\alpha'\beta'})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{\alpha\beta} - h_{\alpha'\beta'})^2}{4\hbar^2\lambda}} |\beta\rangle_A\langle\beta'|.$$

Зато,

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{(2)}_+ &= \sum_{\beta,\beta'} d_\beta d^*_{\beta'} e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{+\beta} - h_{+\beta'})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{+\beta} - h_{+\beta'})^2}{4\hbar^2\lambda}} |\beta\rangle_A\langle\beta'| = \\ &= \sum_{\beta'} d_+ d^*_{\beta'} e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{++} - h_{+\beta'})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{++} - h_{+\beta'})^2}{4\hbar^2\lambda}} |+\rangle_A\langle\beta'| + \\ &+ d_- d^*_{\beta'} e^{-\frac{\imath t_\circ (h_{+-} - h_{+\beta'})}{\hbar}} e^{-\frac{(h_{+-} - h_{+\beta'})^2}{4\hbar^2\lambda}} |-\rangle_A\langle\beta'|\,. \end{aligned} \tag{9.45}$$

Након сумирања по β', добијају се четири сабирка у којима се замењују својствене вредности $h_{++} = C/4 = h_{--}$ и $h_{+-} = -C/4 = h_{-+}$. Након тога следи:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{(2)}_+ &= |d_+|^2 |+\rangle_2\langle+| + d_- d^*_+ e^{-\frac{\imath t_\circ (-\frac{C}{4} - \frac{C}{4})}{\hbar}} e^{-\frac{C^2}{16\hbar^2\lambda}} |-\rangle_2\langle+| + \\ &+ d_+ d^*_- e^{-\frac{\imath t_\circ (\frac{C}{4} + \frac{C}{4})}{\hbar}} e^{-\frac{C^2}{16\hbar^2\lambda}} |+\rangle_2\langle-| + |d_-|^2 |-\rangle_2\langle-|\,. \end{aligned} \tag{9.46}$$

На исти начин добијају се и $\hat{\rho}^{(2)}_-$ и $\hat{\rho}^{(2)}_{+-}$. Одговарајуће матрице гласе ($\hbar = 1$):

$$\rho^{(2)}_+ = \begin{pmatrix} |d_+|^2 & d_+ d^*_- e^{\frac{-\imath t_\circ C}{2} - \frac{C^2}{16\lambda}} \\ d^*_+ d_- e^{\frac{\imath t_\circ C}{2} - \frac{C^2}{16\lambda}} & |d_-|^2 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{-}^{(2)} = \begin{pmatrix} |d_+|^2 & d_+ d_-^* e^{\frac{\imath t_\circ C}{2} - \frac{C^2}{16\lambda}} \\ d_+^* d_- e^{\frac{-\imath t_\circ C}{2} - \frac{C^2}{16\lambda}} & |d_-|^2 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\rho_{+-}^{(2)} = \begin{pmatrix} |d_+|^2 e^{-\imath t_\circ C/2} e^{-C^2/16\lambda} & d_+ d_-^* \\ d_+^* d_- & |d_-|^2 e^{\imath t_\circ C/2} e^{-C^2/16\lambda} \end{pmatrix}.$$

Тако следи, на пример,

$$\begin{aligned} (\hat{\rho}_+^{(2)} \hat{\rho}_-^{(2)})_{++} &= |d_+|^2 e^{-\imath t_\circ C/2} [|d_+|^2 e^{\imath t_\circ C/2} + |d_-|^2 e^{-\imath t_\circ C/2} e^{-C^2/8\lambda}] \\ tr_2 \hat{\rho}_{+-}^{(2)} &= e^{-C^2/16\lambda} [|d_+|^2 e^{-\imath t_\circ C/2} + |d_-|^2 e^{\imath t_\circ C/2}] = e^{-C^2/16\lambda} \cos \frac{C t_\circ}{2}, \end{aligned} \tag{9.47}$$

из чега постаје јасно да лема 9.1 не може бити задовољена јер косинусна функција нема добро дефинисан лимес за $t_\circ \to \infty$.

Чисто стање два спина, за $t = 0$, на основи (9.21) и (9.22), гласи:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=\pm} b_\alpha |\alpha\rangle_1 \sum_{\beta=\pm} |\beta\rangle_2, \tag{9.48}$$

што након сумирања даје

$$|\Psi\rangle = b_+ d_+ |+\rangle_1 |+\rangle_2 + b_- d_+ |-\rangle_1 |+\rangle_2 + b_+ d_- |+\rangle_1 |-\rangle_2 + b_- d_- |-\rangle_1 |-\rangle_2, \tag{9.49}$$

на основи чега се лако добија очекивана вредност интеракционог хамилтонијана $\langle \hat{H}_{int} \rangle = \langle \Psi | \hat{H}_{int} | \Psi \rangle = |b_+|^2 |d_+|^2 - |b_-|^2 |d_+|^2 - |b_-|^2 |d_+|^2 + |b_-|^2 |d_-|^2$, па је за избор коефицијената $d_\pm = 2^{-1/2}$ очекивана вредност $\langle \hat{H}_{int} \rangle_{t=0} = 0$ а стандардно одступање је $\Delta \hat{H}_{int} = C/4 = -E_g$.

На основи израчунатих вредности може се проценити τ_{min} ($\hbar = 1$, $C = 1$): $\tau_{min} = \max\{\pi\hbar/2\Delta\hat{H}, \pi\hbar/2(\langle \hat{H} \rangle_{t=0} - E_g)\}$, одакле следи $\tau_{min}/2 = \max\{\pi, 2\pi\} = 2\pi$ па могу се изабрати вредности $\Delta t = 3$ и $\lambda = 1$, тако да је задовољена једнакост (9.12). Дакле, вандијагонални елемент $e^{-\frac{(h_{++} - h_{--})^2}{4\lambda}} = e^{-\frac{C^2}{16\lambda}} = e^{-\frac{1}{16}} \approx 0.939$ указује на високу (али не егзактну, идеалну) кохеренцију у систему, односно важи:

$$\hat{\sigma} \approx |\Psi\rangle\langle\Psi|, \tag{9.50}$$

што значи да се систем два спина може сматрати “микроскопским” у смислу да је то аналогна ситуација која се среће у теорији отворених система када је систем приближно затворен у односу на окружење.

(б) Четири честице спина $1/2$

У овом случају, једна честица спина $1/2$ је у интеракцији са три честице спина $1/2$: систем $2+3+4$ је окружење система 1. Нека је интеракција облика $\hat{H}_{int} = \hat{S}_{1z}(\hat{S}_{2z} +$

$\hat{S}_{3z}+\hat{S}_{4z}) \equiv \hat{S}_{1z}\otimes\hat{\Sigma}_{234}$. Спектар за прву честицу је познат, док се за окружење спектар лако добија имајући у виду да су у питању три независне честице спина 1/2 чији се појединачни својствени вектори тензорски множе, а својствене вредности сабирају. Отуда је скуп својствених вектора $|+++\rangle, |++-\rangle, |+-+\rangle, |+--\rangle, |-++\rangle, |-+-\rangle, |--+\rangle$,
$|---\rangle$, а својствене вредности су $3/2, 1/2, 1/2, -1/2, 1/2, -1/2, -1/2, -3/2$, редом. За интеракциони хамилтонијан, својствене вредности су $h_{\pm\beta}$ (где се индекси $\pm$ односе на систем 1) са дегенерацијама g_β: $h_{\pm 1} = \pm 3/4 = h_{\mp 4}$, $h_{\pm 2} = \pm 1/4 = h_{\mp 3}$ и $g_1 = 1 = g_4$, док $g_2 = 3 = g_3$. Онда је спектрална форма $\hat{H}_{int} = \sum_{\alpha=\pm}\sum_{\beta=1}^{4} h_{\alpha\beta}\hat{P}^1_\alpha \otimes \hat{\Pi}^{234}_\beta$. За стање (по аналогији са претходним случајем) $|\Psi\rangle = \sum_{s=\pm} b_s|s\rangle_1 \sum_t |t\rangle_{234}$ следи да је, након краћег рачуна, очекивана вредност интеракционог хамилтонијана $\langle\hat{H}_{int}\rangle = \sum_{\alpha,\beta}|b_\alpha|^2|d_\beta|^2 h_{\alpha\beta}$, односно након сумирања $\langle\hat{H}_{int}\rangle = \frac{3}{4}|b_+|^2|d_1|^2 - \frac{3}{4}|b_-|^2|d_1|^2 + \frac{1}{4}|b_+|^2|d_2|^2 - \frac{1}{4}|b_-|^2|d_2|^2 - \frac{1}{4}|b_+|^2|d_3|^2 + \frac{1}{4}|b_-|^2|d_3|^2 - \frac{3}{4}|b_+|^2|d_4|^2 + \frac{3}{4}|b_-|^2|d_4|^2$. Види се да ће $\langle\hat{H}_{int}\rangle$ бити нула, рецимо, у случају да је почетно стање система 234 са међусобно једнаким коефицијентима, што ће, водећи рачуна о дегенерацији својствених вредности, бити коефицијенти $|d_1|^2 = 1/8 = |d_4|^2$ и $|d_2|^2 = 3/8 = |d_3|^2$.

Са друге стране, $\langle\hat{H}^2_{int}\rangle = \frac{1}{4}\sum_\beta |d_\beta|^2 h^2_\beta$, што уз избор стања система 234 као горе, даје $\langle\hat{H}^2_{int}\rangle = \frac{3}{16}$. На основи очекиване вредности и стандардног одступања интеракционог хамилтонијана, а $E_g = -\frac{3}{4}$, следи процена $\tau_{min}/2 = \max\{\frac{\pi}{4\Delta\hat{H}_{int}}, \frac{\pi}{4(\langle\hat{H}_{int}\rangle - E_g)}\} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Онда се могу изабрати $\Delta t = 1$ и $\lambda = 2$ чиме се обезбеђује веома добра апроксимација једначине (9.12).

Одговарајући матрични елементи су, на пример:

$$\begin{aligned}(\hat{\rho}^{(234)}_{+}\hat{\rho}^{(234)}_{-})_{11} = {} & |d_1|^2 e^{-\frac{3\imath t_\circ}{2}} \quad [|d_1|^2 e^{\frac{3\imath t_\circ}{2}} + |d_2|^2 e^{(\frac{\imath t_\circ}{2} - \frac{1}{16})} + \\ & + |d_3|^2 e^{(-\frac{\imath t_\circ}{2} - \frac{1}{4})} + |d_4|^2 e^{(-\frac{3\imath t_\circ}{2} - \frac{9}{16})}]\,, \end{aligned} \tag{9.51}$$

и

$$\begin{aligned} tr_{234}\hat{\rho}^{(234)}_{+-} = {} & |d_1|^2 e^{-(\frac{3\imath t_\circ}{2} - \frac{9}{32})} + |d_2|^2 e^{(-\frac{\imath t_\circ}{2} - \frac{1}{32})} + |d_3|^2 e^{(\frac{\imath t_\circ}{2} - \frac{1}{32})} + \\ & + |d_4|^2 e^{(\frac{3\imath t_\circ}{2} - \frac{9}{32})} = \frac{1}{4}\cos(\frac{3t_\circ}{2})e^{-\frac{9}{32}} + \frac{3}{4}\cos(\frac{t_\circ}{2})e^{-\frac{1}{32}}\,. \end{aligned} \tag{9.52}$$

Мали број чланова у једначинама (9.51) и (9.52), као и то што су функције периодичне, показује, слично као у случају два спина 1/2, да и окружење има периодичну меморију. Другим речима, потребан је већи број чланова да би се са периодичних прешло на скоро-периодичне функције, што је услов да би важила лема 9.1, односно да би се могло говорити о мерењу или декохеренцији.

Иако недовољно, кохеренција у овом моделу је опала, у поређењу са првим моделом, што показује вредност функције $e^{-\frac{(h_{\alpha\beta} - h_{\alpha'\beta'})^2}{4\lambda}}$ која за $\lambda = 2$ и одговарајуће својствене вредности даје $e^{-\frac{(\frac{3}{4} - (-\frac{3}{4}))^2}{8}} = e^{-\frac{9}{32}} \approx 0.755$, што је мање него у случају два спина.

Зато, може се писати:

$$\hat{\sigma} \not\approx |\Psi\rangle\langle\Psi|, \tag{9.53}$$

што иде у прилог тези: што веће окружење, то мања кохеренција у систему.

(в) Декохеренција и мерење: честица спина $1/2$ окружена са $N \gg 1$ других честица спина $1/2$

У овој тачки ћемо разматрати аналитички решив модел декохеренције једне честице спина 1/2 (са индексом $\mathcal{S}$), модела који разматран на пример у [80]; за остатак спинова резервисан је индекс $\mathcal{E}$.

Реч је о физичкој ситуацији која се моделује уз помоћ сепарабилног интеракционог хамилтонијана [80]:

$$\hat{H}_{int} = \hat{\sigma}_{Sz} \otimes \sum_{m=1}^{N} g_m \hat{\sigma}_{mE} \otimes \prod_{m' \neq m} \hat{I}_{m'} \equiv \hat{C}_S \otimes \hat{D}_E \tag{9.54}$$

где је уведена скраћеница у означавању интеракције (што ће бити од користи мало касније) а g_m су константе интеракције. Пре него што наставимо даље, подсетимо се једног резултата из Главе 2.

Нека је задат сепарабилни интеракциони хамилтонијан

$$\hat{H}_{int} = \sum_k \hat{C}_{kS} \otimes \hat{D}_{kE}. \tag{9.55}$$

Тада:

$$e^{-\frac{\imath t}{\hbar}\hat{H}_{int}} (\sum_n b_n |\phi_n\rangle_S) \otimes |\chi\rangle_E = \sum_n b_n |\phi_n\rangle_S \otimes |\chi_n(t)\rangle_E, \tag{9.56}$$

где је

$$|\chi_n(t)\rangle_E = e^{-\frac{\imath t}{\hbar}\sum_k c_{nk}\hat{D}_{kE}} |\chi\rangle_E. \tag{9.57}$$

Нека је $k = 1$ и $n = \pm 1$. Стање (9.56) тада се може записати као

$$|\Psi(t)\rangle = a|\phi_+\rangle_S \otimes |\chi_+(t)\rangle_E + b|\phi_-\rangle_S \otimes |\chi_-(t)\rangle_E. \tag{9.58}$$

Ово стање управо одговара интеракционом хамилтонијану $\hat{H}_{int} = \hat{C}_S \otimes \hat{D}_E$, (9.54), са $\hat{C} \equiv \hat{\sigma}_{zS} = c_+|+\rangle\langle+| - c_-|-\rangle\langle-|$. Зато

$$|\chi_\pm(t)\rangle_E = e^{-\frac{\imath t}{\hbar} c_\pm \sum_{m=1}^{N} g_m \hat{\sigma}_{mE} \otimes \prod_{m \neq m'} \hat{I}_{m'}} |\chi\rangle_E. \tag{9.59}$$

Како се окружење састоји од N независних спинова, стање окружења може се записати као:

$$|\chi\rangle_E = \prod_{j=1}^{N} (a_j|+\rangle_{Ej} + b_j|-\rangle_{Ej}). \tag{9.60}$$

Замењујући (9.60) у (9.59) следи:

$$\begin{aligned}
|\chi_{\pm}(t)\rangle_E &= \prod_{m=1}^{N} e^{-\frac{\imath t}{\hbar} c_{\pm} g_m \hat{\sigma}_{mE} \otimes \prod_{m\neq m'} \hat{I}_{m'}} \prod_{j=1}^{N} (a_j|+\rangle_{Ej} + b_j|-\rangle_{Ej}) = \\
&= \prod_{m=1}^{N} e^{-\frac{\imath t}{\hbar} c_{\pm} g_m (\hat{P}^{+}_{mE} - \hat{P}^{-}_{mE}) \otimes \prod_{m\neq m'} \hat{I}_{m'}} \prod_{j=1}^{N} (a_j|+\rangle_{Ej} + b_j|-\rangle_{Ej}) = \\
&= \prod_{m=1}^{N} \Bigg[e^{-\frac{\imath t}{\hbar} c_{\pm} g_m \hat{P}^{+}_{mE} \otimes \prod_{m\neq m'} \hat{I}_{m'}} \prod_{j=1}^{N} (a_j|+\rangle_{Ej} + b_j|-\rangle_{Ej}) + \\
&+ e^{\frac{\imath t}{\hbar} c_{\pm} g_m \hat{P}^{-}_{mE} \otimes \prod_{m\neq m'} \hat{I}_{m'}} \prod_{j=1}^{N} (a_j|+\rangle_{Ej} + b_j|-\rangle_{Ej}) \Bigg] = \\
&= \prod_{m=1}^{N} \Bigg[a_m e^{-\frac{\imath t}{\hbar} c_{\pm} g_m} |+\rangle_{Em} + b_m e^{\frac{\imath t}{\hbar} c_{\pm} g_m} |-\rangle_{Em} \Bigg]. \qquad (9.61)
\end{aligned}$$

Стање (9.61) може се другачије записати. Два експонента могу с записати као један увођењем ознаке $\alpha_m = \pm 1$ која је истог знака као и одговарајући кет $|j_m\rangle_E$, тако да важи $\operatorname{sgn} \alpha_m = \operatorname{sgn} j_m$. Отуда

$$|\chi_{\pm}(t)\rangle_E = \prod_{m=1}^{N} (a_m + b_m) e^{-\frac{\imath}{\hbar} c_{\pm} g_m \alpha_m t} |j_m\rangle_E, \qquad (9.62)$$

односно

$$|\chi_{\pm}(t)\rangle_E = \prod_{m=1}^{N} (a_m + b_m) \prod_{m=1}^{N} e^{-\frac{\imath}{\hbar} c_{\pm} g_m \alpha_m t} |j_m\rangle_E \qquad (9.63)$$

Први чинилац у последњој једначини, $\prod_{m=1}^{N}(a_m + b_m)$, даје збир чланова облика, нпр. $a_1 b_2 a_3 ... a_N$, па имајући у виду стање (9.60), може се писати:

$$|\chi_{\pm}(t)\rangle_E = \sum_{j_1 j_2 ... j_N = \pm 1} c_{j_1} c_{j_2} ... c_{j_N} \prod_{m=1}^{N} e^{-\frac{\imath}{\hbar} c_{\pm} g_m \alpha_m t} |j_m\rangle_E, \qquad (9.64)$$

што уз коришћење особина експоненцијалне функције води коначном запису:

$$|\chi_{\pm}(t)\rangle_E = \sum_{j_1 j_2 ... j_N = \pm 1} c_{j_1} c_{j_2} ... c_{j_N} e^{-\frac{\imath}{\hbar} c_{\pm} t \sum_{m=1}^{N} g_m \alpha_m} \prod_{m=1}^{N} |j_m\rangle_E. \qquad (9.65)$$

Последњи запис је од користи јер се у њему јасно издваја спектар интеракционог хамилтонијана и види се да је најнижа енергија система $E_g = -\sum_{m=1}^{N} g_m$.

Одговарајуће мешано стање (9.6), гласи:

$$\hat{\sigma} = |a|^2|+\rangle_S\langle+| \otimes \hat{\rho}^E_+ + |b|^2|-\rangle_S\langle-| \otimes \hat{\rho}^E_- + ab^*|+\rangle_S\langle-| \otimes \hat{\rho}^E_{+-} + a^*b|-\rangle_S\langle+| \otimes \hat{\rho}^E_{-+}. \quad (9.66)$$

где су

$$\hat{\rho}^E_\pm(t_\circ) = \sum_{j_1 \ldots j'_N} c_{j_1} \ldots c^*_{j'_N} e^{-\imath t_\circ c_\pm \sum_m g_m(\alpha_m - \alpha'_m)} e^{-(c_\pm \sum_m g_m(\alpha_m - \alpha'_m))^2/(4\lambda)} \prod_m |j_m\rangle_E\langle j'_m| \quad (9.67)$$

и

$$\hat{\rho}^E_{+-}(t_\circ) = \sum_{j_1 \ldots j'_N} c_{j_1} \ldots c^*_{j'_N} e^{-\imath t_\circ \sum_m g_m(c_+\alpha_m - c_-\alpha'_m)} e^{-(\sum_m g_m(c_+\alpha_m - c_-\alpha'_m))^2/(4\lambda)} \prod_m |j_m\rangle_E\langle j'_m| \quad (9.68)$$

при чему α_m тиче се j_m а α'_m тиче се j'_m.

Сада следи да је:

$$\hat{\rho}^E_+(t_\circ)\hat{\rho}^E_-(t_\circ) = \sum_{j_1 \ldots j_N, j'_1 \ldots j'_N} c_{j_1} \ldots c_{j_N} c^*_{j'_1} \ldots c^*_{j'_N} e^{-\imath t_\circ \sum_m g_m(c_+\alpha_m - c_-\alpha'_m)} \prod_m |j_m\rangle_E\langle j'_m| \times$$
$$\left(\sum_{j''_1 \ldots j''_N} |c_{j''_1}|^2 \ldots |c_{j''_N}|^2 e^{-\imath t_\circ (c_- - c_+) \sum_m g_m \alpha''_m} e^{-\frac{(c_+ \sum_m g_m(\alpha_m - \alpha''_m))^2 + (c_- \sum g_m(\alpha''_m - \alpha'_m))^2}{4\lambda}} \right)$$
$$tr_E \hat{\rho}^E_{+-} = \sum_{j_1 \ldots j_N} |c_{j_1}|^2 \ldots |c_{j_N}|^2 e^{-\imath t_\circ (c_+ - c_-) \sum_m g_m \alpha_m} e^{-((c_+ - c_-)\sum_m g_m \alpha_m)^2/4\lambda}. \quad (9.69)$$

Члан у заградама и траг $tr_E \hat{\rho}^E_{+-}$ облика су χ-функције која се појавила у доказу леме 9.1, што значи да лема важи за модел који се разматра: формално, испуњено је $\lim_{t_\circ \to \infty} \hat{\rho}^E_+ \hat{\rho}^E_- = 0$ и $\lim_{t_\circ \to \infty} tr_E \hat{\rho}^E_{+-} = 0$ за $N \gg 1$.

Да би се добила процена за τ_{min}, потребно је израчунати $\langle \hat{H}_{int} \rangle$ и $\Delta \hat{H}_{int}$.

Нека је интеракција, у краћем запису $\hat{H}_{int} = \hat{\sigma}_{zS} \otimes \hat{D}_E$, онда из (9.58) следи:

$$\langle \hat{H}_{int} \rangle = |a|^2 \ {}_S\langle+|\hat{\sigma}_{zS}|+\rangle_{SE}\langle\chi_+(t)|\hat{D}_E|\chi_+(t)\rangle_E + |b|^2 \ {}_S\langle-|\hat{\sigma}_{zS}|-\rangle_{SE}\langle\chi_-(t)|\hat{D}_E|\chi_-(t)\rangle_E, \quad (9.70)$$

односно

$$\langle \hat{H}_{int} \rangle = |a|^2 \ {}_E\langle\chi_+(t)|\hat{D}_E|\chi_+(t)\rangle_E - |b|^2 \ {}_E\langle\chi_-(t)|\hat{D}_E|\chi_-(t)\rangle_E. \quad (9.71)$$

Користећи једнакост $|\chi_\pm(t)\rangle_E = \prod_{m=1}^N \left(a_m e^{-\frac{\imath t}{\hbar} c_\pm g_m} |+\rangle_{Em} + b_m e^{\frac{\imath t}{\hbar} c_\pm g_m} |-\rangle_{Em} \right)$ следи да је:

$$
\begin{aligned}
{}_E\langle\chi_+(t)|\hat{D}_E|\chi_+(t)\rangle_E = {} & \left(a^*_{m'}e^{\frac{\imath t}{\hbar}g_{m'}}{}_{Em}\langle+| + b^*_{m'}e^{-\frac{\imath t}{\hbar}g_{m'}}{}_{Em}\langle-|\right)\Big(\sum_{r=1}^{N} g_r\hat{\sigma}_{rE}\prod_{r\neq r'}\hat{I}_{r'}\Big)\times \\
& \times\left(a_m e^{-\frac{\imath t}{\hbar}g_m}|+\rangle_{Em} + b_m e^{\frac{\imath t}{\hbar}g_m}|-\rangle_{Em}\right) = \sum_{r=1}^{N} g_r\Big(|a_r|^2 - |b_r|^2\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{9.72}
$$

Није тешко уверити се да и за ${}_E\langle\chi_-(t)|\hat{D}_E|\chi_-(t)\rangle_E$ важи исти резултат, па је очекивана вредност:

$$
\langle\hat{H}_{int}\rangle = \Big(|a|^2 - |b|^2\Big)\sum_{r=1}^{N} g_r\Big(|a_r|^2 - |b_r|^2\Big). \tag{9.73}
$$

Са друге стране је:

$$
\begin{aligned}
\hat{H}^2_{int} &= \hat{I}_S\otimes\Big(\sum_{m=1}^{N} g_m\hat{\sigma}_{mE}\otimes\prod_{m'\neq m}\hat{I}_{m'}\Big)\Big(\sum_{q=1}^{N} g_q\hat{\sigma}_{qE}\otimes\prod_{q'\neq q}\hat{I}_{q'}\Big) = \\
&= \hat{I}_S\otimes\sum_{m,q} g_m g_q\hat{\sigma}_{mE}\hat{\sigma}_{qE}\otimes\prod_{m'\neq m}\hat{I}_{m'}\prod_{q'\neq q}\hat{I}_{q'}\,,
\end{aligned}
\tag{9.74}
$$

одакле на основи идентитета $\hat{\sigma}_m\hat{\sigma}_q = \imath\epsilon_{mqp}\hat{\sigma}_p + \delta_{mq}\hat{I}$, следи:

$$
\begin{aligned}
\hat{H}^2_{int} = {} & \hat{I}_S\otimes\sum_{m,q} g_m g_q\imath\epsilon_{mqp}\hat{\sigma}_{pE}\otimes\prod_{m'\neq m}\hat{I}_{m'}\prod_{q'\neq q}\hat{I}_{q'} + \\
& + \hat{I}_S\otimes\sum_{m,q}\delta_{mq}g_m g_q,
\end{aligned}
\tag{9.75}
$$

па је

$$
\langle\hat{H}^2_{int}\rangle = \sum_m g_m^2, \tag{9.76}
$$

јер је средња вредност првог сабирка у (9.75) нула.

Да би се добила нумеричка процена τ_{min} узмимо да су константе интеракције $g_m \in (0,1)$ и да је $|a_r| \approx |b_r|, \forall r$ из чега следи да је $\langle\hat{H}_{int}\rangle \approx 0$, а за стандардну девијацију, на основи (9.76), следи да је $\Delta\hat{H}_{int} = \sqrt{\sum_m g_m^2}$. За случајно изабрани $g_m = m/N$ са подједнаком вероватноћом $1/N$ за свако g_m, следи да је $\Delta\hat{H}_{int} = \sqrt{N^{-3}\sum_{m=1}^{N} m^2} = \sqrt{N^{-3}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}} = 3^{-1/2} > -E_g = N^{-2}\sum_{m=1}^{N} m = N^{-2}\frac{N(N+1)}{2} = 1/2$, за $N \gg 1$. Из овога следи да $\tau_{min}/2 = \pi/2 > 1.57$. Зато се може изабрати $\Delta t = 1.56$ и $\lambda = 1$, што су вредности у складу са (9.12).

Експоненцијални изрази који се појављују у (9.68) ($\hbar = 1$ и $\lambda = 1$)

$$e^{-\frac{(\sum_m g_m(c_+\alpha_m \pm c_-\alpha'_m))^2}{4\lambda}} = e^{-\frac{(\sum_m g_m(\alpha_m \pm \alpha'_m))^2}{4}}, \tag{9.77}$$

а пошто је $\max\{\alpha_m \pm \alpha'_m\} = 2$ и за горе добијену вредност $\sum_m g_m = \frac{1}{2}$, следи да је вредност експоненцијалног израза $e^{-\frac{1}{4}} = 0.779$. Други, "немаксимални", изрази у експоненту су облика:

$$\left(\sum_m g_m(\alpha_m \pm \alpha'_m)\right)^2 = \left(\pm\sum_{m=1}^{M} g_m \mp \sum_{m=M+1}^{N} g_m\right)^2 = \left(N^{-2}\big(\pm\sum_{k=1}^{M} m \mp \sum_{m=1}^{N-M} m\big)\right)^2. \tag{9.78}$$

За једну комбинацију знакова, нпр.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N^2}\left(\frac{M(M+1)}{2} - \frac{(N-M)(N-M-1)}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2N^2}\big(M^2 + M - N^2 + 2NM - M^2 - N + M\big) \approx -\frac{1}{2},\end{aligned} \tag{9.79}$$

за $N \gg 1$, па је нумеричка вредност $e^{-\frac{1}{16}} \approx 0.94$. Лако се проверава, да и за остале комбинације знакова, бројна вредност не опада испод 0.94. Дакле, и овом моделу је присутан висок степен кохеренције.

Размотримо сада четири честице спина $\frac{1}{2}$, као систем, са спектром $a_i \in \{-2, -1, 1, 2\}$, при чему a_i стоје уместо горњих коефицијената $c_\pm$. За рецимо 2 и -1 својствене вредности и за случајно одабране константе g_m, важи $e^{-\frac{(\sum_m g_m(2\alpha_m - \alpha'_m))^2}{4}} = e^{-\frac{(3\sum_m g_m)^2}{4}} = e^{-\frac{9}{16}} \approx 0.57$, док највећа вредност износи $e^{-\frac{(\sum_m g_m(2\alpha_m - \alpha'_m))^2}{4}} = e^{-\frac{(\sum_m g_m)^2}{4}} = e^{-\frac{1}{16}} \approx 0.939$. За пар својствених вредности, најмањи члан износи 0.368 док је највећи близу јединице. Отуда следи да ако се спектар огруби, на пример, $a'_j \in \{-2, 0, 2\}$, онда за својствене вредности 2 и 0 добија се (λ остаје фиксирано) нумеричка вредност $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.778$ док за $2, -2$ остаје иста вредност као и пре. Овиме је илустровано да огрубљивање спектра хамилтонијана води мањој кохеренцији.

(г) Мерење положаја Реч је о класичном фон Нојмановом моделу мерења положаја једнодимезионалне честице, који се моделује уз помоћ интеракције $\hat{H}_{int} = C\hat{x}_O \otimes \hat{P}_A$ (слични резултати добијају се и у случају интеракције $\hat{H}_{int} = C\hat{x}_O \otimes \hat{X}_A$).

Нека је почетно стање система:

$$|\phi\rangle_O|\chi\rangle_A = \int\int dxdP\phi(x)\chi(P)|x\rangle_O|P\rangle_A. \tag{9.80}$$

Унитарна еволуција даје:

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{\imath}{\hbar}tC\hat{x}_O\otimes\hat{P}_A}\int\int dxdP\phi(x)\chi(P)|x\rangle_O|P\rangle_A = \\ & = \int\int dxdP\phi(x)\chi(P)e^{-\frac{\imath}{\hbar}tCxP}|x\rangle_O|P\rangle_A \equiv |\Psi(t)\rangle\,, \end{aligned} \tag{9.81}$$

а последњи ред је зато што важи:

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{\imath}{\hbar}tC\hat{x}_O\otimes\hat{P}_A} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{\imath}{\hbar}tC)^n}{n!}\hat{x}^n_O|x\rangle_O\otimes\hat{P}^n_A|p\rangle_A = \\ & = e^{-\frac{\imath tC}{\hbar}xP}|x\rangle_O\otimes|p\rangle_A\,. \end{aligned} \tag{9.82}$$

Зато је

$$|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| = \int\int\int\int dxdx'dpdp'\phi^*(x')\phi(x)\chi^*(p')\chi(p)e^{-\frac{\imath}{\hbar}tC(xP-x'P')}|x\rangle_O\langle x'|\otimes|p\rangle_A\langle p'|, \tag{9.83}$$

што је део статистичког оператора за целину, који је, подсетимо се, дефинисан као:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda(t-t_\circ)^2}|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|dt. \tag{9.84}$$

Замењујући (9.83) у (9.84) следи:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} = & \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda(t-t_\circ)^2}\times \\ & \times\int\int\int\int dxdx'dpdp'\phi^*(x')\phi(x)\chi^*(p')\chi(p)e^{-\frac{\imath}{\hbar}tC(xP-x'P')}|x\rangle_O\langle x'|\otimes|p\rangle_A\langle p'|\,, \end{aligned} \tag{9.85}$$

односно, преуређењем добија се:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} = & \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int\int dxdx'|x\rangle_O\langle x'|\otimes \\ & \otimes\int\int dpdp'\phi^*(x')\phi(x)\chi^*(p')\chi(p)|p\rangle_A\langle p'|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda(t-t_\circ)^2}e^{-\frac{\imath}{\hbar}tC(xP-x'P')}dt\,. \end{aligned} \tag{9.86}$$

Од интереса је интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-t_\circ)^2} e^{-\frac{\imath}{\hbar}tC(xP-x'P')}dt, \tag{9.87}$$

који се уводећи смену $t - t_\circ = \xi$ своди на следећи израз:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\xi^2} e^{-\frac{\imath}{\hbar}(\xi+t_\circ)C(xP-x'P')}d\xi = \\ &= e^{-\frac{\imath}{\hbar}Ct_\circ(xP-x'P')} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\xi^2} e^{-\frac{\imath}{\hbar}C(xP-x'P')\xi}d\xi\,. \end{aligned} \tag{9.88}$$

Стављајући $\lambda = \frac{a}{2}$ и $J = \frac{\imath}{\hbar}C(xP - x'P')$, горњи запис постаје једноставнији

$$I = e^{-\frac{\imath}{\hbar}Ct_\circ(xP-x'P')} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a\xi^2}{2}} e^{-J\xi}d\xi. \tag{9.89}$$

Одређени интеграл са десне стране је тзв. Гаусов интеграл (в. стр. 93) па је коначно:

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{\imath}{\hbar}Ct_\circ(xP-x'P')} e^{-\frac{(xP-x'P')^2}{4\hbar^2\lambda}}. \tag{9.90}$$

Сада је

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} = &\int\int dxdx'|x\rangle_O\langle x'| \otimes \int\int dpdp'\phi^*(x')\phi(x)\chi^*(p')\chi(p) \\ &|p\rangle_A\langle p'|e^{-\frac{\imath}{\hbar}Ct_\circ(xP-x'P')}e^{-\frac{(xP-x'P')^2}{4\hbar^2\lambda}}\,, \end{aligned} \tag{9.91}$$

или компактније

$$\hat{\sigma} = \int\int dxdx'|x\rangle_O\langle x'| \otimes \hat{\rho}_A(x,x'), \tag{9.92}$$

при чему је

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A(x,x') = &\int\int dpdp'\phi^*(x')\phi(x)\chi^*(p')\chi(p)\times \\ &\times |p\rangle_A\langle p'|e^{-\frac{\imath}{\hbar}Ct_\circ(xP-x'P')}e^{-\frac{(xP-x'P')^2}{4\hbar^2\lambda}}\,. \end{aligned} \tag{9.93}$$

Из (9.93) следи

$$tr_A\hat{\rho}_A(x,x') = \int dp\phi^*(x')\phi(x)|\chi(p)|^2 e^{-\frac{\imath}{\hbar}Ct_\circ(x-x')P} e^{-\frac{(x-x')^2P^2}{4\hbar^2\lambda}}. \tag{9.94}$$

Уз помоћ Риман-Лебегове (*Riemann*, *Lebesgue*) леме [13] (која каже да ако је $f(p)$ интеграбилна на интервалу $[a,b]$, онда важи да је $\lim_{t\to\infty}\int_a^b e^{\imath pt}f(p)dp = 0$) закључује се да је испуњено $\lim_{t_\circ\to\infty} tr_A\hat{\rho}_A(x,x') = 0$, што показује валидност леме 9.1 за овај модел.

Да би се илустровало колика је кохеренција у оваквом моделу, од интереса је фиделити, о којој је већ било речи у овој глави: $\mathcal{F} = \sqrt{\langle\Psi|\hat{\sigma}|\Psi\rangle}$.

Прорачун може се поједноставити ако се узму стања у почетном временском тренутку $t = 0$, а што је могуће због конзервативности система. Онда, одговарајућа стања су:

$$|\Psi\rangle = \int\int dxdP\phi(x)\chi(P)|x\rangle_O|P\rangle_A$$

и

$$\hat{\rho}_A(x,x') = \int\int dpdp'\phi^*(x')\phi(x)\chi^*(p')\chi(p)|p\rangle_A\langle p'|e^{-\frac{(xP-x'P')^2}{4\hbar^2\lambda}}.$$

Тада је:

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\hat{\sigma}|\Psi\rangle = \int\int dx'dp'\phi^*(x')\chi^*(p')_O\langle x'|_A\langle p'| \int\int dx''dx'''|x''\rangle_O\langle x'''|\otimes \\ \otimes\,\hat{\rho}_A(x'',x''')\int\int dxdp\phi(x)\chi(p)|x\rangle_O|p\rangle_A\,,\end{aligned} \tag{9.95}$$

односно

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\hat{\sigma}|\Psi\rangle = \int\int\int\int\int\int dx'dp'dx''dx'''dxdp\phi^*(x')\chi^*(p')\phi(x)\chi(p)_O\langle x'|x''\rangle_{OO}\langle x'''|x\rangle_O\times \\ \times\,{}_A\langle p'|\hat{\rho}_A(x'',x''')|p\rangle_A\,,\end{aligned} \tag{9.96}$$

што се своди на

$$\langle\Psi|\hat{\sigma}|\Psi\rangle = \int\int\int\int dx'dp'dxdp\phi^*(x')\chi^*(p')\phi(x)\chi(p)_A\langle p'|\hat{\rho}_A(x',x)|p\rangle_A\,. \tag{9.97}$$

Са друге стране:

$$\begin{aligned}{}_A\langle p'|\hat{\rho}_A(x',x)|p\rangle_A = {}_A\langle p'|(\int\int dpdp'\phi^*(x')\phi(x)\chi^*(p')\chi(p)\times \\ \times\,|p\rangle_A\langle p'|e^{-\frac{(x'P-xP')^2}{4\hbar^2\lambda}})|p\rangle_A = \phi^*(x')\phi(x)|\chi(p)|^2e^{-\frac{(x'P'-xP)^2}{4\hbar^2\lambda}}\,,\end{aligned} \tag{9.98}$$

па је фиделити дата коначним изразом:

$$\mathcal{F} = \sqrt{\int\int\int\int dx'dp'dxdp|\phi(x)|^2|\phi(x')|^2|\chi(p)|^2|\chi(p')|^2 e^{-\frac{(x'P'-xP)^2}{4\hbar^2\lambda}}}, \tag{9.99}$$

која открива висок ниво кохеренције за стања објекта – вредности за x и x' могу бити веома блиске. Са друге стране, вредности гаусијана $e^{-\frac{(x'P'-xP)^2}{4\lambda}}$ могу бити јако мале када је $|x - x'| \gg 4\lambda$. Тако, иако је спектар континуалан и кохеренција веома висока, има довољно гаусијана који ту кохеренцију умањују, што води стању $\hat{\sigma}$ које задовољава лему 9.1.

Нека је сложени систем ограниченог положаја, у интервалу $[-L, L]$ и нека су вредности импулса апарата (подсистем $\mathcal{A}$) у интервалу $[-P, P]$. Узмимо да су стандардна одступања $\hat{\sigma}_{x_O} \equiv \hat{\sigma}_1 \sim 1$ и $\hat{\sigma}_{P_A} \equiv \hat{\sigma}_2 \sim 1$ и да је $\langle \hat{H}_{int} \rangle = 0$, што је све заједно еквивалентно исказу да су таласне функције подсистема гаусијани, односно таласни пакети. Најнижа, основна енергија система је $E_g = -LP \ll 1$. Тада може се проценити време (за $\hbar = 1$ и $C = 1$): $\tau_{min}/2 = \max\{\pi/4\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2, \pi/4LP\} = \pi/4$, па је за избор $\Delta t = 0.78$ и $\lambda = 3$ задовољена једнакост (9.12).

(д) *Walls-Collet-Milburn*-ов модел мерења

Реч је о моделу мерења где су подсистеми $\mathcal{O}$ и $\mathcal{A}$ хармонијски осцилатори (дефинисани преко оператора анихилације и креације) са сепарабилном интеракцијом [83]:

$$\hat{H}_{OA} = \frac{\hbar}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a} \otimes (\epsilon^*\hat{b} + \epsilon\hat{b}^\dagger). \tag{9.100}$$

Окружење $\mathcal{E}$ подсистема $\mathcal{O}$ и $\mathcal{A}$, састоји се од скупа линеарних хармонијских осцилатора у термалној равнотежи, и налази се у интеракцији са подсистемом $\mathcal{A}$:

$$\hat{H}_{AE} = \hat{X}_A \otimes [\sum_j \kappa_j^*\hat{c}_{jE} + \sum_j \kappa_j\hat{c}_{jE}^\dagger], \tag{9.101}$$

где су $\hat{c}_{jE}$ анихилациони оператори окружења.

Интеракција (9.100) успоставља стање система $\mathcal{O} + \mathcal{A}$:

$$|\Psi(t)\rangle_{OA} = \sum_n c_n|n\rangle_O|n\epsilon t/2\rangle_A, \tag{9.102}$$

где је $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle_O = n|n\rangle_O$ а стања апарата ($\mathcal{A}$) су кохерентна стања, која су у формалном лимесу $t = t_\circ \to \infty$ приближно ортогонална. Али, како је интеракција (9.101) по облику иста као интеракција у претходној тачки (мерење положаја) значи да окружење, $\mathcal{E}$, мери опсерваблу положаја апарата ($\mathcal{A}$), $\hat{X}_A$: ова опсервабла издваја се као опсервабла бројача са приближним базисом бројача сачињеним од стања $|n\epsilon t/2\rangle_A$.

9.3 Резиме

Формално, разрада схема локалног времена уводи варијацију стандардне унитарне динамике затвореног система, која успоставља (9.6) као нови фундаментални закон квантне механике.

Стандардна унитарна динамика:

$$|\Psi(t_\circ)\rangle = \hat{U}(t_\circ)|\Psi(0)\rangle, \tag{9.103}$$

замењује се мешаним стањем (стања која су у општем случају неортогонална) у тренутку $t_\circ$:

$$\hat{\sigma}(t_\circ) = \int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} dt\rho(t)|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| = \int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} dt\rho(t)\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|\hat{U}^\dagger(t), \tag{9.104}$$

за које, рекло би се, нема алтернативе, у оквиру мимималног проширења стандардне теорије која се тиче (9.103).

Једначина (9.104), сада као основни динамички закон, последица је схеме локалног времена, која је пак проистекла из Китадиног тумачења Енсовог теорема: параметру који се појављује у поменутом теорему Китада је придружио значење локалног времена. Стандардни временски тренуци постају класични (скривени) параметар који је одређен унитарном динамиком (еквивалентно: интеракцијом међу подсистемима) затвореног (или приближно затвореног) квантног система у асимптотском лимесу: време је појавни, а не фундаментални физички појам. Каже се скривени параметар у смислу да је време локална и унутрашња (споља немерљива) особина квантног система, што доводи у питање смисленост схеме квантизације простор-времена (од интереса пре свега у квантној теорији гравитације), где су простор и време фундаменталне категорије. Зато се може рећи да различити хамилтонијани одређују различита локална времена, при чему је свако локално време карактеристика локалног (приближно) затвореног система.

Неодређеност времена у (9.104) је ансамбалског порекла: да не би (9.104) била само једна апроксимација једначине (9.103) интервал Δt не би требало да буде произвољно мали, односно довољно је да важи $\Delta t \ll t_\circ$. Како се $t_\circ$ тиче временског тренутка када су корелације у сложеном систему већ успостављене, онда формални лимес $t_\circ \to \infty$ има смисла.

Са друге стране, за неке вредности Δt, стање (9.104) је таквог облика да су нека стања међусобно ортогонална, што је у супротности са записом (9.103) (видети стање (9.10)). Да би се избегла контрадикција, потребно је да буде испуњено, $\tau_{min} > \Delta t$, при чему је τ_{min} одређено енергијским спектром сложеног система који се разматра. Избор гаусијанске временске густине вероватноће, $\rho(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda(t-t_\circ)^2}$, води ка неједнакости $\tau_{min} > \Delta t > \lambda^{-1/2}$, при чему због $\tau_{min} = max\{\pi\hbar/2\Delta\hat{H}, \pi\hbar/2(\langle\hat{H}\rangle - E_g)\}$ следи да је $\lambda > C^2$, где је C максимална од константи интеракција у сложеном систему[5].

Универзална квантно-механичка правила дефинисана су тачкама (а)-(г), чиме је регулисана улога времена са последицама, које се могу исказати на сажет начин: интеракција

---

[5] Како је $\tau_{min} = max\{\pi/2\Delta\hat{H}, \pi/2(\langle\hat{H}\rangle - E_g)\}$, а $\Delta\hat{H} \propto C^2$ и $(\langle\hat{H}\rangle - E_g) \propto C$ онда је $\tau_{min} = max\{\pi/2C^2, \pi/2C\} = \pi/2C$. Из $\tau_{min} = \pi/2C$ и $\lambda^{-1/2} < \tau_{min}/2$ следи да је $\lambda > 16C^2/\pi^2 > C^2$, тј. важи процена $\lambda > C^2$.

у систему дефинише време као параметар и свака промена у интеракцији “ресетује време”.

У схеми локалног времена системи са малим бројем честица, односно сиромашним енергијским спектром, задржавају висок степен кохеренције док се код многочестичних система опажа супротно, у складу и са теоријском и експерименталном праксом квантне физике.

Уочавањем дводелне структуре у многочестичном систему омогућено је репродуковање основних резултата теорије отворених квантних система и без позивања на механизам колапса или утицај окружења. При свему овоме схема локалног времена је минималистичка: нема увођења нових формалних елемената, нити претпоставки које излазе ван оквира стандардне механике, па је тиме јасно да схема локалног времена, сама по себи, не спада у интерпретације квантне механике.

Огрубљивање (*coarse graining*) хамилтонијана система води ка стању $\hat{\sigma}$ са мањим степеном кохеренције. На пример, нека је егзактни хамилтонијан од интереса:

$$\hat{H} = h_1\hat{P}_1 + h_2\hat{P}_2 + h_3\hat{P}_3 + h_4\hat{P}_4. \tag{9.105}$$

Огрубљивање хамилтонијана значи да неке својствене вредности постају неразличиве, нпр.: $h \equiv h_1 \approx h_2 < h_3 \approx h_4 \equiv h'$, па је огрубљени хамилтонијан:

$$\hat{H}' = h(\hat{P}_1 + \hat{P}_2) + h'(\hat{P}_3 + \hat{P}_4) = h\hat{\Pi} + h'\hat{\Pi}'. \tag{9.106}$$

За степен кохеренције у стању је одговоран гаусијански члан облика ($\hbar = 1$) $e^{-\frac{(h_n - h_{n'})^2}{2\lambda}}$, па је јасно да огрубљење води све мањим гаусијанским члановима, чији се број такође смањује: $\hat{\sigma}$ постаје све дијагоналније, тј. приближава се мешаном стању са све мањим и мањим вандијагоналним елементима. Приметити да је λ фиксирано, односно не узима се у обзир λ' које следи на основи огрубљеног хамилтонијана, што је пракса карактеристична за квантну информатику. Последње речено значи да у квантној информатици $\hat{H}'$ има онтолошки статус, односно тај хамилтонијан је извор информација.

Физички, јасно је, огрубљавање спектра мора бити узето у обзир, јер спектар од интереса може бити измењен услед промене у граничним условима, промене у јачини интеркације у дводелној структури и сл.

Како је показано, мањи степен кохеренције повлачи јединственост базиса бројача, што је уједно и главни допринос ове главе, уз примедбу да се све речено у овој глави тиче ансамбла: проблем појединачног квантног система (елемента ансамбла) остаје, за сада, нетакнут. Поред тога што је питање односа квантне механике и појма појединачног система од академског значаја јер се дотиче основа квантне теорије, разматрања везана за појединачни квантни систем су од интереса за квантну информатику и рачунање, на пример, јер је задатак у овој области заправо манипулација појединачним квантним системима.

10

Марковљевост као динамичка последица схеме локалног времена

Отклон од стандардне унитарне динамике, Глава 5 и Глава 9, води пресликавању (мапи):

$$|\Psi(t=0)\rangle\langle\Psi(t=0)| \to \hat{\sigma}(t_\circ) = \int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} \rho(t)|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|dt, \tag{10.1}$$

тј.

$$\hat{\sigma}(t_\circ) = \int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} dt\rho(t)\hat{U}(t)\hat{\sigma}(0)\hat{U}^\dagger(t), \tag{10.2}$$

односно, формално записано преко мапе $\mathcal{E}$:

$$\hat{\sigma}(t_\circ) = \mathcal{E}_{(t_\circ,0)}[\hat{\sigma}(0)]. \tag{10.3}$$

Једначина (10.2) је у форми тзв. стохастичке унитарне мапе [84], чији је стандардни запис облика $\sum_i p_i\hat{U}_i(t)\hat{\sigma}(0)\hat{U}_i^\dagger(t), \sum_i p_i = 1, \forall t$ где су $\hat{U}_i$, унитарни оператори $\forall i$. За разлику од стандардног записа, види се да мапа (10.2) варира током времена, услед неодређености времена.

Пројекторски облик мапе (10.2), користећи запис $\hat{U}(t) = \sum_n e^{-\frac{\imath t E_n}{\hbar}}\hat{P}_n$ (где су E_n и $\hat{P}_n$ својствене вредности и одговарајући ортогонални пројектори хамилтонијана сложеног система, редом) и Гаусов интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2+\imath Jx}dx = (\frac{2\pi}{a})^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{J^2}{2a}}$ ($a > 0$ и J су реални бројеви) гласи:

$$\hat{\sigma}(t_\circ) = \sum_{m,n} e^{-\frac{\imath t_\circ(E_m-E_n)}{\hbar}} e^{-\frac{(E_m-E_n)^2}{4\lambda\hbar^2}} \hat{P}_m\hat{\sigma}(0)\hat{P}_n. \tag{10.4}$$

Особине мапе (10.4):

(1) Мапа је линеарна, позитивна и чува траг оператора на који делује.

(2) Мапа је унитална, $\mathcal{E}[\hat{I}] = \hat{I}$.

(3) Десна страна мапе (10.2) је у Краусовом облику, што гарантује њену комплетну позитивност [13].

Појам комплетне позитивности је био представљен у глави 3, а овде ће од интереса бити критеријум Јамиолковског (*Jamiolkowski*) [85]: мапа $\mathcal{E}$ је комплетно позитивна акко је проширена мапа $\mathcal{I} \otimes \mathcal{E}$ позитивна када делује на стање $|\psi\rangle$ проширеног система, тј. у формалном запису:

$$\langle\phi|\left(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E}[|\psi\rangle\langle\psi|]\right)|\phi\rangle \geq 0, \forall|\phi\rangle. \tag{10.5}$$

Стављајући $|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle|i\rangle/\sqrt{d}$ и произвољно стање $|\phi\rangle = \sum_{l,l'} c_{ll'}|l\rangle|l'\rangle$ у једнакост (10.5) добија се

$$\frac{1}{d}\sum_{i,j,l,l'} c^*_{il}c_{jl'}\langle l|\left(\mathcal{E}[|i\rangle\langle j|]\right)|l'\rangle \geq 0. \tag{10.6}$$

Примењен на мапу (10.2), критеријум (10.6) даје:

$$\int_{t_\circ-\Delta t}^{t_\circ+\Delta t} dt\rho(t)\left|\sum_{i,l} c^*_{il}\langle l|\hat{U}(t)|i\rangle\right|^2 > 0 \tag{10.7}$$

што говори о комплетној позитивности мапе $\mathcal{E}$.

Мапа (10.4) може бити представљена у Краусовој форми и на следећи начин. Горе показана комплетна позитивност $\langle\chi|\sigma(t_\circ)|\chi\rangle \geq 0,\ \forall|\chi\rangle, t_\circ$ има за последицу да је матрица $\mathcal{A} = e^{-\frac{(E_m-E_n)^2}{4\lambda\hbar^2}}$ позитивно семи-дефинитна. Онда дијагонализација матрице $\mathcal{A}$ унитарном матрицом $\mathcal{U} = (u_{km})$ даје $A_{mn} = \sum_k \gamma_k u^*_{km}u_{kn}$ са својственим вредностима $\gamma_k \geq 0,\ \forall k$, при чему је $A_{mm} = 1, \forall m$. Отуда

$$\hat{\sigma}(t_\circ) = \sum_k \hat{K}_k(t_\circ)\hat{\sigma}(0)\hat{K}^\dagger_k(t_\circ), \tag{10.8}$$

где су Краусови оператори $\hat{K}_k(t_\circ) = \sqrt{\gamma_k}\sum_m u^*_{km}e^{-\frac{\imath t_\circ E_m}{\hbar}}\hat{P}_m$ и задовољена је релација комплетности $\sum_k \hat{K}^\dagger_k(t_\circ)\ \hat{K}_k(t_\circ) = \hat{I}$.

Али, мапа о којој је реч има једно неочекивано својство. Наиме, за произвољни временски тренутак мапа задовољава:

$$\mathcal{E}_{(t,t)} \neq \mathcal{I}, \forall t \tag{10.9}$$

где је $\mathcal{I}$ идентична мапа; за почетни временски тренутак, $t_\circ = 0$, мапа не даје, како би се очекивало, почетно стање $\hat{\sigma}(0)$. Дакле, за разлику од стандардне теорије где временски тренуци у принципу могу узимати вредности $t_\circ \in (-\infty, \infty)$, што је знак реверзибилности динамике, у схеми локалног времена постоји ограничење: $t_\circ \in (0, \infty)$, иако се мапа односи на затворени систем.

Са друге стране, (10.9) указује на то да је у питању недиференцијабилни процес, односно процес за који дефиниција ни двопараметарске фамилије, ни једнопараметарске полугрупе (или дефиниција генератора $\mathcal{L}_t$) нема смисла, што се може закључити из једначина (3.28), (3.29) и (3.30): динамика не може се исказати у диференцијалној форми, тј. кроз одговарајућу мастер једначину.

Будући да је (10.2) закон кретања у схеми локалног времена, а обзиром на горе речено, од интереса је изучити ову мапу са чисто формалне стране. Какве су последице по динамику на подсистемском нивоу? Има ли места Марковљевим процесима, на целини, и/или на подсистему?

Даља дискусија ће се, наравно, тицати мапе у интегралној форми, тј. неког од (10.2)-(10.4) еквивалентних облика, а није наодмет напоменути да је сада реч о затвореним многочестичним системима, пошто мали системи нису од интереса, в. Главу 9. Отворени подсистеми ће бити дискутован у другом делу ове главе.

Лема 10.1. *Мапа* (10.3) *може се комбиновати са унитарном динамиком, тј.:*

$$\mathcal{E}_{(t_\circ,0)}[\hat{\sigma}(0)] = \mathcal{U}_{(t_\circ,t'')}\left[\mathcal{E}_{(t'',t')}\left[\mathcal{U}_{(t',0)}[\hat{\sigma}(0)]\right]\right], \quad t_\circ \geq t'' \geq t' > 0, \tag{10.10}$$

где је $\mathcal{U}(\tau,\tau')(*) = \hat{U}^\dagger(\tau,\tau')(*)\hat{U}(\tau,\tau')$ *супероператор унитарне еволуције.*

Доказ. Унитарни део еволуције, за временски интервал $(0,t')$, по дефиницији гласи:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{(t',0)}[\hat{\sigma}(0)] &= \sum_{m,n} e^{-\frac{\imath t'}{\hbar}E_m}\hat{P}_m\hat{\sigma}(0)e^{\frac{\imath t'}{\hbar}E_n}\hat{P}_n = \\ &= \sum_{m,n} e^{-\frac{\imath t'}{\hbar}(E_m-E_n)}\hat{P}_m\hat{\sigma}(0)\hat{P}_n = \\ &= \hat{\sigma}(t')\,. \end{aligned}\tag{10.11}$$

Онда деловање мапе $\mathcal{E}$, на (10.4), у временском интервалу (t',t'') даје:

$$\hat{\sigma}(t'') = \mathcal{E}_{(t'',t')}[\hat{\sigma}(t')] = \sum_{s,p} e^{-\frac{\imath(t''-t')}{\hbar}(E_s-E_p)}e^{-\frac{(E_s-E_p)^2}{4\hbar^2\lambda}}\hat{P}_s\hat{\sigma}(t')\hat{P}_p, \tag{10.12}$$

док поновно деловање унитарне еволуције, са друге стране, производи:

$$\mathcal{U}_{(t_\circ,t'')}[\hat{\sigma}(t'')] = \sum_{a,b} e^{-\frac{\imath(t_\circ-t'')}{\hbar}(E_a-E_b)}\hat{P}_a\hat{\sigma}(t'')\hat{P}_b. \tag{10.13}$$

Стављањем (10.11) у (10.12), а онда добијено стање у (10.13), следи:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(t_\circ) = \sum_{a,b,s,p,m,n} & e^{-\frac{\imath(t_\circ-t'')}{\hbar}(E_a-E_b)}e^{-\frac{\imath(t''-t')}{\hbar}(E_s-E_p)}e^{-\frac{(E_s-E_p)^2}{4\hbar^2\lambda}}\times \\ & \times e^{-\frac{\imath t'}{\hbar}(E_m-E_n)}\hat{P}_a\hat{P}_s\hat{P}_m\hat{\sigma}(0)\hat{P}_n\hat{P}_p\hat{P}_b\,. \end{aligned}\tag{10.14}$$

Користећи особине пројектора: $\hat{P}_a\hat{P}_s\hat{P}_m = \delta_{as}\delta_{am}\hat{P}_m$ и $\hat{P}_n\hat{P}_p\hat{P}_b = \delta_{np}\delta_{nb}\hat{P}_b$, добија се израз:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(t_\circ) &= \sum_{p,m} e^{-\frac{\imath t_\circ}{\hbar}(E_m-E_p)}e^{-\frac{(E_m-E_p)^2}{4\hbar^2\lambda}}\hat{P}_m\hat{\sigma}(0)\hat{P}_p = \\ &= \mathcal{E}_{(t_\circ,0)}[\hat{\sigma}(0)]\,, \end{aligned}\tag{10.15}$$

што показује тврђење леме. ■

Лема 10.1 открива да се неодређеност временског тренутка $t_\circ$, у једначини (10.2), тиче сваког временског тренутка $t \in (0, t_\circ]$, али не и временског интервала. Неодређеност временског тренутка не може се протумачити ни као последица дејства квантног канала ("шум")[1], јер деловање квантног канала није тренутно, већ подразумева коначност временског интервала деловања.

Лема 10.2. *Мапа* (10.3) *није декомпозабилна, тј. важи неједнакост:*

$$\mathcal{E}_{(t_\circ,0)}[\hat{\sigma}(0)] \neq \mathcal{E}_{(t_\circ,t')}\left[\mathcal{E}_{(t',0)}[\hat{\sigma}(0)]\right], \quad t_\circ \geq t' > 0. \tag{10.16}$$

Доказ. Десна страна једнакости (10.16), је због (10.4):

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(t_\circ) = &\sum_{m,n} e^{-\frac{\imath(t_\circ - t')(E_m - E_n)}{\hbar}} e^{-\frac{(E_m-E_n)^2}{4\lambda\hbar^2}} \\ &\hat{P}_m \left[\sum_{p,q} e^{-\frac{\imath t'(E_p-E_q)}{\hbar}} e^{-\frac{(E_p-E_q)^2}{4\lambda\hbar^2}} \hat{P}_p \hat{\sigma}(0) \hat{P}_q\right] \hat{P}_n \\ = &\sum_{m,n} e^{-\frac{\imath t_\circ(E_m-E_n)}{\hbar}} e^{-\frac{2(E_m-E_n)^2}{4\lambda\hbar^2}} \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{P}_n. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Дељењем интервала $(0, t_\circ]$ на k подинтервала, добио би се израз:

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n} e^{-\frac{\imath t_\circ(E_m-E_n)}{\hbar}} e^{-\frac{k(E_m-E_n)^2}{4\lambda\hbar^2}} \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{P}_n = \\ &= \sum_m \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m + \sum_{m\neq n} e^{-\frac{\imath t_\circ(E_m-E_n)}{\hbar}} e^{-\frac{k(E_m-E_n)^2}{4\lambda\hbar^2}} \hat{P}_m \sigma(0) \hat{P}_n \to \\ &\xrightarrow{k\to\infty} \sum_m \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m\,, \end{aligned} \tag{10.18}$$

што је различито од деловања мапе,(10.4), чиме је доказ завршен. ■

Како лема 10.2 показује, мапа није декомпозабилна, те према томе није ни Марковљева (в. дефиницију 3.2 на стр. 36).

Лема 10.3. *Неједнозначност почетног временског тренутка,* $t = 0$, *у једначини* (10.2) *не мења особине, нити облик мапе.*

Доказ. Почетни временски тренутак је дефинисан почетком интеракције два, до тада приближно неинтерагујућа система, од којих сваки има своје локално дефинисано време. Неодређеност почетног временског тренутка тиче се неодређености трајања приближно независне динамике два система.

---

[1] Квантни канал је физички остварива динамичка мапа (процес) непрекидна у времену. Шум је посебна врста канала која се огледа у утицају окружења на систем. Квантна декохеренција, посматрана као процес, је контрапример, јер мења окружење.

На основи (10.4) следи:

$$\sigma(t_\circ) = \sum_{m,n} e^{-\frac{\imath t_\circ (E_m - E_n)}{\hbar}} e^{-\frac{(E_m-E_n)^2}{4\lambda\hbar^2}} \hat{P}_m \hat{\sigma}'(0) \hat{P}_n, \tag{10.19}$$

где је

$$\hat{\sigma}'(0) = \int_{-\delta t}^{\delta t} \rho'(t) \hat{U}'(t) \hat{\sigma}(0) \hat{U}'^{\dagger}(t) dt. \tag{10.20}$$

За неинтерагујуће (слабо интерагујуће) системе унитарни оператор је $\hat{U}'(t) = \sum_p e^{-\frac{\imath t E'_p}{\hbar}} \hat{P}_p$ и $\hat{\sigma}(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$, при чему је стање у почетном временском тренутку, $t = 0$, $|\Psi(0)\rangle = |\psi(t_{1\circ})\rangle_1 |\phi(t_{2\circ})\rangle_2$ а одговарајућа густина вероватноће дата је изразом $\rho'(t) = \sqrt{\frac{\lambda'}{\pi}} e^{-\lambda' t^2}$. Тада је стање (10.20) облика:

$$\hat{\sigma}'(0) = \sum_{p,q} e^{-\frac{(E'_p - E'_q)^2}{4\lambda'\hbar^2}} \hat{P}_p \hat{\sigma}(0) \hat{P}_q. \tag{10.21}$$

Δt и δt одређују два параметра, λ и λ', редом. δt не би требало да буде веће од Δt да би стање у почетном временском тренутку било што приближније стању $|\Psi(t_\circ)\rangle = \hat{U}(t_\circ)|\Psi(0)\rangle$. Из $\delta t < \Delta t$ следи $\lambda' > \lambda$. Нека c и C одређују енергијске скале неинтерагујућег и интерагујућег хамилтонијана, редом, тако да је испуњено да је интеракциони хамилтонијан доминантан по јачини, $c \ll C$ (у јединицама $\hbar = 1$). Онда важи $\lambda' > \lambda > C^2$, па гаусијански члан у (10.21) може се проценити на следећи начин: $e^{-\frac{(E'_p - E'_q)^2}{4\lambda'\hbar^2}} = e^{-\frac{c^2}{4\lambda'}}$, а због $\frac{c^2}{4\lambda'} < \frac{c^2}{4\lambda} < \frac{c^2}{4C^2}$ следи да је $e^{-\frac{c^2}{4C^2}} \approx 1$ имајући у виду $c \ll C$. Обзиром на овакву процену, из (10.21) следи да је $\hat{\sigma}'(0) \approx \hat{\sigma}(0)$, чиме је лема доказана. ■

Другим речима, лема 10.3 каже да су, за случај јаке интеракције који је од интереса у декохеренцији сличним процесима (и уопште: да би системи имали исто време, морају јако интераговати), динамике дате једначинама (10.4) и (10.19) практично неразличиве.

10.1 Приближна мапа

Нумеричке вредности гаусијанских фактора у једначини (10.4) зависе од енергијског спектра $\{E_m\}$ и почетног стања $|\Psi(0)\rangle$. Претпоставимо да свакој својственој вредности E_m одговара скуп нумерички блиских вредности E_{ν_m}: другим речима нека је спектар $\{E_m\}$ огрубљење спектра $\{E_{\nu_m}\}$. Стандардни *coarse graining* онда уводи нови скуп својствених вредности тако да је $E_m \approx E_{\nu_m}$ и одговарајуће својствене пројекторе, чиме се полазни хамилтонијан редефинише, а тиме се редефинише и константа λ у нову константу λ'. У наставку нећемо се држати стандардне процедуре: напротив, биће задржано λ које се тиче оригиналног хамилтонијана.

За гаусијанске факторе огрубљеног хамилтонијана важи процена:

$$e^{-\frac{(E_k - E_{k'})^2}{4\lambda\hbar^2}} \ll 1, \quad k \in \{m, \nu_m\}, k' \in \{m', \nu'_{m'}\}, \forall m \neq m', \tag{10.22}$$

док за "блиске" вредности полазног спектра важи, стављајући $E_{\nu_m} - E_{\nu'_m} \approx \delta_m > 0$,

$\forall m, \nu, \nu'$, да је $e^{-\frac{\delta_m^2}{4\lambda\hbar^2}} \approx 1, \forall m$.

Из (10.4) следи приближна мапа:

$$\hat{\sigma}(t_\circ) \approx \sum_m \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m + \sum_{\nu_m \neq m} e^{-\frac{\imath t_\circ (E_m - E_{\nu_m})}{\hbar}} \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{P}_{\nu_m} \tag{10.23}$$

односно, након сумирања у другом сабирку израза (10.23), имамо следећи запис:

$$\hat{\sigma}(t_\circ) \approx \sum_m \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m + \sum_m e^{-\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{\Pi}^{(m)} + \sum_m e^{\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \hat{\Pi}^{(m)} \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m, \tag{10.24}$$

са скраћеницом $\hat{\Pi}^{(m)} = \sum_{\nu_m} \hat{P}_{\nu_m}$.

У (10.24), у општем случају неортогонални, али комутирајући пројектори $\hat{\Pi}^{(m)}$, дефинисани процедуром огрубљења, имају следеће особине:

(1) $\hat{P}_m \hat{\Pi}^{(m)} = 0, \forall m$, док је комутатор $[\hat{P}_m, \hat{\Pi}^{(m')}] = 0, \forall m, m'$,

(2) Ако је $\hat{P}_m \hat{\Pi}^{(m')} \neq 0$ за неко m и m', онда важи $\hat{P}_{m'} \hat{\Pi}^{(m)} = 0$ за исте индексе m и m',

(3) За неке $m \neq m'$, није забрањено да важи $\delta_m = \delta_{m'}$.

Приближна мапа (10.24) је линеарна, унитална и чува траг. Поред тога, и за њу важи лема 10.1 као и неједнакост (10.9).

За огрубљивање независно од димензија затвореног система, d, односно за параметар огрубљења $g = max\{tr\hat{\Pi}^{(m)}\}$ такав да је испуњено $\lim_{d\to\infty} g = g$, важи следећа лема:

Лема 10.4. *Приближна мапа* (10.24) *је комплетно-позитивна за практично све велике вредности* $t_\circ$, *тј. мапа је комплетно-позитивна у лимесу* $t_\circ \to \infty$.

Доказ. Полазећи од десне стране израза (10.6), следи:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{d} \sum_{i,j,l,l'} c_{il}^* c_{jl'} \langle l | \sum_m \hat{P}_m |i\rangle\langle j| \hat{P}_m + \\ &+ \sum_m e^{-\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \hat{P}_m |i\rangle\langle j| \hat{\Pi}^{(m)} + \sum_m e^{\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \hat{\Pi}^{(m)} |i\rangle\langle j| \hat{P}_m |l'\rangle \,, \end{aligned} \tag{10.25}$$

односно

$$\begin{aligned} &\frac{1}{d} \sum_m \sum_{i,j,l,l'} c_{il}^* c_{jl'} \langle l | \hat{P}_m |i\rangle\langle j| \hat{P}_m |l'\rangle + \\ &+ \frac{1}{d} \sum_m \sum_{i,j,l,l'} c_{il}^* c_{jl'} \langle l | \hat{P}_m |i\rangle\langle j| \hat{\Pi}^{(m)} |l'\rangle e^{-\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} + \\ &+ \frac{1}{d} \sum_m \sum_{i,j,l,l'} c_{il}^* c_{jl'} \langle l | \hat{\Pi}^{(m)} |i\rangle\langle j| \hat{P}_m |l'\rangle e^{\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \,. \end{aligned} \tag{10.26}$$

Због $\langle j|\hat{P}_m|l'\rangle = \langle j|\sum_i |i\rangle\langle i|\hat{P}_m \sum_l |l\rangle\langle l||l'\rangle = \sum_{i,l}\delta_{ji}\delta_{ll'}\langle i|\hat{P}_m|l\rangle$, (10.26) може се записати:

$$\frac{1}{d}\sum_m \Big|\sum_{i,l} c^*_{il}\langle l|\hat{P}_m|i\rangle\Big|^2 +$$
$$+\frac{1}{d}\sum_m e^{-\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \underline{\left(\sum_{i,l} c^*_{il}\langle l|\hat{P}_m|i\rangle\right)\left(\sum_{j,l'} c_{jl'}\langle j|\hat{\Pi}^{(m)}|l'\rangle\right)} +$$
$$+\frac{1}{d}\sum_m e^{\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \underline{\left(\sum_{i,l} c^*_{il}\langle l|\hat{\Pi}^{(m)}|i\rangle\right)\left(\sum_{j,l'} c_{jl'}\langle j|\hat{P}_m|l'\rangle\right)}\,. \tag{10.27}$$

Пошто се базис $|i\rangle$ који се појављује у (10.6) може изабрати да важи $\langle l|\hat{P}_m|i\rangle = 0, \forall l \neq i$ и $\langle j|\hat{\Pi}^{(m)}|l'\rangle = 0, \forall j \neq l'$, подвучени делови у другом и трећем сабирку израза (10.27) добијају следећи облик:

$$\frac{1}{d}\sum_m \left(\sum_{i=1}^{g_m} c^*_{ii}\right)\left(\sum_{\nu_i=1}^{g^{(m)}} c_{\nu_i\nu_i}\right), \tag{10.28}$$

где је $g_m = trP_m$ и $g^{(m)} = tr\Pi^{(m)}$. Како је од интереса највећа могућа вредност суме (10.28), уведимо реалне коефицијенте $c_{ii} = p_i \geq 0$ и $c_{\nu_i\nu_i} = p_{\nu_i} \geq 0$ који потичу од избора специјалног, нормираног, стања $|\phi\rangle = \sum_i p_i|i\rangle|i\rangle$ за критеријум Јамиолковског (10.5). За све друге изборе коефицијената c_{ii} ($c_{\nu_i\nu_i}$) други и трећи члан у изразу (10.27) су по модулу мањи. Сада из (10.28) следи:

$$\sum_{m=1}^{N}\chi_m \equiv \sum_{m=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{g_m} p_i\right)\left(\sum_{\nu_i=1}^{g^{(m)}} p_{\nu_i}\right) \leq g_{\max} g N, \quad g_{\max} = \max\{g_m, m = 1, 2, ..., N\}, \tag{10.29}$$

док први члан израза (10.27) гласи $C \equiv \sum_{m=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{g_m} p_i\right)^2 > 0$. По критеријуму Јамиолковског (10.5), израз (10.27) треба да буде ненегативан:

$$\frac{C}{d}\left(1 + \frac{2gg_{max}N}{C}\sum_{m=1}^{N}\cos(\delta_m t_\circ)\frac{\chi_m}{gg_{max}N}\right) \geq 0, \tag{10.30}$$

односно

$$1 + \frac{2gg_{max}N}{C}\sum_{m=1}^{N}\cos(\delta_m t_\circ)\frac{\chi_m}{gg_{max}N} \geq 0, \tag{10.31}$$

чије је важење потребно доказати, за довољно велике вредности $t_\circ$ и довољно велико N.

Из (10.29) следи да је $\sum_{m=1}^{N}\chi_m/gg_{max}N \leq 1$, па је сума у (10.31) скоро-периодична функција. За довољно дуг временски интервал $[t, t{+}T]$ и велико N (које је пропорционално броју честица у систему) тако да $t_\circ \in [t, t+T]$ типично је следеће понашање:

(1) средња вредност $\lim_{T\to\infty}\langle\sum_m \cos(\delta_m t_\circ)\frac{\chi_m}{gg_{max}N}\rangle_T = 0$.

(2) стандардно одступање $\lim_{T\to\infty}\langle|\sum_m \cos(\delta_m t_\circ)\frac{\chi_m}{gg_{max}N}|^2\rangle_T = 0$.

Са друге стране, по дефиницији за очекивану вредност, $\bar{p}_m = \frac{1}{g_m}\sum_{i=1}^{g_m} p_i$, па је $C = \sum_{m=1}^{N}(g_m\bar{p}_m)^2$ одакле следи $C \geq g_{\min}^2 \sum_{m=1}^{N}\bar{p}_m^2 \geq \sum_{m=1}^{N}\bar{p}_m^2$. Зато важи

$$\frac{2gg_{\max}N}{C} \leq \frac{2g_{\max}g}{\frac{\sum_{m=1}^{N}\bar{p}_m^2}{N}}. \tag{10.32}$$

Како је $\sum_{m=1}^{N}\bar{p}_m^2/N = (\Delta\bar{p})^2 + \langle\bar{p}\rangle^2$ (не опада са порастом N; $\Delta\bar{p}$ и $\langle\bar{p}\rangle$ су стандардно одступање и средња вредност за скуп $\{\bar{p}_m\}$) и $g_{max} < g$, јасно је да израз $2gg_{max}N/C$ има горњу границу, тј. не расте са порастом N.

У изразу (10.31), сума по m је случајна променљива, $f(t_\circ) = \sum_{m=1}^{N} p_m \cos(\delta_m t_\circ)$, за фиксно $t_\circ$. Случајне променљиве у оваквом низу не морају да имају међусобно исте расподеле, али свака случајна променљива мора да има формално дефинисану средњу вредност и стандардно одступање.

Централна гранична теорема [87] каже да се горе поменути скуп случајних променљивих описује, у лимесу $t \to \infty$, Гаусовом расподелом [80]:

$$\mathbf{g}_N(f) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{f^2 N}{2\mu^2}}$$

где μ карактерише расподелу p_m-ова. Може се показати, [80], да у лимесу $N \to \infty$, горња расподела прелази у Диракову делта функцију:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{g}_N(f) = \delta(f).$$

Отуда је вероватноћа

$$\omega(f < -\frac{C}{2gg_{max}N}) = \int_{-\infty}^{-\frac{C}{2gg_{max}N}} \mathbf{g}_N(f)df,$$

па за $N \to \infty$ следи:

$$\omega(f < -\frac{C}{2gg_{max}N}) = 0,$$

јер важи $\int_{-\infty}^{0+}\delta(x)dx = 0$. Дакле, вероватноћа да сума $\sum_{m=1}^{N} p_m \cos(\delta_m t_\circ)$ узме вредност мању од $-\frac{C}{2gg_{max}N}$ тежи нули за $N \gg 1$, тј. са порастом броја честица у окружењу. Овиме је показано важење неједнакости (10.31), што значи да је приближна мапа комплетно позитивна. ■

Из (10.30) следи

$$\frac{C}{d} + 2g\sum_{m=1}^{N}\cos(\delta_m t_\circ)\frac{\chi_m}{gd} \geq 0,$$

па лема 10.4 показује динамичко појављивање комплетне позитивности за приближну мапу, за велике вредности $t_\circ$ и N. Као што се види из последње неједнакости, што је већа вредност за g, већа је и вредност $t_\circ$ за коју је неједнакост испуњена, а за велике вредности параметра огрубљења може се десити нарушење једнакости, тј. могу постојати временски тренуци $t > t_\circ$ за које горња неједнакост не важи. Овиме је наметнуто ограничење на огрубљивање динамике које у исто време води и комплетно-позитивној мапи.

Лема 10.5. *Приближна мапа* $\mathcal{E}^{(app)}$, (10.24), *је декомпозабилна:*

$$\mathcal{E}^{(app)}_{(t_\circ,0)}[\hat{\sigma}(0)] = \mathcal{E}^{(app)}_{(t_\circ,t')}\left[\mathcal{E}^{(app)}_{(t',0)}[\hat{\sigma}(0)]\right], \quad t_\circ \geq t' > 0. \tag{10.33}$$

Доказ.
Из једначине за приближно стање, (10.24), следи

$$\hat{\sigma}(t_\circ) \approx \sum_m \hat{P}_m \hat{\sigma}(t') \hat{P}_m + \sum_m e^{-\frac{\imath(t_\circ - t')\delta_m}{\hbar}} \hat{P}_m \hat{\sigma}(t') \hat{\Pi}^{(m)} + \sum_m e^{\frac{\imath(t_\circ - t')\delta_m}{\hbar}} \hat{\Pi}^{(m)} \hat{\sigma}(t') \hat{P}_m, \tag{10.34}$$

и

$$\hat{\sigma}(t') \approx \sum_m \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m + \sum_m e^{-\frac{\imath t' \delta_m}{\hbar}} \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{\Pi}^{(m)} + \sum_m e^{\frac{\imath t' \delta_m}{\hbar}} \hat{\Pi}^{(m)} \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m. \tag{10.35}$$

Заменом (10.35) у (10.34), а због особине $\hat{P}_m \hat{\Pi}^{(m)} = 0$, следи:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(t_\circ) \approx & \sum_m \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m + \sum_m e^{-\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{\Pi}^{(m)} + \\ & + \sum_{m,n} e^{-\frac{\imath(t_\circ - t')\delta_m}{\hbar}} e^{\frac{\imath t' \delta_n}{\hbar}} \hat{P}_m \hat{\Pi}^{(n)} \hat{\sigma}(0) \hat{P}_n \hat{\Pi}^{(m)} + \\ & + \sum_m e^{\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \hat{\Pi}^{(m)} \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m + \\ & + \sum_{m,n} e^{\frac{\imath(t_\circ - t')\delta_m}{\hbar}} e^{-\frac{\imath t' \delta_n}{\hbar}} \hat{P}_n \hat{\Pi}^{(m)} \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m \hat{\Pi}^{(n)}, \end{aligned} \tag{10.36}$$

што се своди на стање:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(t_\circ) \approx & \sum_m \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m + \sum_m e^{-\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \hat{P}_m \hat{\sigma}(0) \hat{\Pi}^{(m)} + \\ & + \sum_m e^{\frac{\imath t_\circ \delta_m}{\hbar}} \hat{\Pi}^{(m)} \hat{\sigma}(0) \hat{P}_m, \end{aligned} \tag{10.37}$$

због особине (2) пројектора, а што је лева страна једначине (10.33). Тиме је завршен доказ леме. ■

Дакле, последња лема говори о динамичком успостављању Марковљевости са ограничењем да мапа није Марковљева за произвољно кратак интервал локалног времена, тј. од интереса је огрубљење временског интервала $(0, t_\circ]$.

10.2 Динамика отвореног система

Од интереса је дводелна структура сложеног система: $\mathcal{S} + \mathcal{E}$, тако да $\mathcal{S}$ игра улогу отвореног система а $\mathcal{E}$ окружења.

Унитарни оператор еволуције је $\hat{U}(t) \approx e^{-\frac{\imath t\hat{H}_{int}}{\hbar}}$ и посматрамо декохеренцијски модел где је интеракциони члан укупног хамилтонијана:

$$\hat{H}_{int} = \sum_{\alpha,\beta} E_{\alpha\beta} \hat{P}_\alpha \otimes \hat{\Pi}_\beta, \tag{10.38}$$

доминантан, тј. у питању је јака интеракција. Ортогонални пројектори $\hat{P}_\alpha$ тичу се $\mathcal{S}$ подсистема, пројектори $\hat{\Pi}_\beta$ тичу се $\mathcal{E}$ система, док су својствене вредности $\hat{H}_{int}$, $E_{\alpha\beta}$, реални бројеви. У складу са схемом локалног времена почетно стање система $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ је тензорски производ стања подсистема.

Из (10.4) са придруживањима: $m \to \alpha\beta$, $n \to \gamma\delta$, $\hat{P}_m \to \hat{P}_\alpha\hat{\Pi}_\beta$ и $\hat{P}_n \to \hat{P}_\gamma\hat{\Pi}_\delta$, следи:

$$\hat{\sigma}(t_\circ) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} e^{-\frac{\imath t_\circ}{\hbar}(E_{\alpha\beta}-E_{\gamma\delta})} e^{-\frac{(E_{\alpha\beta}-E_{\gamma\delta})^2}{4\hbar^2\lambda}} \hat{P}_\alpha\hat{\Pi}_\beta\hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0)\hat{P}_\gamma\hat{\Pi}_\delta, \tag{10.39}$$

па се након узимања парцијалног трага по степенима слободе окружења добија:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_S(t_\circ) = tr_E\hat{\sigma}(t_\circ) &= \sum_{\alpha,\gamma} \hat{P}_\alpha\hat{\rho}_S(0)\hat{P}_\gamma \times \\ &\times \sum_\beta e^{-\imath t_\circ \frac{E_{\alpha\beta}-E_{\gamma\beta}}{\hbar}} e^{-\frac{(E_{\alpha\beta}-E_{\gamma\beta})^2}{4\lambda\hbar^2}} (tr_E\hat{\Pi}_\beta\hat{\rho}_E(0)) \\ &\equiv \sum_{\alpha,\gamma} B_{\alpha\gamma}(t_\circ)\hat{P}_\alpha\hat{\rho}_S(0)\hat{P}_\gamma, \end{aligned} \tag{10.40}$$

при чему је почетно стање $\hat{\sigma}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0)$.

Из (10.39) следи да је подсистемска мапа линеарна, позитивна, чува траг и унитална. Будући да је матрица $(B_{\alpha\gamma}(t_\circ))$ позитивно семидефинитна, мапа је и комплетно-позитивна за свако $t_\circ > 0$.

За два сукцесивна интервала $(0, t'], [t', t_\circ]$ онда следи:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_S(t_\circ) = tr_E\hat{\sigma}(t_\circ) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \hat{P}_\alpha \left[tr_E\hat{\Pi}_\beta\hat{\sigma}(t')\hat{\Pi}_\delta\right] \hat{P}_\gamma e^{-\imath(t_\circ-t')\frac{E_{\alpha\beta}-E_{\gamma\delta}}{\hbar}} e^{-\frac{(E_{\alpha\beta}-E_{\gamma\delta})^2}{4\lambda\hbar^2}} = \\ = \sum_{\alpha,\gamma} \hat{P}_\alpha\hat{\rho}_S(0)\hat{P}_\gamma \sum_\beta e^{-\imath t_\circ\frac{E_{\alpha\beta}-E_{\gamma\beta}}{\hbar}} e^{-2\frac{(E_{\alpha\beta}-E_{\gamma\beta})^2}{4\lambda\hbar^2}} (tr_E\hat{\Pi}_\beta\hat{\rho}_E(0)) \\ \equiv \sum_{\alpha,\gamma} B'_{\alpha\gamma}(t_\circ)\hat{P}_\alpha\hat{\rho}_S(0)\hat{P}_\gamma. \end{aligned} \tag{10.41}$$

Како показује последња једнакост, подсистемска мапа није декомпозабилна, јер уместо на два, дељење $(0, t_\circ]$ на k подинтервала води изразу:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\gamma} \hat{P}_\alpha \hat{\rho}_S(0) \hat{P}_\gamma \times \\
&\sum_\beta e^{-\imath t_\circ \frac{E_{\alpha\beta} - E_{\gamma\beta}}{\hbar}} e^{-\frac{k(E_{\alpha\beta} - E_{\gamma\beta})^2}{4\lambda\hbar^2}} (tr_E \hat{\Pi}_\beta \hat{\rho}_E(0)) \\
&\to \sum_\alpha \hat{P}_\alpha \hat{\rho}_S(0) \hat{P}_\alpha
\end{aligned} \tag{10.42}$$

за $k \to \infty$. Али, динамички, мапа постиже декомпозабилност што показује следећа лема:

Лема 10.6. *Мапа* (10.40) *има јединствено стационарно стање и постиже декомпозабилност у формалном лимесу $t_\circ \to \infty$, тј. дељива је за велике вредности $t_\circ$:*

$$\lim_{t_\circ \to \infty} \hat{\rho}_S(t_\circ) = \sum_\alpha \hat{P}_\alpha \hat{\rho}_S(0) \hat{P}_\alpha. \tag{10.43}$$

Доказ. Из једначине (10.40)

$$\hat{\rho}_S(t_\circ) = \sum_{\alpha,\gamma} B_{\alpha\gamma}(t_\circ) \hat{P}_\alpha \hat{\rho}_S(0) \hat{P}_\gamma, \tag{10.44}$$

где је

$$B_{\alpha\gamma}(t_\circ) = \zeta_{\alpha\gamma} \sum_\beta p_\beta^{(\alpha\gamma)} e^{-\imath t_\circ \frac{E_{\alpha\beta} - E_{\gamma\beta}}{\hbar}}, \tag{10.45}$$

при чему су коефицијенти $p_\beta^{(\alpha\gamma)} = (tr_E \hat{\Pi}_\beta \hat{\rho}_E(0)) e^{-\frac{(E_{\alpha\beta} - E_{\gamma\beta})^2}{4\lambda\hbar^2}} / \zeta_{\alpha\gamma} > 0$ реални, $\sum_\beta p_\beta^{(\alpha\gamma)} = 1$, и $\zeta_{\alpha\gamma} \equiv \sum_\beta e^{-\frac{(E_{\alpha\beta} - E_{\gamma\beta})^2}{4\lambda\hbar^2}} \, (tr_E \hat{\Pi}_\beta \hat{\rho}_E(0)) < 1$. Сума по β је скоро-периодична функција, о чему је већ било речи, на неколико места, током досадашњег излагања. По аналогији са доказом леме 10.4, за довољно дуге временске интервале $[t, t+T]$, такве да је $t_\circ \in [t, t+T]$, за $\alpha \neq \gamma$ и велики број сабирака (чему одговара многочестично окружење $\mathcal{E}$) за једначину (10.45) важи: (**а**) средња вредност на интервалу $\lim_{T\to\infty} \langle B \rangle_T = 0$ и (**б**) стандардно одступање $\lim_{T\to\infty} \langle |B|^2 \rangle_T = 0$ за типичне моделе многочестичних окружења [86]. Како је $\zeta < 1$, следи да важи (10.43) јер се $B_{\alpha\gamma}(t_\circ)$ понаша као делта функција за велике вредности $t_\circ$, што, практично одговара времену декохеренције, τ_{dec}.

Из (10.43) следи да је мапа декомпозабилна, што је лако показати: нека су $(0, t'], [t', t_\circ]$ сукцесивни интервали. Онда је лимес последњег реда у (10.41) управо десна страна израза (10.43). Није наодмет истаћи да се (10.43) у стандардној квантној механици постулира, док је то овде својство динамике отвореног подсистема у схеми локалног времена. ■

Дакле, декомпозабилност (па онда и Марковљевост подсистемске мапе), на основи последње леме, не тиче се произвољних временских тренутака, већ оних тренутака који формално задовољавају да $t_\circ \in [t, t+T]$, при чему је $t \gg 0$.

10.3 Динамика отвореног система: приближна мапа

По аналогији са (10.24), из једначине (10.40), уз придруживање $\hat{P}_m \to \hat{P}_\alpha \hat{\Pi}_\beta$, следи подсистемска приближна мапа:

$$\hat{\rho}_S(t_\circ) \approx \sum_\alpha \hat{P}_\alpha \hat{\rho}_S(0) \hat{P}_\alpha + \sum_\alpha \left(\sum_\beta e^{-\frac{\imath t_\circ \delta_{\alpha\beta}}{\hbar}} tr_E \hat{\Pi}_\beta \hat{\rho}_E(0) \right) \hat{P}_\alpha \hat{\rho}_S(0) \hat{\Pi}^{(\alpha)} +$$

$$+ \sum_\alpha \left(\sum_\beta e^{\frac{\imath t_\circ \delta_{\alpha\beta}}{\hbar}} tr_E \hat{\Pi}_\beta \hat{\rho}_E(0) \right) \hat{\Pi}^{(\alpha)} \hat{\rho}_S(0) \hat{P}_\alpha \,, \tag{10.46}$$

где је $\hat{\Pi}^{(\alpha)} = \sum_{\nu_\alpha} \hat{P}_{\nu_\alpha}$, $\delta_{\alpha\beta} \approx E_{\alpha\beta} - E_{\nu_\alpha \beta}$ и по аналогији са (10.22) важи:

$$e^{-\frac{(E_{\alpha\beta} - E_{\gamma\beta})^2}{4\lambda\hbar^2}} \ll 1, \tag{10.47}$$

што подразумева многочестичност окружења отвореног подсистема.

Мапа (10.46) је линеарна, позитивна, унитална и чува траг, задовољава (10.9) и при свему овоме алгебра (огрубљених) пројектора је иста као у случају приближне мапе за затворени многочестични систем (видети страну 120).

Будући да је $\sum_\beta e^{-\frac{\imath t_\circ \delta_{\alpha\beta}}{\hbar}} tr_E \hat{\Pi}_\beta \hat{\rho}_E(0)$ скоро-периодична функција, онда за велике вредности $t_\circ$ мапа (10.46) даје (приближно) стационарна стања из леме 10.6. Неједнакост (10.47), са своје стране, казује да је (за неки избор α и γ) реч о огрубљеној опсервабли подсистема чији су пројектори управо они из интеракционог хамилтонијана (10.38) – таква опсервабла у теорији декохеренције назива се опсерваблом бројача. Другим речима, на подсистему може се уочити приближна мапа, која је за довољно дуго време даје стационарно стање одређено пројекторима $\hat{P}_\alpha$, што уз услов (3.67) одређује опсерваблу бројача, па тиме и базис бројача.

Имајући у виду да је алгебра $\hat{P}_\alpha$ и $\hat{\Pi}^{(\alpha)}$ пројектора формално иста као и код пројектора $\hat{P}_m$ и $\hat{\Pi}^{(m)}$ по аналогији са лемом 10.5, јасно је да је мапа (10.46) декомпозабилна за свако $t_\circ$.

Са друге стране, по аналогији са лемом 10.4 следи:

$$\frac{1}{d} \sum_\alpha \left(\sum_{i=1}^{g_\alpha} p_i \right)^2 + \frac{1}{d} \sum_\alpha \left(2 \sum_\beta \left(tr_E \hat{\Pi}_\beta \hat{\rho}_E(0) \right) \cos(\delta_{\alpha\beta} t_\circ) \right) \left(\sum_{i=1}^{g_\alpha} p_i \right) \left(\sum_{\nu_i=1}^{g^{(\alpha)}} p_{\nu_i} \right), \tag{10.48}$$

где се d, g_α и $g^{(\alpha)}$ односе на отворени систем $\mathcal{S}$, па зато имају мање вредности од одговарајућих коефицијената d и g једначине (10.31).

Сума по β у изразу (10.48), обележимо је са $\epsilon_\alpha(t_\circ)$, је скоро-периодична функција, па из последње једначине следи процена:

$$\frac{1}{d}\sum_{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{g_\alpha} p_i\right)^2 + 2\epsilon(t_\circ)g'\sum_{\alpha}\frac{\chi_\alpha}{g'd} \geq 0, \tag{10.49}$$

за довољно велико $t_\circ$, при чему је $\epsilon(t_\circ) = \max\{\epsilon_\alpha(t_\circ)\}$ и $\sum_\alpha \chi_\alpha/g'd \leq 1$.

Величина g' која се појављује у једначини (10.49) може грубо бити процењена да је $\min\{tr\hat{\Pi}_\beta\}$ пута мање него величина g које се појављује у (10.31). То онда значи да подсистемска приближна мапа брже постиже комплетну позитивност него приближна мапа затвореног система. Параметар g' одређује доњу границу за огрубљење временске осе: испод те границе приближна мапа не може динамички постати Марковљева.

10.4 Домени (не)марковљевости за сложене, затворене системе са приближном мапом: нумеричка анализа

Како су за отворени систем и егзактна и приближна мапа Марковљеве, овде ће од интереса бити затворен многочестични систем у вези са испитивањем марковљевости одговарајуће мапе.

Имајући у виду процену минималног времена, Глава 9,

$$\tau_{min} = \max\{\pi\hbar/2\Delta\hat{H}, \pi\hbar/2(\langle\hat{H}\rangle_{t=0} - E_g)\},$$

и да је $\tau_{min} > \sqrt{\lambda}$, следи ($\hbar = 1$):

$$\sqrt{\lambda} > min\Big[\frac{2\Delta\hat{H}}{\pi}, \frac{2(\langle\hat{H}\rangle - E_g)}{\pi}\Big] = \frac{2}{\pi}min\big[\Delta\hat{H}, \langle\hat{H}\rangle - E_g\big] \tag{10.50}$$

Онда, за избор $e^{-4} \approx 0.018 \ll 1$ (због услова $e^{-\frac{(E_n-E_m)^2}{4\lambda}} \ll 1$, односно $\frac{E_n-E_m}{\sqrt{\lambda}} > 4$) следи да је потребно да буде испуњена неједнакост:

$$\frac{E_m - E_n}{\min\{2\Delta\hat{H}/\pi, 2(\langle\hat{H}\rangle - E_g)/\pi\}} \equiv \frac{\pi\delta_{mn}}{2\min\{\Delta\hat{H}, (\langle\hat{H}\rangle - E_g)\}} > 4, \forall m \neq n \notin \{\nu_m\}, \tag{10.51}$$

односно

$$\frac{\delta_{mn}}{\min\{\Delta\hat{H}, (\langle\hat{H}\rangle - E_g)\}} > \frac{8}{\pi}, \tag{10.52}$$

да би био задовољен услов (10.22).

Означимо са $E = E_{max} - E_g$ и ако ставимо да је $\Delta\hat{H} = E/d$ и $(\langle\hat{H}\rangle - E_g) = E/r$ следи да је:

$$\delta_{mn} \equiv \frac{E}{k(m)} > \frac{8}{\pi}\min\left\{\frac{E}{d}, \frac{E}{r}\right\} = 2.55\min\left\{\frac{E}{d}, \frac{E}{r}\right\}, \quad \forall m \tag{10.53}$$

са реалним коефицијентима $k(m), d, r > 0$.

Из (10.53) види се зависност процедуре огрубљења од почетног стања:

$$k(m) < \max\{d, r\}/2.55, \quad \forall m, \tag{10.54}$$

уз $k(m) > 1$, да би о огрубљењу имало смисла говорити. Што је $k(m)$ веће, спектар хамилтонијана је мање огрубљен, односно $\Delta\hat{H}$ опада и $\langle H\rangle \to E_g$.

Из (10.54) следи

$$\frac{2.55k(m)}{E} < \max\left\{\frac{1}{\Delta\hat{H}}, \frac{1}{\langle\hat{H}\rangle - E_g}\right\}, \tag{10.55}$$

одакле се чита: да би било огрубљења спектра $(k(m) > 1, \forall m)$ мора бити задовољено $\Delta\hat{H} < E/2.55k(m) < E/2.56 \approx 0.39E$ или $\langle\hat{H}\rangle < E_g + E/2.56 \approx E_g + 0.39E$. Ако ова ограничења нису испуњена, не може се говорити о приближној мапи затвореног многочестичног система, те према томе ни о Марковљевој динамици система.

Са друге стране, из (10.50) чита се да за велике вредности $\Delta\hat{H}$ и $(\langle\hat{H}\rangle - E_g)$ следи и велико $\sqrt{\lambda}$, што на основи (9.14) значи да $\Delta t \to 0$. Другим речима, стање (10.4) постаје практично неразличиво од стања (9.103), које представља стандардну унитарну динамику, односно Марковљево је по дефиницији.

Између ових крајњих случајева великих и малих вредности за $\Delta\hat{H}$ и $(\langle\hat{H}\rangle - E_g)$, налазе се стања за које Марковљева динамика (описана било приближном мапом, било приближно унитарном динамиком) не важи.

Коефицијент огрубљења $k(m)$ одређује у исто време и интервал огрубљења $[E_m, E_m + E/k(m)]$ а тиме је одређен и скуп пројектора $\hat{P}_{\nu_m}$ који падају у интервал и одговарајући параметри $g^{(m)} = \sum_{\nu_m} tr\hat{P}_{\nu_m} = tr\hat{\Pi}^{(m)}$.

Са друге стране, како је $E_{\nu_m} - E_{\nu'_m} \approx \delta_m > 0, \forall m, \nu, \nu'$, коефицијент огрубљења мора узимати оне вредности које обезбеђују да услов $e^{-\frac{\delta_m^2}{4\lambda\hbar^2}} \approx 1, \forall m$ буде испуњен, који је потребан да би једначина (10.24) била ваљана.

Грешка мерења својствене вредности E_m мора задовољавати неједнакост $\delta E(m) < \frac{E}{k(m)}$, односно постоји неко $x > 1$ тако да важи $\delta E_m = \frac{E}{xk(m)}$. Са друге стране, грешка мерења не сме бити већа ни од δ_m, па задаје се да је $\delta E_m = \frac{\delta_m}{r} < \delta_m$, где је r параметар из (10.53).

Како је δ_m разлика блиских својствених вредности из интервала $[E_m, E_m + \frac{E}{k(m)}]$, што се практично не разликује од $[E_m, E_m + \delta E_m]$, може се писати $\delta_m = \frac{\frac{E}{k(m)} - (E_m + \frac{E}{xk(m)})}{s}$, при чему $s \gtrsim 1$. Онда је

$$\delta E_m = \frac{\frac{E}{k(m)} - (E_m + \frac{E}{xk(m)})}{rs}, \tag{10.56}$$

односно

$$\delta E_m = \frac{\frac{E}{k(m)} - (E_m + \delta E_m)}{rs}, \tag{10.57}$$

из чега следи да је

$$x = \frac{rs + 1}{1 - \frac{k(m)E_m}{E}}. \tag{10.58}$$

У горњим изразима је, ради краћег писања, испуштена је зависност параметара x, r, s од m.

Из израза за x, је јасно, да би било испуњено $x > 0$ потребно је да важи $k(m) < \frac{E}{E_m}$, док се из (10.57) добија да је

$$\delta E \equiv \delta E_m = \frac{\frac{E}{k(m)} - E_m}{1 + rs}, \tag{10.59}$$

што су изрази од интереса за даљу анализу.

Као илустрацију, размотримо систем од $N \gg 1$ честица спина $\frac{1}{2}$, чији је хамилтонијан $\hat{H} = \hbar\omega_\circ \sum_{i=1}^{N} \hat{S}_{iz}$ са енергијском скалом $C = \hbar\omega_\circ$. Хамилтонијан има дегенерисан енергијски спектар, $\pm(N-p)\hbar\omega_\circ/2$, где p-та својствена вредност има степен дегенерације $\binom{N}{p} = \frac{N!}{p!(N-p)!}$, $p = 0, 1, 2, ..., N$, а $E = N\hbar\omega_\circ$ (p спинова је у стању $|+\rangle_z$ а осталих $N-p$ налази се у стању $|-\rangle_z$). За почетно стање које задовољава $\langle\hat{H}\rangle = 0$, $\langle\hat{H}\rangle - E_g = -E_g = \frac{N\hbar\omega_\circ}{2}$, тј. $r = 2$. Услов Марковљевости $\Delta\hat{H} < 0.39E$ ће бити задовољен већ за $d = 3$, $\Delta\hat{H} = \frac{N\hbar\omega_\circ}{3}$ пошто $3/2.56 \approx 1.172 > k > 1$ задовољава неједнакост (10.53). Онда, може се изабрати $k = 1.17$ и $(2/\pi)\min\{E/2, E/3\} = 0.7E/\pi < \sqrt{\lambda}$ тако да су гаусијански чланови у (10.22) приближно 0.018.

На основи (10.59) следи да је највећа грешка мерења за основни ниво система, $E_g < 0$, тј. $E_m = -E/2$:

$$\delta E = \frac{E}{1+rs}\frac{2+k(m)}{2k(m)} = \frac{1.35E}{1+rs}, \tag{10.60}$$

за $k(m) = 1.17$.

Будући да је $\lambda > \frac{4}{9}\frac{E^2}{\pi^2}$, за избор $r = 1, s = 9$ и $\lambda = \frac{5E^2}{9\pi^2}$ следи да је $e^{\frac{1}{500}\left(-1.35^2\right)9\pi^2} \approx 0.723415$, чиме је услов $e^{-\frac{\delta_m^2}{4\lambda\hbar^2}} \approx 1$ довољно добро задовољен.

Са друге стране, за $\Delta\hat{H} = 0.4E$ добија се $d = 2.5$ и $k < 2.5/2.56 < 1$, одакле следи да огрубљивање спектра није могуће, па зато нема ни Марковљеве динамике.

Али, како је речено, за велике вредности $\Delta\hat{H}$, односно мале вредности d, може се говорити о Марковљевој динамици, односно о приближно чистом стању. Рецимо, за почетна стања $|\psi_\pm\rangle = \frac{|E_{max}\rangle \pm |E_g\rangle}{\sqrt{2}}$, $d = r = 2$ и $k < 2/2.56 < 1$ (што значи да није реч о огрубљеном спектру) и за на пример $\lambda = 1.1\frac{E^2}{\pi^2}$ следи да је

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\pm(t_\circ) \approx \frac{1}{2}[&|E_{\max}\rangle\langle E_{\max}| + |E_g\rangle\langle E_g| \pm 0.11e^{-\frac{\imath E t_\circ}{\hbar}}|E_{max}\rangle\langle E_g| \\ &\pm 0.11e^{\frac{\imath E t_\circ}{\hbar}}|E_g\rangle\langle E_{\max}|].\end{aligned} \tag{10.61}$$

Фиделити горњег стања (10.61) је $\mathcal{F} = +\sqrt{\langle\psi_\pm(t_\circ)|\sigma_\pm(t_\circ)|\psi_\pm(t_\circ)\rangle} \gtrsim 0.745, \forall t_\circ$, што значи да је реч о стању веома блиском чистом стању и са приближно Марковљевом динамиком (ово је пример ситуације где је динамика што се меморијских ефеката тиче добро дефинисана, али без јединственог базиса бројача, тј. без “ класичног садржаја”.)

Посматрајмо сада систем од M неинтерагујућих хармонијских осцилатора, сваки фреквенције $\omega_\circ$, са хамилтонијаном $\hat{H} = \hbar\omega_\circ \sum_{k=1}^{M}(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + 1/2)$ и енергијском скалом $C = \hbar\omega_\circ$, где су $\hat{a}_k^\dagger$ и $\hat{a}_k$ Бозеови (*Bose*) оператори креације и анихилације, редом.

Хамилтонијан може се записати преко оператора бројева попуњености једночестичних нивоа $\hat{H} = \hbar\omega_\circ \sum_{k=1}^{M}(\hat{n}_k + 1/2)$, односно као $\hat{H} = \hat{N} + M/2$ где је $\hat{N}$ оператор броја ексцитација. Онда је енергијски спектар (у јединицама $\hbar\omega_\circ = 1$) $\nu + M/2 > 0$ где су $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$ својствене вредности оператора $\hat{N}$, $\hat{N}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle$. Узимајући да постоји горња граница за квантне бројеве ν_{max} следи да је енергија система коначна, тј. $E = E_{max} - E_g = \nu_{max} + M/2 - M/2 = \nu_{max}$, где је енергија основног стања $E_g = M/2$ и $\langle\hat{H}\rangle - E_g = \langle\hat{N}\rangle$, при чему је $\Delta\hat{H} = \Delta\hat{N}$. Ради поређења са претходним примером, узмимо да је $k = 1.71$ и $\sqrt{\lambda} = 0.7E/\pi$ што даје исту нумеричку процену за гаусијанска стања (10.22). Како је $k(m) < E/E_m = \nu_{max}/E_m$ следи да је $E_m < \nu_{max}/1.71$, па може се узети $E_m = 0.5\nu_{max}/1.71$. Тада из (10.59) следи да је $\delta E = 0.29E/1 + rs$ што даје $e^{-\frac{0.29^2\pi^2}{400\,0.49}} = 0.995774$ за $r = 1, s = 9$, што значи да је реч о Марковљевој динамици.

Дакле, (не)Марковљевост динамике зависи од почетног стања, структуре енергијског спектра и међусобног односа горе уведених параметара k, r, s. Као што смо видели, издвајају се три домена: Марковљева динамика ниских енергија, па онда Марковљева динамика високих енергија а између ових домена налази се домен немарковљеве динамике.

10.5 Дискусија

Динамичка мапа (10.2), у оквиру схеме локалног времена, може се односити на отворени или затворени многочестични систем, а од интереса може бити егзкатна или приближна форма мапе.

Што се тиче затвореног многочестичног система, егзактна мапа је комплетно-позитивна, али нема особину декомпозабилности, па је према томе немарковљева. Са друге стране, опсервер, за кога је енергијски спектар целокупног система густ, не може да разликује вредности из спектра, па за њега спектар "природно" бива огрубљен. У том случају, егзактна мапа постаје приближна, декомпозабилна (па самим тим и Марковљева) и динамички комплетно-позитивна. Другим речима, Марковљева динамика јавља се као последица не-информатичког огрубљења временске осе (тј. нема Марковљевости за произвољно кратке временске интервале). Марковљево понашање може се јавити и као последица великог $\Delta\hat{H}$, односно великог $\langle\hat{H}\rangle - E_g$, што води великом τ_{min}, тј. тиче се приближно унитарне динамике. Дакле, Марковљева динамика у СЛВ није безусловна као у стандардној квантној теорији. Између претходно два наведена домена марковљевости, систем може показивати немарковљево понашање.

За отворени систем у контакту са многочестичним окружењем, са одговарајућом јаком интеракцијом, егзактна мапа је комплетно-позитивна за сваки тренутак времена али динамички постиже декомпозабилност, те онда и Марковљевост. Приближна мапа (опет у случају огрубљивања спектра) показује, на неки начин, комплементарно понашање: она је декомпозабилна за сваки тренутак времена, али динамички постиже комплетну позитивност, што заједно води Марковљевој динамици. У случају отвореног система и егзактна и приближна мапа показују показују динамичко Марковљево понашање, с тим што у случају приближне мапе у позадини динамике је огрубљење спектра.

Дакле, и појмови као што су комплетна позитивност и декомпозабилност показују се као динамички зависни: квантитативни критеријуми (10.22), (10.29) и (10.47) показују у којим доменима параметара система од интереса може се неко понашање очекивати, дајући у исто време простора за експерименталну проверу динамичког понашања (затвореног) отвореног многочестичног система.

Са друге стране, схема локалног времена даје наговештај порекла иреверзибилног понашања многочестичних система, тиме што је време класични, скривени параметар, што је формално исказано кроз непостојање идентичне мапе (10.9). Поред овога, показано је да затворен систем никада не постиже стационарно стање, док се за отворени систем види управо супротно, за довољно дуге временске интервале, с тим да што је мањи отворени систем, брже се постиже стационарно стање. Постојање стационарног стања, као последица саме схеме, је занимљиво само по себи ако се има у виду проблем термализације квантних система, тј. строго доказивање постојања термалног стања (које је врста стационарног стања) квантног многочестичног система.

Ваља истаћи да су резултати претходних одељака, сем наравно Одељка 10.4, моделски независни, нису пертурбативног карактера (има се пре свега у виду лимес слабе интеракције отворених система и, као по правилу, Марковљевост динамике која се услед таквог моделовања јавља) и истичу појаву немарковљевог понашања за произвољно кратак временски интервал.

Динамичка мапа схеме локалног времена показује се као математички конзистентна и од интереса са физичке тачке гледишта. Резултати презентовани у овој глави квантитативно се поклапају, или проширују резултате стандардне теорије, или тичу се нових аспеката карактеристичних за саму схему локалног времена.

Остаје отворено питање какво је место динамичке мапе (10.2) у математици, тј. да ли је део већ познатог математичког апарата или стоји по страни? Одговор на ово питање, занимљив сам по себи, може имати и последице по физичке основе схеме локалног времена, а тиме и на основе квантне теорије и њене интерпретације, што може бити предмет будућих истраживања.

11

Дискусија и отворени задаци

Предмет ове дисертације је динамика и корелације различитих дводелних структура сложеног квантног система. Међутим, квантне структуре нису само математичка погодност, као што је то случај у класичној физици. Напротив, структуре које се разматрају у овом Раду произилазе као последица хипотезе универзалности важења Шредингеровог закона, тј. на квантне структуре може се гледати као последицу динамике сложеног система.

У класичној физици (нека полазна) структура сложеног система претпоставља се као реална и јединствена, док све друге, изведене из полазне структуре, имају статус вештачких и привремених. Са физичког становишта, мотивација за увођење "привремене" структуре је практичне природе: упрошћавање једначина закона одржања, што олакшава рачун и анализу, или интеграљење једначине (једначина) кретања (проблем интеграбилности), на пример. Типично, следећи корак је повратак на полазне степене слободе и наставак даље анализе. Овде треба одмах рећи да је у питању класичан начин мишљења са увреженим предрасудама, које се преносе и у квантни домен.

У корист последње реченог нас уверава пример екситованог атома водоника који спонтано зрачи, иако то не би требало да се дешава по стандардној квантној механици изолованих (затворених) система. Како смо видели, разрешење ове недоумице лежи у препознавању квантног (електромагнетског) вакуума као система који "види" атом као отворени систем. Али ово ништа не говори о томе који степени слободе у атому су од интереса за објашњење зрачења атома. Ако би то био електрон, тј. ако електрон зрачи, онда би због везе $\hat{\vec{r}}_e = f(\hat{\vec{R}}_{CM}, \hat{\vec{\rho}})$ следило да се и степени слободе центра масе и релативне честице мењају. Из перспективе $CM + R$ структуре, пак, ако атом мирује, онда је опсервабла центра масе $\hat{\vec{R}}_{CM} = 0$, па сав допринос (дискретном) спектру зрачења долази од релативних степени слободе (треба имати у виду да се интеракција атома са електромагнетним пољем, па и спонтана емисија моделују преко хамилтонијана који садржи интеракциони члан $\hat{\vec{d}} \cdot \hat{\vec{E}}$ [88], где је $\hat{\vec{d}}$ оператор диполног момента атома а $\hat{\vec{E}}$ тиче се квантованог електромагнетног поља – спонтана емисија не може се објаснити уз помоћ класичног поља, односно класичног вакуума [88]). Атом не мора да мирује – то је узето као погодност јер је спектар који се тиче опсервабле центра масе континуалан па свакако није од интереса што се спектроскопских налаза тиче. Као што видимо, као физички релевантна испоставила се структура која би по класичном мишљењу била одбачена.

Иако формално исти, степени центра слободе у класичној и квантној физици немају исти статус. У класичној физици то је тачка у простору којом се не може манипулисати, док је у квантној физици управо супротно, то јест центар масе је равноправан са релативном честицом или другим "фундаменталним" честицама, односно може му се приступати локално – што није случај у класичној ситуацији. Одговарајући пример за манипулацију центра масе атома је хлађење атома [89]. На крају крајева, класична, статистичко-термодинамичка теоријска дефиниција температуре гаса тиче се расподеле брзина (импулса) центара маса, а не појединачних протона или електрона у атому, као што се не тиче ни релативних честица, што се природно проширује и на квантне статистичке ансамбле.

Став о томе да су и центар масе и релативна честица, оперативно, (не)реални колико и "традиционално реалне" честице као што су електрон и протон став је модерне физике: *Two types of degrees of freedom have to be considered for an atom*: (i) *the internal degrees of freedom, such as the electronic configuration or the spin polarization, in the center of mass reference frame*; (ii) *the external degrees of freedom, i.e. the position and the momentum of the center of mass* [90].

Стандардна квантна механика изолованих (затворених) система нема начина да издвоји неку структуру сложеног система. Оно што стандардна квантна механика гарантује, на основи својих постулата, јесте постојање јединственог хамилтонијана и јединственог сложеног стања, који се кроз формалну употребу ЛКТ могу, у принципу, записати на безброј начина – онолико колико има структура.

Отвореност система и могући процес декохеренције испоставља се као путоказ ка критеријуму који даје преферирану структуру (а може бити и више структура), тј. структуру отвореног система чији се бар неки степени слободе ансамбалски доступни за мерење или манипулацију. То је на трагу класичне физике (прелазак са квантног на класично), где су систем или његови делови увек доступни опсерверу, односно, поседују, како се каже, класичну реалност.

Поред префериране структуре, указано је да за сложене системе важи правило релативности сплетености, Глава 4. По аналогији, варирање структуре кроз линеарне канонске трансформације доводи до појма релативности квантних корелација (*QCR*), са закључком да су квантне корелације свеприсутне у дводелним структурама, што је закључак Главе 6. Појам квантних ("некласичних") корелација је у самом средишту теорије квантне информације и рачунања и неких интерпретација квантне теорије, али и студија квантних структура. *QCR* правило има и своје оперативну вредност, ако се има у виду да су квантне корелације основни ресурс квантне информатике, при чему употребљивост и корисност ресурса зависи од поступка препарације и сачувања корелација, што су исто време и препреке квантно-информатичком процесирању. Из перспективе *QCR* правила, таквих препрека нема – уколико је оперативно једноставно манипулисати степенима слободе (подсистемима) за које се, сходно релативности корелација, зна да морају имати квантних корелација.

Како је деловање пројекционог оператора дефинисано преко тензорског производа стања подсистема, природно се намеће питање како варирање структуре утиче на дефиницију пројекционог оператора, сам тим и на пројекциони метод Накаџиме-Цванцига. Варирање структуре може бити и услед измене броја честица отвореног система. Закључак седме главе је да мастер једначина добијена за полазну структуру није од користи за извођење динамике алтернативне структуре. Закључак је посебно занимљив у светлу паралелног одвијања процеса декохеренције и могуће генерализације истог. Када, и под којим условима, мастер једначина за једне степене слободе пружа довољно информација и за неке друге, алтернативне, степене слободе, је прави задатак за будуће истраживање на којег указују резултати Главе 7.

Релативност квантних корелација поставља оквир и за истраживање префериране дводелне структуре сложеног, отвореног система – поставља оквир у смислу да су на основи *QCR* правила кванте корелације, практично, свеприсутне, па то само по себи намеће изазов изналажењу дводелне структуре, али динамички, будући да је поменуто правило кинематичке природе. У Глави 8, је за случај отвореног система два осцилатора, са дисипативном динамиком (што излази из оквира Журекове теорије декохеренције), добијено да окружење изабира једну структуру као преферирану, класично-реалну: у асимптотском лимесу две моде су некорелисане (на било који начин) и међусобно су различиве, што је карактеристика делова класичног сложеног система. Са друге стране, чак иако је стање алтернативне структуре било тензорски производ на почетку динамике, у асимптотском лимесу ће то бити сплетено стање, на неки начин одсликавајући *QCR* правило. Наравно, Главе 8 не искључују да систем може имати више преферираних структура. Одговарајући критеријум у том смислу је више него добродошао.

Појам локалног времена у Китадиној схеми и додатно разрађен у Глави 9 није директно везан за квантне корелације, али се и не може увести без појма структуре. Локално време (ЛВ) везује се за сваки, макар приближно затворен, квантни систем, који је подсистем квантног Свемира као целине. Затвореност квантног система је практична ствар. Ако је практично неусловљена ("слаба интеракција", али не у смислу лимеса слабог кутловања), тада такав систем има сопствено (локално) време као скривени параметар чија је улога, подсетимо се, регулисана (у оквиру ове схеме) универзалним правилима датим у Глави 9. Тиме расподела локалних времена у Свемиру успоставља структуру Свемира и за све степене слободе једног локалног система одређује заједничко локално време.

Структурне последице су очигледне: два локална система са различитим временима нису један систем у уобичајеном смислу те речи, позајмљене из класичне физике и из стандардне квантне механике. У овом контексту постојање корелација ништа не мења јер се све своди на динамику као основни појам, односно примитиву схеме. То јест, два локална система могу имати и различита локална времена, иако могу бити у корелисаном стању (мисли се на кинематички аспект корелација, видети Главу 2): другачије речено, сваки затворени систем има свој хамилтонијан. Схема локалног времена (СЛВ) уводи фундаменталну иреверзибилност на квантном нивоу, која се иначе или уводи модификацијом Шредингеровог закона или је пак циљ неких квантних интерпретација. Поменута квантна иреверзибилност, која се огледа и у једнозначности базиса бројача за дводелну структуру локалног система, потпуно је непозната стандардној теорији. Које су последице ове врсте иреверзибилности је један од главних задатака у даљој разради појма локалног времена. У овој глави је истакнута и улога неинформатичког огрубљивања енергијског спектра отвореног система. Поступак огрубљивања је са једне стране математички добродошао, јер омогућава "замену" континуалног (ненормализабилног) базиса који није пожељан имајући у виду да СЛВ води порекло од квантне теорије расејања која барата нормализабилним стањима. Са друге стране, апарат (окружење) може имати инхерентна ограничења у разлучивању спектра отвореног система. Како је илустровано, то води мањој кохеренцији стања отвореног подсистема, односно "мешанијем" стању, што са своје стране води стабилнијем базису бројача, па према томе је и динамика која одликује отворени систем "иреверзибилнија" по карактеру.

СЛВ уводи нови динамички закон као минималистичку алтернативу стандардној унитарној динамици. Зато су последице по динамику отвореног система разноврсне, поред тога што на посебан начин репродукује неке познате резултате стандардне теорије отворених система. Један од новизама састоји се у томе да СЛВ уводи бржу релаксацију за мање (отворене) системе – темељан резултат који је циљ савремених истраживања која полазе од стандардне квантне теорије. Реч је о актуелним истраживањима која се ослањају на софистицирани апарат математичке физике, в. на пример [13]. Поред овога, марковљевост, као средишњи појам теорије отворених система, појављује се као само приближна особина динамике система, и у први план испоставља две важне ствари: важност и довољност хамилтонијана целине, као и практични (оперативни) аспект огрубљења спектра хамилтонијана кроз практично ограничена мерења енергије.

Експерименталне провере ових резултата СЛВ су на терену стандардне теорије декохеренције и у принципу не захтевају ништа друго. Међутим, како се СЛВ тиче многочестичних система, овакве провере подразумевају, у овом тренутку непостојеће, експерименталне технике контроле стања и разликовања блиских вредности енергије многочестичних система.

Поред питања експерименталне провере, поставља се и питање корисности СЛВ у вези са интерпретационим проблемима квантне механике, тј. место и однос схеме са постојећим интерпретацијама квантне механике. Може ли СЛВ да допринос разрешењу осталих аспеката проблема квантног мерења? Проблем тумачења квантне механике на појединачном систему је, што се тиче до сада урађеног, остао по страни (у овом Раду је подразумеван ансамбалски приступ) па и у вези са тим остаје отворено питање да ли и шта СЛВ може да допринесе на том плану.

Имајући у виду да је у овој схеми време није фундаментална физичка категорија, већ представља појавну (*emergent*), секундарну, особину материје, поставља се питање утицаја СЛВ на питања везана за квантизацију гравитационог поља. Како је познато, квантизација гравитације почива на простор-времену као фундаменталним појмовима теорије. Са друге стране, теорија квантне гравитације је корак ка обједињавању фундаменталних интеракција у природи, што горњем питању даје додатно на тежини.

Последично, сам појам локалности времена отвара питање релативистичке локалности (коначне брзине светлости у свим референтним системима) и блиско повезаног питања квантне каузалности. Ово су аспекти схеме локалног времена који се појављују као неизбежан задатак од фундаменталног значаја, посебно у оквирима не-ансамбалског приступа, тј., у оквирима приступа који изучава појединачне системе. У овом тренутку тешко је спекулисати о коначним закључцима.

Математички необичне особине динамике (динамичког пресликавања) којег успоставља шема локалног времена су задатак за себе. У Глави 10 је представљена таква врста пресликавања (мапе) по први пут и није познато да ли има пандана у општој математичкој теорији, или стоји сасвим по страни. Овај математички аспект СЛВ сасвим сигурно заслужује додатну пажњу и истраживање.

Математички аспекти студија квантних структура појављују се кроз такозвани Цирелсонов (*Tsirelson*) проблем [91] и кроз теорију категорија [92].

Цирелсонов проблем састоји се у питању да ли тензорска структура простора стања сложеног квантног система има алтернативу и коју; математички алтернатива није искључена а појачана је резултатима који се тичу уопштења појма сплетености који се не заснива на тензорској факторизацији [93]. Јасно, како квантне структуре почивају на појму тензорске факторизације Хилбертовог простора, свака промена у схватању појма и настанка квантних корелација, као последице промене у начину изградње Хилбертовог простора сложеног система, може имати немали утицај и на садржај који носе студије квантних структура.

Теорија категорија је језик модерне структуралне математике, односно језик математичких структура и њихових међусобних релација. Као таква, теорија категорија испоставља се као језик квантне теорије који може да допринесе разумевању посебно њених математичких аспеката, пре свега, што може имати последицу и по физичке основе квантне механике. Имајући у виду саму дефиницију структуре, као скуп степени слободе и њихове међусобне односе, јасно је да овакав прилаз студијама квантних структура може дати неочекиване увиде у проблематику изложену у овом Раду, што су теме које остају за будућа истраживања.

Правац истраживања који се наставља квантним структурама јесте изучавање квантних корелација у вишеделним (не-дводелним) структурама и на основи тога изучавање квантних фазних прелаза и њихових (очекиваних) последица, каква је самоорганизација[1] [94]. Ваља напоменути да овај смер истраживања, разнолик по себи, је заправо још неодређених контура и свакако један од истакнутих праваца истраживања за дуже време.

Свакако, намеће се питање какав је статус досадашњих резултата, закључака и отворених питања, истакнутих горе у вези са дводелним структурама, када је реч о многоделним (вишеделним) структурама сложених система – јасно је да је и ово предмет будућих истраживања у квантној теорији отворених система и њеним применама.

Као закључак може се рећи да је област студија квантних структура нова област у развоју, као подобласт савремене квантне физике од врло широког научног интереса, као и интереса у применама и тумачењима квантне теорије. У средишту ове области су темељна научна питања, као што су питање “шта је систем?”, који степени слободе сложеног система могу се непосредно мерити и опсервирати, постоји ли привилегована структура система, да ли су неки дугостојећи проблеми у темељима физике (као проблем квантних основа феноменолошке термодинамике, проблем квантног мерења, прелазак са квантног на класично) заправо проблеми који проистичу из опсервирања специфичних структура, те се као такви не морају тицати свих структура сложеног система?

У овом раду представљени су неки резултати минималистичког, неинтерпретацијског приступа појму квантних структура. У том смислу овај правац истраживања непосредно се наставља на, сада већ универзално прихваћене, стандардне квантне теорије какви се могу наћи у курсу [19], на пример, или, алтернативно, курсу какви су [12] и [13].

У ширем смислу, ова питања сежу и изван ужих квантномеханичких оквира те се тичу и питања физичке природе времена, а отуда и релативистичког појма простор-времена, задатка квантизације гравитације а отуда и основа космологије.

---

[1] Термин самоорганизација означава процес у коме неки облик уређења произилази из локалних интеракција између претходно “неуређених” делова. Реч је о спонтаном процесу. Примери из физике, који илуструју овај термин су спонтана магнетизација, кристализација, суперпроводност итд.

A

Објављени радови

Листа радова

Додатак садржи списак радова који су ушли у састав дисертације и њихове прве стране.

1. M. Dugić, M. Arsenijević, and J. Jeknić-Dugić, Quantum correlations relativity for continuous variable systems, Science China-Physics, Mechanics and Astronomy **56(4)**, 732-736 (2013)(Глава 6).

2. M. Arsenijević, J. Jeknic-Dugić, D. Todorović, and M. Dugić, *Entanglement relativity in the foundations of the open quantum systems theory*, Chapter 2 in New Research on Quantum Entanglement pp. 99-116, (Nova Science Publishers, 2015)(Глава 7).

3. M. Arsenijević, J. Jeknić-Dugić, and M. Dugić, Asymptotic dynamics of the alternate degrees of freedom for a two-mode system: An analytically solvable model, Chinese Physics **B 2**, 020302 (2013)(Глава 8).

4. J. Jeknić-Dugić, M. Arsenijević, and M. Dugić, A local-time-induced unique pointer basis. Proc. R. Soc. **A 470**, 20140283 (2014)(Глава 9).

5. J. Jeknić-Dugić, M. Arsenijević, and M. Dugić, Dynamical emergence of Markovianity in local time scheme. Proc. R. Soc. **A 472**, 20160041 (2016)(Глава 10).

SCIENCE CHINA
Physics, Mechanics & Astronomy

• Article •

April 2013 Vol. 56 No. 4: 732–736
doi: 10.1007/s11433-012-4912-5

Quantum correlations relativity for continuous variable systems

Dugić M.[1*], Arsenijević M.[1] & Jeknić-Dugić J.[2]

[1] *Department of Physics, Faculty of Science, Kragujevac 34000, Serbia;*
[2] *Department of Physics, Faculty of Science, Niš 18000, Serbia*

Received June 12, 2012; accepted July 16, 2012; published online February 22, 2013

It is shown that a choice of degrees of freedom of a bipartite continuous variable system determines the amount of non-classical correlations (quantified by discord) in the system's state. Non-classical correlations (that include entanglement as a special kind of correlations) are ubiquitous for such systems. For a quantum state, if there are not non-classical correlations (quantum discord is zero) for one, there are in general non-classical correlations (quantum discord is non-zero) for another set of the composite system's degrees of freedom. The physical relevance of this "quantum correlations relativity" is emphasized also in the more general context.

entanglement, non-classical correlations, quantum discord, tensor product structure

PACS number(s): 03.65.Ca, 03.67.-a, 03.65.Ud

Citation: Dugić M, Arsenijević M, Jeknić-Dugić J. Quantum correlations relativity for continuous variable systems. Sci China-Phys Mech Astron, 2013, 56: 732–736, doi: 10.1007/s11433-012-4912-5

1 Introduction

The promise of quantum information processing is the promise of quantum-information resources [1]. To this end, some surprising results and observations are possible and even expectable. The discovery of non-classical (quantum) correlations not necessarily including entanglement, as quantified by quantum discord [2,3], opens a new avenue in quantum information processing; for recent reviews see refs. [4–6]. A search for quantum information resources and the ways of their operational use is at the core of the current theoretical and experimental research [4–8] (and the references therein).

Entanglement relativity is a corollary of the universally valid quantum mechanics that states [9–15]: for a composite (e.g., bipartite) system, there is entanglement for at least one structure (one set of the degrees of freedom) of the composite system. The structures are mutually related by the proper (e.g., the linear canonical) transformations of the composite system's degrees of freedom; paradigmatic are the composite system's center-of-mass and the "relative (internal)" degrees of freedom. In practice, it means: if a quantum state is separable (no entanglement), just change the degrees of freedom and entanglement will appear [10,12,13]. Quantum entanglement is ubiquitous as a quantum information resource.

In this paper we consider the continuous variable (CV), including open, quantum systems with an emphasis on their bipartitions. Based on entanglement relativity, we point out relativity, i.e., structure (degrees of freedom) dependence, of the more general non-classical correlations quantified by quantum discord. Likewise entanglement, the more general non-classical (quantum) correlations are also structure-dependent and ubiquitous in quantum systems.

So we conclude: There are non-classical correlations (not necessarily including entanglement) for practically every quantum state of the systems relative to some structures.

In sect. 2, we briefly outline entanglement relativity. In sect. 3 we derive our main result. Sect. 4 is discussion placing our considerations in a more general context and we conclude in sect. 5.

---

*Corresponding author (email: dugic@open.telekom.rs)

In: New Research on Quantum Entanglement ISBN: 978-1-63482-888-8
Editor: Lori Watson, pp. 99-116

Chapter 2

ENTANGLEMENT RELATIVITY IN THE FOUNDATIONS OF THE OPEN QUANTUM SYSTEMS THEORY

***M. Arsenijević*[1,*], *J. Jeknić-Dugić*[2], *D. Todorović*[1] *and M. Dugić*[1]**
[1]Department of Physics, Faculty of Science,
Kragujevac, Serbia
[2]Department of Physics, Faculty of Science and Mathematics,
Niš, Serbia

Abstract

Realistic many-particle systems dynamically exchange particles with their environments. In classical physics, small variations in the number of constituent particles are commonly considered practically irrelevant. However, in the quantum mechanical context, such and similar structural variations are generically taxed due to the so-called Entanglement Relativity. In this paper we point out difficulties in deriving master equation for a subsystem of an alternative partition of the closed quantum system. We find that the Nakajima-Zwanzig projection method cannot be straightforwardly used to solve the problem. The emerging tasks and prospects for the consistent foundations are examined.

PACS: 03.65.Ud, 03.65.Yz, 03.65.Ta

---

[*] E-mail address: fajnman@gmail.com

Chin. Phys. B Vol. 22, No. 2 (2013) 020302

Asymptotic dynamics of the alternate degrees of freedom for a two-mode system: An analytically solvable model*

M. Arsenijević[a)†], J. Jeknić-Dugić[b)], and M. Dugić[a)]

[a)] *Department of Physics, Faculty of Science, Kragujevac, Serbia*
[b)] *Department of Physics, Faculty of Science and Mathematics, Niš, Serbia*

(Received 24 July 2012; revised manuscript received 30 August 2012)

The composite systems can be non-uniquely decomposed into parts (subsystems). Not all decompositions (structures) of a composite system are equally physically relevant. In this paper we answer on theoretical ground why it may be so. We consider a pair of mutually un-coupled modes in the phase space representation that are subjected to the independent quantum amplitude damping channels. By investigating asymptotic dynamics of the degrees of freedom, we find that the environment is responsible for the structures non-equivalence. Only one structure is distinguished by both locality of the environmental influence on its subsystems and a classical-like description.

Keywords: amplitude dissipative channel, two-mode state, Kraus representation, alternate degrees of freedom

PACS: 03.65.–w, 03.65.Yz, 42.25.–p **DOI:** 10.1088/1674-1056/22/2/020302

1. Introduction

Realistic physical systems are composite, i.e. decomposable into smaller "parts" (subsystems). The set of the "subsystems" (i.e. of the degrees of freedom) of a composite system is not unique.

In classical physics, only one such set of subsystems (e.g. of the constituent particles) is usually considered physically relevant. The alternate decompositions (structures) of the composite system are typically considered non-realistic, a mathematical artifact. However, in the quantum mechanical context, the things may look different.

There is ongoing progress in distinguishing physical relevance of the alternate structures of a composite quantum system both on the foundational as well as on the level of application, cf. e.g. Refs. [1]–[12]. Regarding the foundational issues, the following question is of interest: which degrees of freedom of a composite system are accessible or can provide the above-mentioned classical description?[2,3,5,8,9,11,12] A closely related interpretational question reads: is there physically a fundamental set of the degrees of freedom of a composite system?[2,3,5,10] In the context of physical application, one can differently manipulate the different structures of a composite system, e.g., with the use of "entanglement swapping" for teleportation[1] or by targeting observables of a specific structure in order to avoid decoherence.[7] Quantum entanglement relativity[2–6] and relativity of the more general quantum correlations[9] open new possibilities in manipulating the quantum information hardware.[3,5,11] As a matter of fact, we just start to learn about the physical subtlety and possible usefulness of the concept of "quantum subsystem".

In this paper, we do not tackle the related deep questions. Rather, as a contribution to this new discourse in quantum theory, we stick to a concrete model that can be solved analytically and we provide some interesting observations.

We consider a pair of un-coupled modes in "phase space" representation (as a pair of non-interacting linear harmonic oscillators) independently subjected to the quantum amplitude damping channels.[13–16] We analytically (exactly) solve the Heisenberg equations of motion in the Kraus representation[13–19] and analyze the results obtained for the original as well as for some alternate degrees of freedom. We find that the environment non-equally "sees" the different structures. Particularly, only one structure is distinguished by the locality of the environmental influence on the structure's subsystems that provides a classical-like description of the subsystems.

This paper is arranged as follows. In Section 2 we rederive the solutions to the Heisenberg equations for a pair of modes. Our derivation is specific as it is an exact calculation in the infinite-sum Kraus representation of the amplitude damping dynamics of the two-mode system. In Section 3 we introduce and analyze the alternate degrees of freedom (the alternate structures) for the pair of modes and we obtain the Heisenberg equations of motion for the new degrees of freedom. In Section 4 we emphasize the special characteristics of the original degrees of freedom that do not apply to the alternate degrees of freedom. Section 5 is conclusion.

2. The model

We consider the two uncoupled modes in the respective "phase space" representations,[16] i.e. as a pair of noninteracting linear oscillators, 1 and 2, with the respective frequen-

---

*Project financially supported by the Ministry of Science Serbia (Grant No. 171028).

†Corresponding author. E-mail: momirarsenijevic@gmail.com

PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY A

rspa.royalsocietypublishing.org

A local-time-induced unique pointer basis

J. Jeknić-Dugić[1], M. Arsenijević[2] and M. Dugić[2]

[1]Department of Physics, Faculty of Sciences and Mathematics, 18000 Niš, Serbia
[2]Department of Physics, Faculty of Science, 34000 Kragujevac, Serbia

JJ-D, 0000-0002-4905-6457; MA, 0000-0003-4622-642X; MD, 0000-0002-4493-6009

Research

Cite this article: Jeknić-Dugić J, Arsenijević M, Dugić M. 2014 A local-time-induced unique pointer basis. *Proc. R. Soc. A* **470**: 20140283. http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2014.0283

Received: 16 May 2014
Accepted: 20 August 2014

Subject Areas:
quantum physics

Keywords:
many-body scattering, local time, quantum decoherence, quantum correlations

Author for correspondence:
J. Jeknić-Dugić
e-mail: jjeknic@pmf.ni.ac.rs

There is a solution to the problem of asymptotic completeness in many-body scattering theory that offers a specific view of the quantum unitary dynamics which allows for the straightforward introduction of local time for every, at least approximately closed, many-particle system. In this approach, time appears as a hidden classical parameter of the unitary dynamics of a many-particle system. We show that a closed many-particle system can exhibit behaviour that is characteristic for open quantum systems and there is no need for the 'state collapse' or environmental influence. On the other hand, closed few-particle systems bear high quantum coherence. This local-time scheme encompasses concepts including 'emergent time', 'relational time' as well as the 'hybrid system' models with possibly induced gravitational uncertainty of time.

1. Introduction

A solution to the problem of asymptotic completeness in the many-body scattering theory offers a specific view of the quantum unitary dynamics. The important work of Enss [1,2] opened the door for new methods in solving the problem. On this basis, the later elaboration due to Kitada [3,4] allowed Kitada [5–7] to introduce the notion of local time, that is a dynamics generated by the Hamiltonian of the local system that can serve as a (local) 'clock'.

The notion of local time or 'multi-time' is not a new idea. Mainly motivated by relativity, a separate time coordinate for every particle in a composite system has been introduced (e.g. [8,9] and references therein). It is also shown that the 'timeless' Wheeler–DeWitt equation:

$$H(x)|\Psi\rangle = 0, \tag{1.1}$$

PROCEEDINGS A

rspa.royalsocietypublishing.org

Research

Cite this article: Jeknić-Dugić J, Arsenijević M, Dugić M. 2016 Dynamical emergence of Markovianity in local time scheme. *Proc. R. Soc. A* **472**: 20160041.
http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2016.0041

Received: 15 January 2016
Accepted: 11 May 2016

Subject Areas:
quantum physics, mathematical physics

Keywords:
Markovian processes, quantum dynamical maps, local time

Author for correspondence:
J. Jeknić-Dugić
e-mail: jjeknic@pmf.ni.ac.rs

Dynamical emergence of Markovianity in local time scheme

J. Jeknić-Dugić[1], M. Arsenijević[2] and M. Dugić[2]

[1]Department of Physics, Faculty of Sciences and Mathematics, 18000 Niš, Serbia
[2]Department of Physics, Faculty of Science, 34000 Kragujevac, Serbia

JJ-D, 0000-0002-4905-6457; MA, 0000-0003-4622-642X; MD, 0000-0002-4493-6009

Recently we pointed out the so-called local time scheme as a novel approach to quantum foundations that solves the preferred pointer-basis problem. In this paper, we introduce and analyse in depth a rather non-standard dynamical map that is imposed by the scheme. On the one hand, the map does not allow for introducing a properly defined generator of the evolution nor does it represent a quantum channel. On the other hand, the map is linear, positive, trace preserving and unital as well as completely positive, but is not divisible and therefore non-Markovian. Nevertheless, we provide quantitative criteria for dynamical emergence of time-coarse-grained Markovianity, for exact dynamics of an open system, as well as for operationally defined approximation of a closed or open many-particle system. A closed system never reaches a steady state, whereas an open system may reach a unique steady state given by the Lüders–von Neumann formula; where the smaller the open system, the faster a steady state is attained. These generic findings extend the standard open quantum systems theory and substantially tackle certain cosmological issues.

1. Introduction

Recently we pointed out the so-called local time scheme (LTS) [1] as a novel non-interpretational, minimalist approach to quantum foundations. In LTS, dynamics is a primitive that asymptotically defines local time for a single closed ('local') quantum system [1,2].

THE ROYAL SOCIETY
PUBLISHING

Литература

[1] J. Jeknić-Dugić, M. Arsenijević, and M. Dugić, *Quantum Structures: A View of the Quantum World*, (LAP Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2013).

[2] H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, 3rd ed., 2001).

[3] J. Jeknić-Dugić, M. Dugić, A. Francom, and M. Arsenijević, Open Access Library Journal **1**, e501 (2014).

[4] P. Tomasini, E. Timmermans, and A.F.R.D. Piza, *Am. J. Phys.* **66**, 881 (1998).

[5] W. H. Oskay, D. A. Steck, and M. G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 283001 (2002).

[6] G. Fraser, Ed., *The New Physics for the twenty-first century* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).

[7] L. Hackermuller, S. Uttenthaler, K. Hornberger, E. Reiger, B. Brezger, A. Zeilinger, and M. Arndt, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 90408 (2003).

[8] L. Hackermuller, K. Hornberger, B. Brezger, A. Zeilinger, and M. Arndt, *Nature* **427**, 711 (2004).

[9] A. Lendlein, H. Jiang, O. Junger, and R. Langer, *Nature* **14**, 879 (2005).

[10] H. Maeda, D. V. L. Norum, and T. F. Gallagher, *Science* **307**, 1757 (2005).

[11] М. Дугић, *Декохеренција у класичном лимиту квантне механике*, (СФИН, XVII (2), Институт за физику, Београд, 2004).

[12] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Clarendon Press, Oxford, 2002).

[13] Á. Rivas and S. F. Huelga, *Open Quantum Systems - An Introduction*, (Springer Briefs in Physics, 2012).

[14] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).

[15] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).

[16] H. Takesue, S. D. Dyer, M. J. Stevens, V. Verma, R. P. Mirin, and Sae Woo Nam, *Optica* **2**, 832 (2015).

[17] M. Dugić and J. Jeknić, *Int. J. Theor. Phys.* **45**, 2249 (2006).

[18] M. Dugić and J. Jeknić-Dugić, *Int. J. Theor. Phys.* **47**, 805 (2008).

[19] F. Herbut, *Kvantna mehanika za istraživače*, (PMF, Beograd, 1984).

[20] G. Adesso, Ph.D. thesis, Dipartimento di Fisica "E. R. Caianiell", Facolt di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali, 2007, https://arxiv.org/abs/quant-ph/0702069.

[21] C. A. Fuchs, in *Quantum Foundations in the Light of Quantum Information, in Decoherence and its Implications in Quantum Computation and Information Transfer*: Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, Mykonos Greece, June 25 30, 2000, edited by A. Gonis and P. E. A. Turchi (IOS Press, Amsterdam, 2001), pp. 38-82, quant-ph/0106166.

[22] D. Kaszlikowski, A.S. De, U. Sen, V. Vedral, and A. Winter, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 070502 (2008).

[23] H. Ollivier and W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2001).

[24] L. Henderson and V. Vedral, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 6899 (2001).

[25] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, and V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1655-1707 (2012).

[26] A. Datta, Ph.D. thesis, The University of New Mexico, 2008, http://arxiv.org/abs/0807.4490.

[27] R. Jancel, *Foundations of Classical and Quantum Statistical Mechanics*, (Pergamon Press, 1963)

[28] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, (World Scientific, Singapore, 2008).

[29] D. Salgado, J. L. Sánchez-Gómez, and M. Ferrero, *Phys. Rev. A* **70**, 054102 (2004).

[30] D. M. Tong, L. C. Kwek, C. H. Oh, J.-L. Chen, and L. Ma, *Phys. Rev. A* **69**, 054102 (2004).

[31] A. Brodutch, A. Datta, K. Modi, Á. Rivas, and C. A. Rodriguez-Rosario, *Phys. Rev. A* **87**, 042301 (2013).

[32] K. Kraus, *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, (Springer Verlag, 1983).

[33] Q. G. Chen, D. A. Church, B.-G. Englert, C. Henkel, B. Rohwedder, M. O. Scully, and M. S. Zubairy, *Quantum Computing Devices: Principles, Designs and Analysis*, (Chapman and Hall, 2006).

[34] Ángel Rivas et al, *Rep. Prog. Phys.* **77**, 094001 (2014).

[35] S. Nakajima, *Progr. Theor. Phys.* **20**, 984 (1958).

[36] R. Zwanzig, *J. Chem. Phys.* **33**, 1338 (1960).

[37] E. Joos, H. D. Zeh, C. Kiefer, D. J. W. Giulini, J. Kupsch, and I. -O. Stamatescu, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, (Springer, Berlin, 2003).

[38] M. Dugić, *Phys. Scr.* **53**, 9 (1996).

[39] M. Dugić, *Phys. Scr.* **56**, 560 (1997).

[40] *Quantum Structural Studies: Classical Emergence from the Quantum Level*, edited by: R. E. Kastner, J. Jeknić-Dugić, and G. Jaroszkiewicz (World Scientific, Singapore, 2016).

[41] V. Vedral, *Central Eur.J.Phys.* **1**, 289 (2003).

[42] N. L. Harshman and S. Wickramasekara, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 080406 (2007).

[43] A. C. de la Torre et al, D. Goyeneche, and L. Leitao *Eur. J. Phys.* **31**, 325 (2010).

[44] P. Caban, K. Podlaski, J. Rembielinski, K. A. Smolinski, and Z. Walczak, *J. Phys. A* **38**, L79 (2005).

[45] P. Zanardi, D. A. Lidar, and S. Lloyd, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 060402 (2004).

[46] E. Ciancio, P. Giorda, and P. Zanardi, *Phys. Lett A* **354**, 274 (2006).

[47] M. O. Terra Cunha, J. A. Dunningham, and V. Vedral, *Proc. R. Soc A* **463**, 2277 (2007).

[48] M. Dugić and J. Jeknić-Dugić, *Pramana: J. Phys.* **79**, 199 (2012).

[49] P. Shor, *Phys. Rev. A* **52**, 2493 (1995).

[50] A. M. Steane, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 793 (1996).

[51] D. Gottesman, *Phys. Rev. A* **54**, 1862 (1996).

[52] P. Zanardi and M. Rasetti *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3306 (1998).

[53] E. Knill, R. Laflamme, and L. Viola, eprint arXiv: quantph/ 9908066 (1999).

[54] M. Dugić, *Quantum Computers and Computing* **1**, 102 (2000).

[55] J. Jeknić-Dugić and M. Dugić, *Chin. Phys. Lett.* 25, 371 (2008).

[56] J. Jeknić-Dugić, M. Dugić, and A. Francom *Int. J. Theor. Phys.* **53**, 169 (2014).

[57] F. J. Dyson and D. Derbes, *Advanced Quantum Mechanics*, (World Scientific, Singapore, 2007).

[58] S. Petrat and R. Tumulka, *J. Math. Phys.* **55**, 032302 (2014).

[59] V. Enss, *Commun. Math. Phys.* **61**, 285 (1978).

[60] V. Enss in *Schrödinger Operators, Aarhus, 1985*, edited by E. Balslev (Lect. Notes in Math., vol. 1218, pp. 61-92. Berlin: Springer-Verlag).

[61] H. Kitada, *Rev. Math. Phys.* **3**, 101 (1991).

[62] H. Kitada, in *Functional Analysis and Related Topics, 1991*, edited by H. Komatsu (Lect. Note in Math., vol. 1540, pp.149-189. Berlin: Springer-Verlag).

[63] H. Kitada, *Quantum Mechanics*, (Lectures in Mathematical Sciences, vol. 23, The University of Tokyo, 2005).

[64] H. Kitada, *Il Nuovo Cimento* **109 B**, 281 (1994).

[65] H. Kitada and L. Fletcher, *Apeiron* **3**, 38 (1996).

[66] H. Kitada and L. Fletcher, arXiv:gr-qc/9708055).

[67] W. Greiner, *Quantum Mechanics: An introduction* (4th ed.), (Springer, 2000).

[68] L. C. Céleri, J. Maziero, and R. M. Serra, *Int. J. Qu. Inform.* **9**, 1837 (2011).

[69] J.-S. Xu and C.-F. Li, arXiv:1205.0871v1.

[70] S. Gharibian, *Quantum Inf. and Comp.* **10**, 343 (2010).

[71] H.Y. Fan, L.Y. Hu, *Opt. Commun.* **282 (5)**, 932 (2009).

[72] N. Q. Jiang, H. Y. Fan, L. S. Xi, L. Y. Tang, and X. Z. Yuan *Chin. Phys. B* **20**, 120302 (2011).

[73] H. Y. Fan and L. Y. Hu *Optics Commun.* **282**, 932 (2009).

[74] N. R. Zhou, L. Y. Hu and H. Y. Fan, *Chin. Phys B* **20**, 120301 (2011).

[75] I. P. Mendaš and D. B. Popović, *Phys. Scr.* **82**, 045007 (2010).

[76] A. Ferraro, L. Aolita, D. Cavalcanti, F. M. Cucchietti, and A. Acin *Phys. Rev. A* **81**, 052318 (2010).

[77] G. Adesso and A. Datta, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 030501 (2010).

[78] A. Ferraro, S. Olivares, and M. G. A. Paris, *Gaussian States in Quantum Information* (Bibliopolis, Napoli, 2005).

[79] N. Margolus and L. B. Levitin, *Physica D* **120**, 188 (1999).

[80] W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* **26**, 1862 (1982).

[81] M. Schlosshauer, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1267 (2004).

[82] A. Elby and J. Bub, *Phys. Rev. A* **49**, 4213 (1994).

[83] D. F. Walls, M. J. Collet, and G. J. Milburn, *Phys. Rev. D* **32**, 3208 (1985).

[84] K. M. R. Audenaert and S. Scheel, *New J. Phys.* **10**, 023011 (2008).

[85] A. Jamiolkowski, *Rep.Math. Phys.* **3**, 275 (1972).

[86] John Bell Workshop, 2014, http://www.ijqf.org/groups-2/bells-theorem/forum/.

[87] Z. Ivković, *Teorija verovatnoće sa matematičkom statistikom*, (Gradjevinska knjiga, Beograd, 1980)

[88] C. C. Gerry and P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).

[89] Stefan Schütz, Hessam Habibian, and Giovanna Morigi *Phys. Rev. A* **88**, 033427 (2013).

[90] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalbard in *The New Physics for the Twenty-first Century*, edited by G. Fraser, (Cambridge University Press, Cambridge UK, pp. 145-171, 2006).

[91] B. S. Tsirelson, *Hadronic Journal Supplement* **8**, 329 (1993).

[92] B. Coecke, in *New Structures for Physics*, edited by B. Coecke, (Number 831 in Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 2011).

[93] A. A. Klyachko and A. S. Shumovsky, *Laser Physics* **17**, 62 (2007).

[94] S. Sachdev, in *The New Physics for the Twenty-first Century*, edited by G. Fraser, (Cambridge University Press, Cambridge UK, pp. 229-255, 2006).

Биографија кандидата

Момир Арсенијевић рођен је 24. априла 1980. у Кавадарцима, БЈР Македонија. Основну школу завршио је у Зубином Потоку, а Гимназију природно-математичког смера у Косовској Митровици. На Природно-математичком факултету у Крагујевцу, група физика-информатика, дипломирао је 2004. године, са просечном оценом 8.69. Исте године уписао се на последипломске студије, смер "Класична и квантна теоријска физика", такође на Природно-математичком факултету у Крагујевцу. На последипломским студијама је положио испите предвиђене програмом са просечном оценом 9.5. и одбранио магистарску тезу под насловом: "Модел унутрашњег окружења у Штерн-Герлаховом експерименту", 2010. године – руководилац тезе је био проф. др Мирољуб Дугић.

Момир Арсенијевић је запослен на Природно-математичком факултету у звању асистента на Институту за физику.

Summary

The field of research in this dissertation is concerned with structural study of open/closed quantum systems, especially regarding bipartite structures. Using entanglement relativity rule, it is demonstrated quantum correlations relativity, as a generalization toward case of mixed bipartite states. As a consequence of quantum correlations relativity, it turns out that so called Nakajima-Zwanzig projection method has limitation: for alternate structure the building of proper master equation must be started from the scratch. On the other hand, regarding "the appearance of a classical world in quantum theory", structural analysis bring to conclusion that environment is choosing the most classical structure: classicality is a matter of the distingushed composite system structure. Structuralistic way of thinking shows as natural in theory of quantum scattering, seen as a fundamental way of interaction in many-particle systems. In turn, via theory of asymptotic completeness, then associated interpretation (of Kitada) it is possible to set specific view of the quantum unitary dynamics, where time is classical hidden parameter, giving rise to so called local time scheme. Analysis shows deflection from standard dynamics and novel insights into aspects of decoherence theory, non-markovianity od system dynamics etc.

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Момир Арсенијевић , изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Динамика квантних подсистема и корелација у дводелним канонским структурама

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада.*

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Крагујевцу, 14.10.2016. године,

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Момир Арсенијевић,

☒ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Динамика квантних подсистема и корелација у дводелним канонским структурама

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☒ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *CreativeCommons* лиценци:

---

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *CreativeCommons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

[✓ 3)] Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 14.10.2016. године,

потпис аутора

---

[2] Молимо ауторе који су изабрали дадозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *CreativeCommons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на:http://creativecommons.org.rs/